

بررسی تقریب توزیع احتمال حداکثر یک میدان تصادفی با میانگین مشخصه اویلر

خلیل شفیعی^۱ سمانه قادری^۲

چکیده

در این مقاله ضمن معرفی میدانهای تصادفی، مجموعه برون گشت و مشخصه اویلر، با استفاده از شبیه سازی میدانهای تصادفی گاوسی t ، F و χ^2 به بررسی تقریب توزیع احتمال حداکثر این میدانهای تصادفی با میانگین مشخصه اویلر می پردازیم.

۱-۱ تعاریف

۱. مقدمه

در این بخش تعاریف و مفاهیم مورد نیاز ارائه می شوند. در ابتدا لازم است که به تعریف میدان تصادفی پردازیم. فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ و مجموعه $C \subset \mathbb{R}^N$ را در نظر بگیرید. میدان تصادفی N بعدی روی مجموعه C ، تابعی است نظیر $X(t, w)$ که روی $(C \times \Omega)$ تعریف شده و برای هر t ثابت در مجموعه C ، $X(t, w)$ یک متغیر تصادفی روی $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ است. لذا از نقطه نظر ریاضی، میدان تصادفی روی C به صورت تابع دو متغیره $X(t, w)$ تعریف می شود که دامنه تعریف هر کدام از متغیرهای t و w به ترتیب C و Ω است. بنابراین در حالت $N = 1$ ، میدان تصادفی به فرایند تصادفی تبدیل می شود. به عنوان مثال می توان به حجم آب ذخیره شده در پشت یک سد مشخص ($N = 1$)، به شدت زمین لرزه در تمام نقاط جغرافیایی زلزله خیز در زمانی مشخص (که اگر هر نقطه جغرافیایی را با مختصات دو بعدی طول و عرض جغرافیایی نشان دهیم، $N = 2$ است)، به میزان بارندگی در نقاط مختلف ($N = 3$)، دو بعد برای طول و عرض جغرافیایی و یک بعد برای ارتفاع، اشاره کرد.

مطالعه میدانهای تصادفی، در سالهای اخیر بیش از پیش جنبه کاربردی پیدا کرده است. از جمله کاربردهای آن می توان به مطالعات انجام شده در زمینه های فیزیک، زمین شناسی، زلزله شناسی، پزشکی، مدل بندی سطح آب اقیانوسها و مدل بندی کهکشان اشاره کرد. بیشتر این مطالعات منجر به بررسی متغیر تصادفی «حداکثر مقدار میدان تصادفی» شده است. اما به دست آوردن توزیع این متغیر تصادفی، بسیار مشکل و می توان گفت که جز در مواردی خاص، ناممکن است. به این علت تقریبا و کرانه های متعددی برای بررسی توزیع این متغیر تصادفی به دست آمده است. یکی از این تقریبا، امید ریاضی مشخصه اویلر (EC) مجموعه های برون گشت یک میدان تصادفی است. هازوفر^۳ [۶] به صورت شهودی نشان داد که این تقریب، برای متغیر تصادفی گاوسی، تقریبی مناسب است. ادلر^۴ این موضوع را برای میدان تصادفی گاوسی، ثابت کرده است. اما در مورد رفتار این تقریب برای میدانهای تصادفی χ^2 ، t و F بررسیهایی صورت نگرفته است.

در این مقاله با استفاده از شبیه سازی میدانهای تصادفی گاوسی χ^2 ، t ، F تقریب ذکر شده مورد بررسی قرار می گیرد.

^۲ Hasofer

^۴ Adler

^۱ دانشکده علوم ریاضی، گروه آمار، دانشگاه شهید بهشتی

^۲ دانشجوی کارشناسی ارشد آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه شهید

بهشتی تهران

نظیر هر تابع دلخواهی مثل $f(t)$ ، انواع مختلف مشتق پذیری را می توان برای یک میدان تصادفی تعریف کرد. معروفترین نوع آنها که در این مقاله نیز به کار برده شده، مشتق پذیری به صورت قریب به یقین است. گوئیم که میدان تصادفی X ، در نقطه t^* به صورت قریب به یقین مشتق پذیر است اگر

$$\Pr\{w: X_j(t^*, w) \text{ وجود دارد } j = 1, \dots, N\} = 1$$

که X_j نشان دهنده مشتق جزئی مرتبه اول تابع $X(t)$ ، $t \in \mathbb{R}^N$ ، نسبت به مؤلفه j ام، $j = 1, \dots, N$ ، $\partial X / \partial t_j$ ، است.

رده مهمی از میدانهای تصادفی، رده میدانهای تصادفی گاوسی است. میدان تصادفی گاوسی، میدانی است که توزیعهای متناهی - بعدی آن، همگی توزیعهای گاوسی (نرمال) چند بعدی باشند. اگر t را ثابت در نظر بگیریم، به راحتی می توان همانند نظریه توزیع متغیرهای تصادفی، میدانهای تصادفی χ^2 ، t و F را به همان صورت تعریف کرد.

در اغلب کاربردها، تحقق مشاهده شده از میدان تصادفی، هموار می شود تا تأثیر اغتشاش کاهش یابد. میدان هموار شده، از پیچش میدان با یک هسته به دست می آید. اما میزان همواری مقداری اختیاری است. توضیحات بیشتر در این زمینه را می توان در مقاله سیگموند و ورسلی^۹ یافت.

فرض کنید K یک هسته N بعدی باشد (هسته N بعدی هسته ای است که روی فضای $\mathbb{R}^N$ تعریف می شود). میدان تصادفی هموار شده گاوسی، به صورت زیر تعریف می شود:

$$X(t) = \int K(h-t) dZ(h)$$

که $Z(h)$ میدان تصادفی گاوسی است که روی زیر مجموعه ای از $\mathbb{R}^N$ تعریف شده است. انتگرالی که در عبارت بالا آمده است، از نوع انتگرال تصادفی است (برای آشنایی بیشتر می توانید به [۱] مراجعه کنید).

۲. مجموعه های برون گشت، مشخصه های EC و DT

مطالعه میدانهای تصادفی، غالباً به مطالعه و بررسی مسائل هندسی خاصی می انجامد که در بررسی و تحلیل میدانهای تصادفی به کار می روند. یکی از آنها مفهوم مجموعه های برون گشت (تصادفی) میدان تصادفی حقیقی مقدار $X(t)$ ، $t \in \mathbb{R}^N$ ، است.

میدانهای تصادفی را می توان از $\mathbb{R}^N$ به $\mathbb{R}^m$ تعریف کرد. برای مثال، اگر تعداد تصادفات و تعداد آسیب دیدگان ناشی از آنها را در نظر بگیریم که در سر چهار راههای یک شهر اتفاق می افتد، با میدان تصادفی سه بعدی مواجه هستیم (دو بعد برای مشخص کردن مختصات یک چهار راه و یک بعد برای زمان) که روی $\mathbb{R}^3$ تعریف شده اما $X(t)$ مقادیرش را در $\mathbb{R}^2$ اختیار می کند (یک بعد برای تعداد تصادفات و یک بعد برای تعداد آسیب دیدگان ناشی از آنها). خانواده توزیعهای متناهی - بعدی یک میدان تصادفی به صورت زیر تعریف می شود.

برای یک مجموعه متناهی و دلخواه از مقادیر $t_1, t_2, \dots, t_n$ ، متغیرهای تصادفی متناظر آنها یعنی $X(t_1), \dots, X(t_n)$ دارای توزیع توأم n بعدی خواهند بود که تابع توزیع توأم آنها به صورت زیر نشان داده می شود:

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = \Pr(X(t_1) \leq x_1, \dots, X(t_n) \leq x_n) \quad (1)$$

خانواده همه این توزیعهای توأم را که به ازای مقادیر مختلف n ، $n = 1, 2, \dots$ ، و همه مقادیر ممکن t به دست می آید، خانواده توزیعهای متناهی - بعدی $(fi - di)$ میدان X می گویند.

نظیر نظریه فرایندهای تصادفی، مفهوم همگنی، مفهومی اساسی در مطالعه میدانهای تصادفی است.

میدان تصادفی $X(t)$ ، تعریف شده روی $\mathbb{R}^N$ را اکیدا همگن (یا اکیدا مانا) گوئیم، اگر توزیعهای متناهی - بعدی آن تحت انتقالهای پارامتر t ، ناوردا باشند.

غالباً زمانی که میدانهای تصادفی را بررسی می کنیم، لازم نیست خود را به شرط همگنی اکید محدود کنیم و کافیت که تنها به دو نتیجه حاصل از همگنی اکید اکتفا کنیم. از این رو رده ای از میدانها را معرفی می کنیم که آنها را همگن یا مانا می نامیم.

فرض کنید که $E\{(X(t))^2\}$ به ازای همه مقادیر $t \in \mathbb{R}^N$ متناهی باشد. در این صورت گوئیم میدان تصادفی $X(t)$ همگن است اگر در دو شرط زیر صدق کند:

$$(1) \text{ ثابت } m = E\{X(t)\}$$

$$(2) E\{[X(s) - m][X(t) - m]\} \text{ تنها تابعی از } s - t \text{ باشد.}$$

این میدانها را میدانهای همگن ضعیف، یا میدانهای همگن از مرتبه دوم نیز می نامند. در این صورت تابع کوواریانس، تابعی تنها بر اساس N متغیر (به جای $2N$ متغیر) است. زیرا $C(s, t) = C(s - t)$.

فرض کنید $X: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ میدانی تصادفی باشد. در این صورت برای هر عدد حقیقی ثابت u و هر زیر مجموعه نظیر S از $\mathbb{R}^N$ ، مجموعه برون گشت بالاتر از سطح u برای میدان تصادفی X در S ، به صورت زیر تعریف می شود:

$$A_u(X, S) = \{t \in S : X(t) \geq u\}$$

برای سادگی کار، اگر اشتباهی پیش نیاید، مجموعه برون گشت را به طور اختصار با A_u نشان می دهیم.

هندسه مجموعه های برون گشت در میدانهای تصادفی یک بعدی یا فرایندهای تصادفی، شکل بسیار ساده ای دارد. چرا که تنها شامل نقاط یا بازه ها است. شکل (۱) تحقق از یک فرایند تصادفی را نشان می دهد. مجموعه برون گشت به صورت زیر است:

$$A_u(X, S) = [t_1, t_2] \cup [t_3, t_4]$$

تعداد مؤلفه های همبند یک مجموعه برون گشت، موضوع دیگری است که در مطالعه میدانهای تصادفی با آن رو به رو می شویم. از آنجا که مطالب مورد بحث و مطالعه ما به میدانهای تصادفی مربوط می شوند، لذا برای تعریف تابع مورد نظر، توجه خود را به رده ای از اشیاء هندسی که مختلطهای پایه ای نامیده می شوند، معطوف می کنیم. ادلر [۱] نشان داده که مجموعه های برون گشت بسیاری از میدانهای تصادفی به این رده تعلق دارند.

$\mathbb{R}^N$ را با مختصات دکارتی در نظر می گیریم و بردارهای N بعدی $j = 1, \dots, N$ ، δ_j ، (که زامین مؤلفه آن ۱ و بقیه مؤلفه هایش صفر هستند)، یک پایه متعامد یک برای $\mathbb{R}^N$ است. مجموعه

$$\xi = \{t \in \mathbb{R}^N : t_j = a_j, j \in J, -\infty < t_j < \infty, j \notin J\}$$

یک k -صفحه از $\mathbb{R}^N$ نامیده می شود، اگر J زیر مجموعه $N-k$ عضوی از اعداد صحیح $\{1, \dots, N\}$ بوده و $a_1, \dots, a_{N-k}$ اعداد ثابتی باشند. یعنی یک k -صفحه، زیر فضای k بعدی از $\mathbb{R}^N$ است که توسط k بردار، متوازی با k تا $\delta_1, \dots, \delta_N$ ها تولید شده است.

مجموعه فشرده B در $\mathbb{R}^N$ را پایه می نامیم اگر $\xi \cap B \neq \emptyset$ برای هر k -صفحه ξ از $\mathbb{R}^N$ همبند باشد که شامل $\xi = \mathbb{R}^N$ نیز هست. واضح است که مجموعه تهی و هر مجموعه محدبی، یک پایه است.

مجموعه $A \subset \mathbb{R}^N$ را مختلط پایه ای گوئیم اگر بتوان آن را به صورت اجتماع تعداد متناهی از پایه ها نمایش داد به طوری که اشتراک هر تعداد دلخواهی از این پایه ها، خود پایه باشد. بنابراین اگر

و خاصیت دیگر این که اگر $A, B, A \cap B$ و $A \cup B$ مختلطهای پایه ای باشند، در این صورت:

$$\varphi(A \cup B) = \varphi(A) + \varphi(B) - \varphi(A \cap B) \quad (۳)$$

با استفاده از مفاهیم مختلف ریاضی، مشخصه های متعددی تعریف شده اند. یکی از این مشخصه ها، مشخصه اولر است. تعریف این مشخصه از دیدگاه توپولوژی توسط ادلر [۱] توضیح داده شده است. در این جا تنها این مشخصه را به زبانی ساده توصیف می کنیم.

معرفی مشخصه اولر (EC) به مطالعات اولر (۱۷۰۷-۱۷۸۳) باز می گردد. وی یکی از ریاضیدانان قرن هیجدهم بود که در زمینه چند وجهیها مطالعاتی را انجام داد. او به این نتیجه رسید که اگر تعداد وجوه (F)، تعداد یالها (E) و تعداد رأسهای (V) یک چند وجهی را بشماریم، همواره رابطه $V - E + F = 2$ برقرار است. برای مثال در یک مکعب $F = 6$ ، $E = 12$ و $V = 8$ ، بنابراین $V - E + F = 2$ (شکل ۲ الف). برای جسم توپری که شامل P چند وجهی است که حداقل در یک وجه به هم چسبیده اند، رابطه $V - E + F - P = 1$ همواره برقرار است. برای مثال در شکل ۲ (ب) تعداد وجهها ۱۶، تعداد یالها ۲۸، تعداد رأسها ۱۶ و کل شکل از $P = 3$ چند وجهی تشکیل شده است و دیده می شود که $V - E + F - P = 1$ است.

اگر در جسم توپری یک حفره کامل وجود داشته باشد، رابطه بالا دیگر برقرار نیست. در واقع نتیجه به صورت $V - E + F - P = 0$ خواهد بود (شکل ۲ ج). اگر دو حفره یا سه حفره در داخل جسم توپر وجود داشته باشد، در این صورت

$V - E + F - P$ به ترتیب برابر ۱- و ۲- خواهد بود (شکل ۲ د، ه). به همین نحو با اضافه شدن هر حفره، مقدار $V - E + F - P$ یک واحد کاهش می یابد.

$$F(t) = u \quad (5)$$

$$F_j(t) = 0; j = 1, \dots, N-1 \quad (6)$$

$$F_N(t) > 0 \quad (7)$$

(۸) تعداد مقادیر ویژه منفی ماتریس $D_{N-1}(t)$ ، دقیقاً k باشد.

که $D_{N-1}(t)$ ماتریس $(N-1) \times (N-1)$ بعدی است که مؤلفه‌هایش مشتقات جزئی مرتبه دوم $F(t)$ هستند، یعنی:

$$D_{N-1} = (F^{(kl)}) ; k, l = 1, \dots, N-1$$

در واقع اگر مجموعه برون گشت، اشتراکی با مرز ناحیه T نداشته باشد، $(A \cap \partial T = \emptyset)$ ، در این صورت مشخصه‌های DT و اویلر یکی هستند. به عبارت ساده‌تر می‌توان گفت که مقدار این مشخصه در حالت دو بعدی برابر تعداد مؤلفه‌های همبند مجموعه برون گشت، منهای تعداد حفره‌ها، و در حالت سه بعدی برابر تعداد مؤلفه‌های همبند، منهای تعداد دسته‌ها، بعلاوه تعداد حفره‌هاست. لذا به عنوان مثال، مشخصه اویلر یک کره پر، یک کره خالی و یک فنجان به ترتیب برابر یک، دو و صفر است.

۳. امید ریاضی مشخصه DT

همان گونه که در ابتدای این مقاله ذکر شد، از امید ریاضی مشخصه EC به عنوان تقریبی برای توزیع احتمال حداکثر یک میدان تصادفی استفاده می‌شود. اما از آنجا که نوشتن عبارتی صریح برای این مشخصه در حالاتی بیش از سه بعد بسیار پیچیده بوده و از طرفی در اغلب کاربردها مشخصه‌های EC و DT یکی هستند، لذا از میانگین مشخصه DT استفاده می‌شود. ادلر میانگین این مشخصه را تحت شرایطی خاص به دست آورد. با استفاده از این موضوع، حاصل این عبارت برای میدان تصادفی گاوسی تحت شرایطی خاص توسط ادلر و برای میدانهای χ^2 ، F و t توسط ورسلی به دست آمده است.

فرضیات و علائم مورد نیاز برای بیان قضیه اصلی بدین صورت است.

فرض کنید $Z = Z(t)$ ، $t = (t_1, \dots, t_N) \in \mathbb{R}^N$ ، میدان تصادفی حقیقی مقدار همگنی بوده و C زیر مجموعه فشرده و محدبی در $\mathbb{R}^N$ باشد. $D_{N-1} = D_{N-1}(t)$ نشان دهنده ماتریس $(N-1) \times (N-1)$ بعدی بوده که عناصرش مشتقات جزئی مرتبه دوم $Z(t)$ هستند. $\lambda(C)$ نیز نشان دهنده اندازه لبگ مجموعه C است. مدول پیوستگی $Z^{(k)}$ و $Z^{(kl)}$ را درون C به صورت زیر

محاسبه $V - E + F - P$ گامی برای تعریف مشخصه اویلر یک جسم توپر است. مشخصه اویلر یک جسم توپر که متشکل از چندین چندوجهی است، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$EC = V - E + F - P$$

بنابراین مقدار EC برای شکلی نظیر شکل ۲ (هـ) برابر ۲- است (۱+ برای کل شکل و ۳- به دلیل وجود سه حفره که جمعاً برابر ۲- می‌شود).

اگر جسم توخالی باشد، نظیر توپ تنیس، در این صورت مقدار EC برابر ۲ است. در مورد تیوب دوچرخه مقدار EC برابر صفر است و اگر سوراخ و یا پنجر شده باشد، برابر ۱- است.

اینک فرض کنید که مجموعه‌ای از اجسام توپر ناهمبند وجود دارد. در این حالت، می‌توان آنها را به چندوجهیها شکست و فرمول را برای هر چندوجهی به کار برده و سپس مقادیر به دست آمده را با هم جمع کرد. بنابراین اگر مجموعه، شامل چندین مؤلفه همبند و بدون حفره باشد، در این صورت مقدار EC ، برابر تعداد این مؤلفه‌هاست.

اگر با مجموعه‌ای سه بعدی رو به رو باشیم که دارای مرزی هموار باشد، در این صورت برای پیدا کردن مقدار EC ، می‌توان مجموعه را به شبکه مکعبی پوشاند. اگر شبکه به اندازه کافی خوب و مناسب و مرز مجموعه هموار باشد، در این صورت مقدار مشخصه اویلر شبکه داخل مجموعه، برابر مقدار مشخصه اویلر مجموعه است [۱۲].

با توجه به آنچه گفته شد، دیده می‌شود که به دست آوردن مقدار مشخصه اویلر مجموعه برون گشت، کار چندان ساده‌ای نیست. از این رو ادلر [۱] بر اساس توپولوژی دیفرانسیل، مشخصه DT (توپولوژی دیفرانسیل) را برای هر مجموعه برون گشت تعریف کرد. وی همچنین نشان داد که اگر مجموعه برون گشت با مرز زیر مجموعه T ، اشتراک نداشته باشد، در این صورت هر دو مشخصه یکی هستند.

تعریف مشخصه DT . فرض کنید $F: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ از رده C^2 روی یک زیر مجموعه فشرده‌ای نظیر $T \subset \mathbb{R}^N$ باشد. در این صورت اگر χ_k های تعریف شده در زیر، همگی متناهی باشند، آنگاه مشخصه DT ی مجموعه برون گشت $A_u(F, T)$ ، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\chi(A) = (-1)^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k \chi_k \quad (4)$$

که χ_k تعداد نقاطی نظیر t در T است که در شرایط زیر صدق کنند:

در این صورت میانگین مقدار مشخصه DT ی مجموعه برون گشت $A = A_x(X, T)$ برابر است با:

$$E\{\chi(A)\} = |T| \rho_N(x) \quad (9)$$

$$\rho_N(x) = \quad (10)$$

$$\frac{\exp(-x^T/\sqrt{2}\sigma^T)(\det(\Lambda))^{\sqrt{2}}}{(\sqrt{2}\pi)^{(N+1)/2}\sigma^N} H_{N-1}(x/\sigma)$$

$$H_n(x) = n! \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j x^{n-2j}}{j!(n-2j)!2^j} \quad (11)$$

که H_n ، چندجمله‌ای اریتم مرتبه n ام، Λ و $\sigma^T = E\{X^T(t)\}$ ، ماتریس کوواریانس X_j است.

قضیه ۳. در حالت $N \geq 2$ ، اگر شرایط نظم مورد نیاز قضیه ۱ برای هر یک از مؤلفه‌های میدانهای گاوسی $X_i(t)$ برقرار باشد، در این صورت امید ریاضی مشخصه DT ی مجموعه برون گشت میدانهای تصادفی χ^T ، $U(t) = \sum_{i=1}^n X_i^T(t)$ ، به صورت زیر خواهد بود:

$$E(\chi(A_u(U, C))) = \frac{\lambda(C) \det(\Lambda)^{\frac{1}{2}} u^{\frac{1}{2}(n-N)} e^{-\frac{1}{2}u}}{(\sqrt{2}\pi)^{\frac{1}{2}} \sqrt{2}^{\frac{1}{2}(n-2)} \Gamma(\frac{n}{2})} P_{N,n}(u)$$

که $P_{N,n}$ یک چندجمله‌ای از درجه $(N-1)$ بر حسب u با ضرایب صحیح است و به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$P_{N,n}(u) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} \sum_{k=0}^{N-1-2j} \binom{n-1}{N-1-2j-k} \frac{(-1)^{N-1-j+k} (N-1)!}{2^j j! k!} u^{j+k}$$

لم ۱- اگر $m+n > N$ و مؤلفه‌های $X_1, \dots, X_n$ و $Y_1, \dots, Y_m$ در شرایط قضیه ۱ صدق کنند، در این صورت میدان تصادفی F ، دارای نظم لازم برای برقراری قضیه ۱ است.

قضیه ۴. در حالت $N \geq 2$ و $m+n > N$ ، اگر شرایط نظم ذکر شده در قضیه ۱ برای هر یک از مؤلفه‌های میدانهای تصادفی $X_i(t)$ ، $i = 1, \dots, n$ و $Y_j(t)$ ، $j = 1, \dots, m$ ، برقرار باشد، در این صورت امید ریاضی مشخصه DT ی مجموعه برون گشت میدان تصادفی F

تعریف می‌کنیم:

$$\omega_k(h) = \sup_{\|t-s\|<h} |Z^k(t) - Z^k(s)| \quad ; k = 1, \dots, N$$

$$\omega_{kl}(h) = \sup_{\|t-s\|<h} |Z^{kl}(t) - Z^{kl}(s)| \quad ; k, l = 1, \dots, N$$

که سوپرهم روی همه t و s های واقع در مجموعه C گرفته می‌شود.

قضیه ۱. فرض کنید

(i) برای هر $\varepsilon > 0$ ، وقتی $h \downarrow 0$:

$$P(\max\{\omega_k(h), \omega_{kl}(h)\} > \varepsilon) = o(h^N)$$

(ii) مشتقات جزئی مرتبه دوم $\{Z^{kl}, 1 \leq k \leq N, 1 \leq l \leq N-1\}$ و $Z^{(N)}$ ، به شرط $Z^{(1)}, \dots, Z^{(N-1)}$ ، دارای واریانس شرطی متناهی باشند. همچنین چگالی $\theta_{N-1}(z, z_1, \dots, z_{N-1})$ که چگالی توأم متغیرهای تصادفی $Z, Z^{(1)}, \dots, Z^{(N-1)}$ است، از بالا کراندار باشد و C زیر مجموعه‌ای محدب از $\mathbb{R}^N$ باشد. در این صورت امید ریاضی مشخصه DT ی مجموعه برون گشت $A_z(Z, C)$ برابر است با:

$$E(\chi(A_z(Z, C))) = E\{Z^{(N)+} \det(D_{N-1}) | Z = z, Z^{(1)} = 0, \dots, Z^{(N-1)} = 0\} \lambda(c) (-1)^{N-1} \times \theta_{N-1}(z, 0, \dots, 0) \quad [11]$$

اهمیت قضیه بالا در این است که می‌توان میانگین مشخصه DT ی مجموعه‌های برون گشت را با استفاده از توزیع توأم میدان $Z(t)$ و مشتقات جزئی تا مرتبه دوم آن به دست آورد. اینک می‌توان با استفاده از قضیه بالا امید ریاضی مشخصه DT ی میدانهای تصادفی گاوسی χ^T و F را به دست آورد.

قضیه ۲. فرض کنید $t \in \mathbb{R}^N$ ، میدان تصادفی گاوسی همگن با میانگین صفر روی $\mathbb{R}^N$ بوده و T زیر مجموعه‌ای فشرده و محدب از $\mathbb{R}^N$ باشد به طوری که مرز آن، ∂T ، دارای اندازه لبگ صفر است. فرض کنید که X تقریباً همه جا دارای مشتقات جزئی پیوسته تا مرتبه دوم با واریانسهای متناهی باشد. همچنین توزیع توأم X و این مشتقات جزئی ناتبه‌ایده و مدول پیوستگی X_{ij} ، وقتی که $h \downarrow 0$ ، در شرط زیر صدق کند:

$$P(\max\{\omega_k(h), \omega_{kl}(h)\} > \varepsilon) = o(h^N)$$

$$E(\lambda(A_t(T, C))) =$$

$$\frac{\lambda(C) \det(\Lambda)^{\frac{1}{\gamma}}}{(\gamma\pi)^{\frac{N+1}{\gamma}}} \left(1 + \frac{t^\gamma}{m}\right)^{\frac{m-1}{\gamma}} Q_{N,m}(t)$$

$$Q_{N,m}(t) =$$

$$\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{N-1}{\gamma} \rfloor} \frac{(-1)^j (N-1)!}{\gamma^j j! (N-1-\gamma j)!} \times$$

$$\frac{\Gamma(\frac{m+1}{\gamma})}{\Gamma(\frac{m+\gamma-N+\gamma j}{\gamma})} \left(\frac{m}{\gamma}\right)^{\frac{N-1-\gamma j}{\gamma}} t^{N-1-\gamma j}$$

$$P\{\sup_{t \in T} X(t) \geq x\} \quad \text{۴. بررسی}$$

یکی از قدیمیترین و مشکلترین مسائلی که در حین مطالعه میدانهای

تصادفی با آن مواجه می‌شویم، تعیین احتمال

$$P\{\sup_{t \in T} X(t) \geq x\} \quad (۱۲)$$

است که X یک میدان تصادفی (حقیقی مقدار) است. در اغلب

کاربردها، پس از مدل بندی موضوع مورد نظر توسط یک میدان

تصادفی، با مسائلی رو به رو می‌شویم که به محاسبه (۱۲) می‌انجامد.

مقدار دقیق عبارت (۱۲)، تنها در پنج حالت و برای فرایندهای تصادفی

که دارای تابع کوواریانسی به شکل زیرند، محاسبه شده است [۵]:

$$C(t) = e^{-|t|} \quad (i)$$

$$C(t) = \begin{cases} 1 - |t| & ; |t| \leq 1 \\ 0 & ; |t| \geq 1 \end{cases} \quad \text{اگر} \quad (ii)$$

$$C(t) = \frac{2}{3} \exp(-\frac{|t|}{3}) (1 - \frac{1}{3} \exp(-\frac{\sqrt{3}|t|}{3})) \quad (iii)$$

$$C(t) = C(-t) = C(t+\gamma) \quad (iv)$$

$$C(t) = \begin{cases} 1 - \alpha t & ; 0 \leq t \leq 1 \\ 1 + \alpha(t-1) & ; 1 \leq t \leq 2 \end{cases} \quad \text{اگر}$$

$$0 \leq \alpha \leq 2 \quad \text{وقتی}$$

حالت پنجم را کرسی و دیویس [۵] با تابع کوواریانس:

$$F(t) = \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^\gamma(t) \right\} / \left\{ \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m Y_i^\gamma(t) \right\}$$

به صورت زیر خواهد بود:

$$E(\chi(A_f(F, C))) =$$

$$\frac{\lambda(C) \det(\Lambda)^{\frac{1}{\gamma}} \Gamma(\frac{m+n-N}{\gamma})}{(\gamma\pi)^{\frac{N}{\gamma}} \gamma^{\frac{1}{\gamma}} \Gamma(\frac{m}{\gamma}) \Gamma(\frac{n}{\gamma})} \left(\frac{nf}{m}\right)^{\frac{n-N}{\gamma}}$$

$$\times \left(1 + \frac{nf}{m}\right)^{\frac{1}{\gamma}(m+n-\gamma)} K_{N,m,n}(f)$$

که $K_{N,m,n}(f)$ یک چندجمله‌ای از درجه $(N-1)$

بر حسب $\left(\frac{nf}{m}\right)$ و با ضرایب صحیح است و به صورت زیر محاسبه

می‌شود:

$$K_{N,m,n}(f) =$$

$$(-1)^{N-1} (N-1)! \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{N-1}{\gamma} \rfloor} \frac{\Gamma(\frac{m+n-N}{\gamma} + j)}{\Gamma(\frac{m+n-N}{\gamma}) j!}$$

$$\times \sum_{k=0}^{N-1-\gamma j} \binom{m-1}{k} \binom{n-1}{N-1-\gamma j-k} (-1)^{j+k} \left(\frac{nf}{m}\right)^{j+k}$$

$$Z_1, Z_\gamma \sim MN_N(0, \Lambda) \text{ و } S \sim \chi_{m+1}^2, T \sim t_m$$

لم ۲- اگر $m \geq N$ و مؤلفه‌های $X(t)$ و $Y_1(t), \dots, Y_m(t)$ در

شرایط قضیه ۱ صدق کنند، در این صورت میدان تصادفی t ، دارای

نظم لازم برای برقراری قضیه ۱ است.

قضیه ۵- برای $N \geq 2$ و $m \geq N$ ، اگر هر یک از مؤلفه‌های

میدانهای گاوسی $X(t)$ و $Y_i(t)$ ، $i = 1, \dots, m$ ، در شرایط ذکر شده

در قضیه ۱، صدق کنند، در این صورت امید ریاضی مشخصه DT ی

مجموعه‌های برون گشت میدان تصادفی t ،

$$T(t) = X(t) / \left\{ \sum_{i=1}^m Y_i^\gamma(t) / m \right\}^{\frac{1}{\gamma}}$$

به صورت زیر خواهد بود:

حاصل از حداکثر مقدار میدان تصادفی قرار گرفته‌اند. چون تابع تقریب، به ازای همه مقادیر به دست آمده، تابع احتمال نیست، لذا تنها مقادیری از ماکسیمهای یادداشت شده را در رسم نمودار در نظر گرفتیم که به ازای آن مقادیر، تابع تقریب کوچکتر و یا برابر با یک باشد. در نمودارهای ۱-۴ شکل، نتایج حاصله، گواهی در تأیید نتایج حاصله را برای میدانهای گاوسی و t ، با درجات همواری (S) متفاوت، نشان می‌دهد. بدین معنی که برای مقادیر بزرگ، تقریب مورد نظر در مورد میدان تصادفی گاوسی به خوبی عمل می‌کند. این بررسیها حاکی از آن بود که با هموارتر شدن میدان، تقریب مورد نظر بهتر است. در مورد میدان تصادفی t ، همان گونه که نمودارهای ۳ و ۴ نشان می‌دهند، تقریب مورد نظر چندان مناسب نیست، اما با افزایش درجه آزادی و میزان همواری میدان، تقریب مناسبتر می‌شود. خلاصه نتایج حاصل از تمامی نمودارها (در اینجا تنها ۴ مورد آن نمایش داده شده است) در جداول ۱-۳ آورده شده‌اند. با کمک این جداول دیده می‌شود که برای میدانهای تصادفی χ^2 و F ، با افزایش درجه آزادی و نیز میزان همواری میدان، تقریب مورد نظر بهتر است.

از آنجایی که کاربرد این تقریبها، به عنوان P - مقدار در کارهای آماری است، لذا در جداول زیر نقاطی که مقدار تابع تقریب در آن نقاط برابر 0.01 ، 0.05 و 0.1 هستند، نمایش داده شده‌اند. همچنین تفاضل بین مقدار تابع تقریب و یک منهای مقدار تابع توزیع تجمعی نیز در این نقاط نشان داده شده است. این مقادیر، تحلیلگر را در بیان مناسب بودن یا نبودن تقریب مورد نظر یاری می‌کند.

در شکل ۳ [۹] (الف) تصویری ساختگی در حالت دو بعدی (ماکسیم کل با G و ماکسیم موضعی با L) نشان داده شده است. قسمت (ب) مجموعه برون گشت (نواحی تیره) بالاتر از آستانه $t = 3/2$ ، را نشان می‌دهد. چون مجموعه فرامرزی، اشتراکی با کران ندارد، لذا مشخصه اولیئر تعداد نواحی مجزا منهای تعداد حفره‌ها را به دست می‌دهد و بنابراین $\varphi_t = 4$. در قسمت (ج) همین که آستانه افزایش یابد، $t = 4/22$ ، حفره‌ها ظاهر نشده و مشخصه اولیئر برابر تعداد ماکسیمهای موضعی است و لذا $\varphi_t = 4$. در قسمت (د) در سطوح بالاتر، $t = 5/6$ ، مشخصه اولیئر مقدار یک را می‌گیرد اگر ماکسیم کل از t تجاوز کند، و در غیر این صورت مقدار صفر را خواهد داشت و بنابراین $\varphi_t = 1$.

$$C(t) = \begin{cases} 1 - |t|/(1-\beta) & ; |t| \leq 1 \text{ اگر} \\ -\beta(1-\beta) & ; 1 \leq |t| < (1-\beta)\beta \text{ اگر} \end{cases} \quad (v)$$

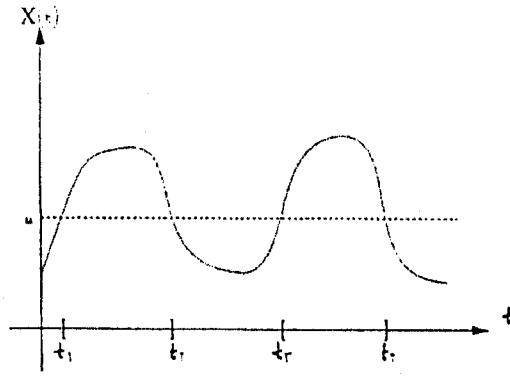
وقتی $0 < \beta \leq 1/2$ به دست آورده‌اند.

در سایر موارد اغلب از تقریبها و کرانهایی برای بررسی رابطه (۱۲) استفاده می‌شود. یکی از این تقریبها، امید ریاضی مشخصه اولیئر است. تعریف EC را به یاد آورید. گفتیم که کاری شبیه شمردن تعداد مؤلفه‌های مجموعه برون گشت را انجام می‌دهد. بدین مفهوم که در حالت دو بعدی، این مشخصه برابر تعداد مؤلفه‌های همبند مجموعه برون گشت، منهای تعداد حفره‌هاست. ادلر [۱] نشان داد که با افزایش مقدار X ، تعداد حفره‌ها به سمت ناپدید شدن میل می‌کند و بنابراین با نواحی مجزایی رو به رو خواهیم بود که تنها شامل ماکسیمهای موضعی هستند (شکل ۳ ب). بنابراین برای مقادیر بزرگ X ، حفره‌ها به ندرت ظاهر شده و EC تقریبی برای تعداد ماکسیمهای $X(t)$ بالاتر از سطح X و درون T است. با زیادتر شدن مقدار X و نزدیک شدن آن به مقدار ماکسیم کل $X(t)$ درون T ، $X_{\max}$ ، مشخصه اولیئر مقدار صفر را خواهد داشت اگر $X_{\max} < x$ و اگر $X_{\max} > x$ ، در این صورت مشخصه اولیئر مقدار یک را خواهد داشت (شکل ۳ ج). لذا به نظر می‌رسد که امید ریاضی مشخصه اولیئر تقریب مناسبی برای (۱۲) باشد، یعنی:

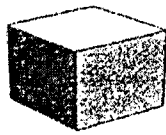
$$P\{X_{\max} \geq x\} \approx E\{\varphi(A_x(T))\}$$

که $\varphi(A_x(T))$ مشخصه اولیئر مجموعه برون گشت فرایندی تصادفی، درون مجموعه T و بالاتر از سطح X است.

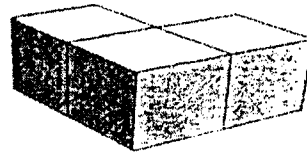
این موضوع در حالت یک بعدی توسط هازفر [۶] به صورت شهودی نشان داده شده است. همچنین ادلر این موضوع را برای میدانهای تصادفی گاوسی تحت شرایطی خاص ثابت کرده است. اما در مورد رفتار این تقریب برای میدانهای تصادفی χ^2 ، F و t بررسیهایی صورت نگرفته است. در اینجا با استفاده از شبیه سازی این میدانها، به بررسی این موضوع پرداخته‌ایم. روش کار بدین صورت بوده است که ابتدا میدان تصادفی مورد نظر، Π بار شبیه سازی شده و هر بار، ماکسیم مقدار میدان تصادفی یادداشت شده است. سپس با استفاده از نموداری که در آن یک منهای مقدار تابع توزیع تجمعی نمونه و نیز مقدار تقریب مورد نظر (امید ریاضی مشخصه اولیئر) در کنار هم رسم شده‌اند، مسئله مورد بررسی قرار گرفته است. بر روی محور افقی مقادیر یادداشت شده



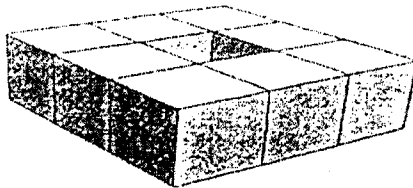
شکل ۱



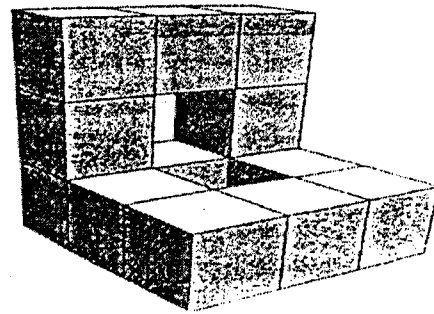
$$۸ - ۱۲ + ۶ - ۱ = ۱ \quad (\text{الف})$$



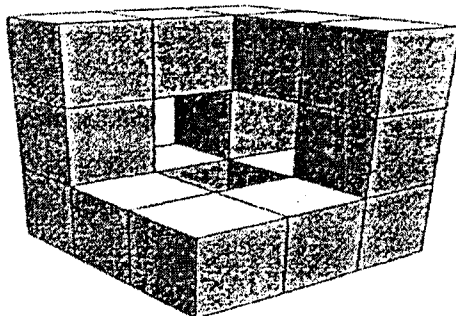
$$۱۶ - ۲۸ + ۱۶ - ۳ = ۱ \quad (\text{ب})$$



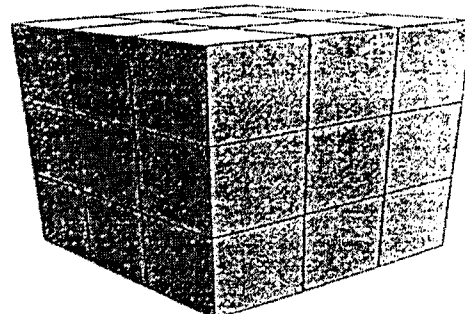
$$۲۲ - ۶۴ + ۴۰ - ۸ = ۰ \quad (\text{ج})$$



$$۴۸ - ۱۰۰ + ۶۴ - ۱۳ = -۱ \quad (\text{د})$$

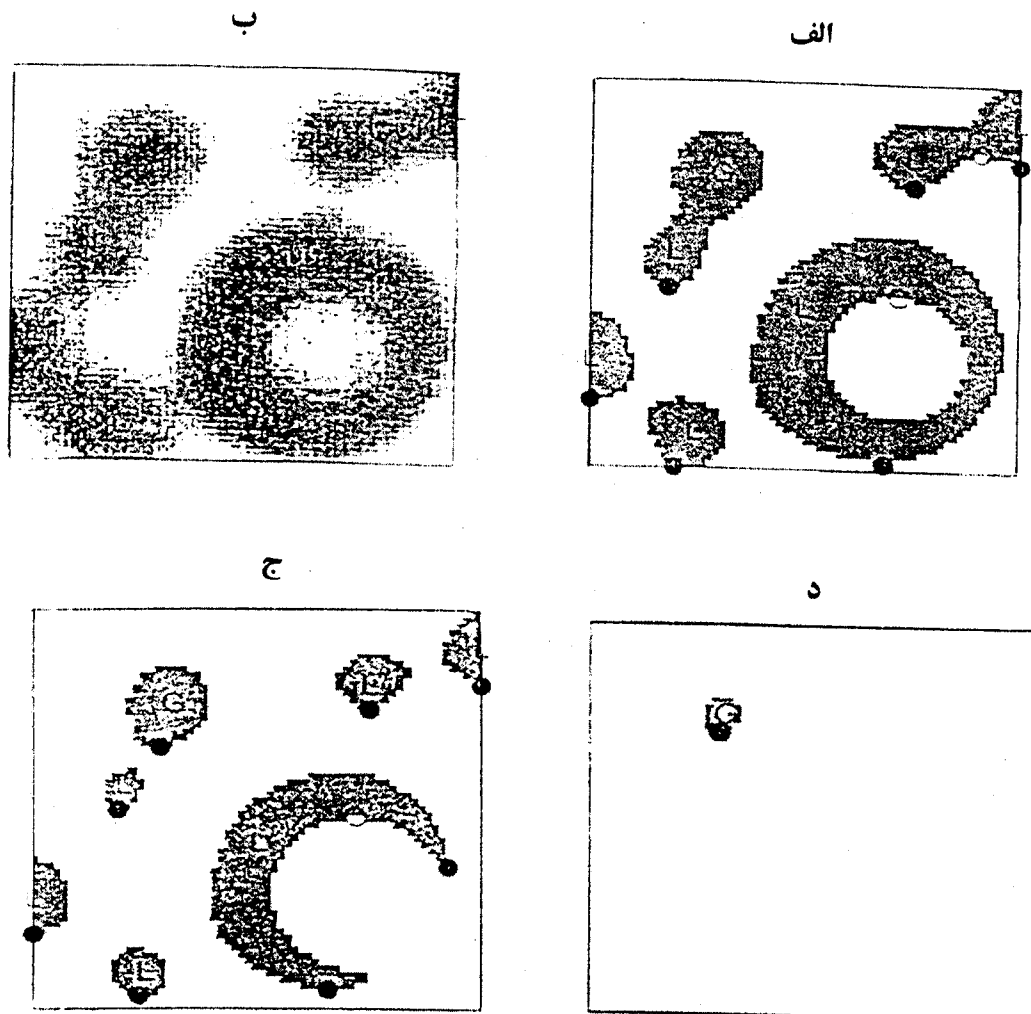


$$۵۶ - ۱۲۰ + ۷۸ - ۱۶ = -۲ \quad (\text{ه})$$

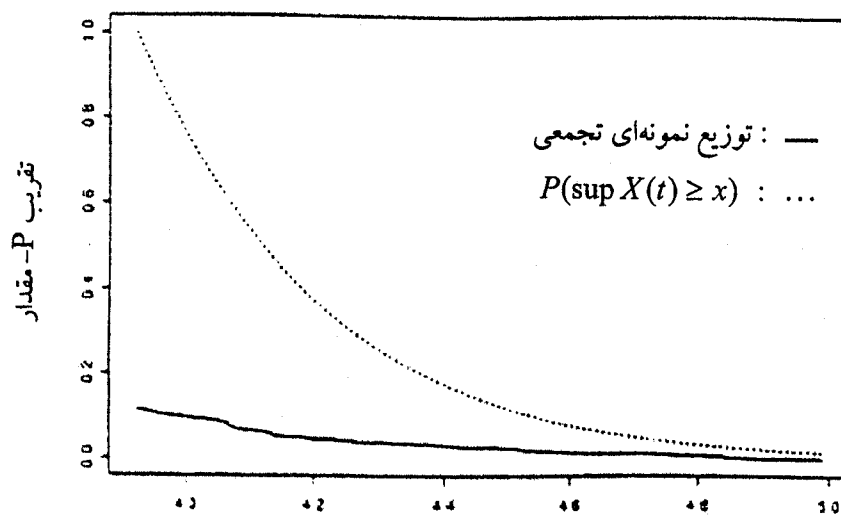


$$۶۴ - ۱۴۴ + ۱۰۸ - ۲۶ = ۲ \quad (\text{و})$$

شکل ۲. مشخصه اویلر چندوجهی [۱۲]

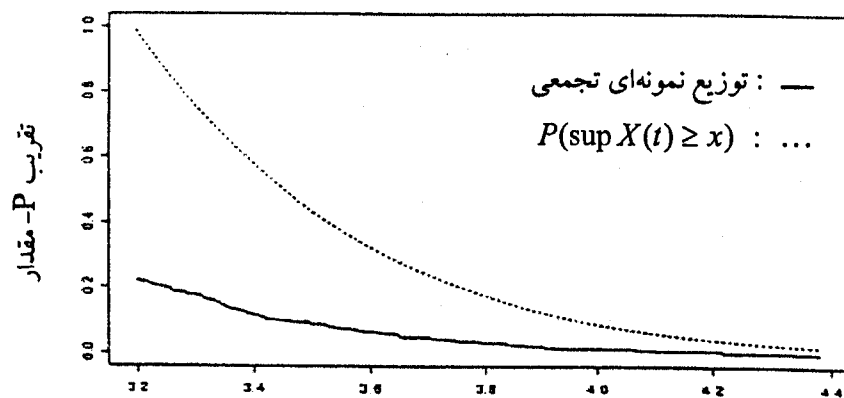


شکل ۳



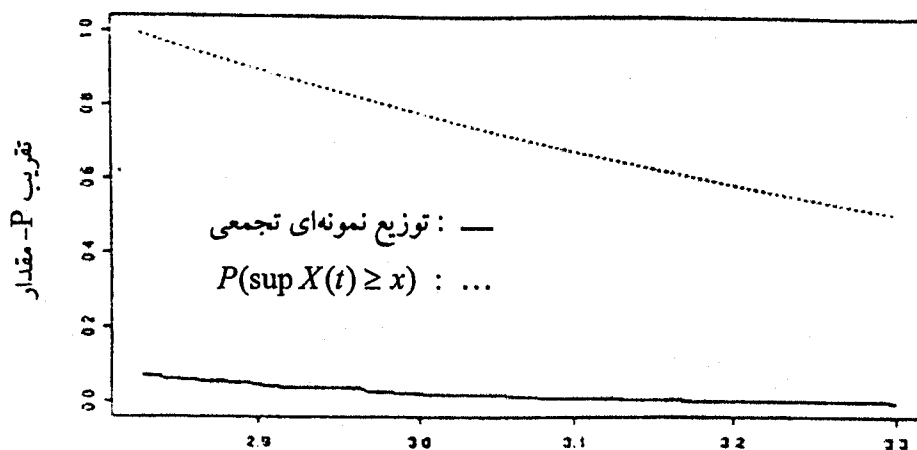
حداکثر میدان تصادفی گاوسی شبیه سازی شده، $S = 0.187$

شکل ۴-۱ (بررسی تقریب $P(\sup_{t \in T} X(t) \geq x)$ ، میدان گاوسی، $S_{11} = 1$)



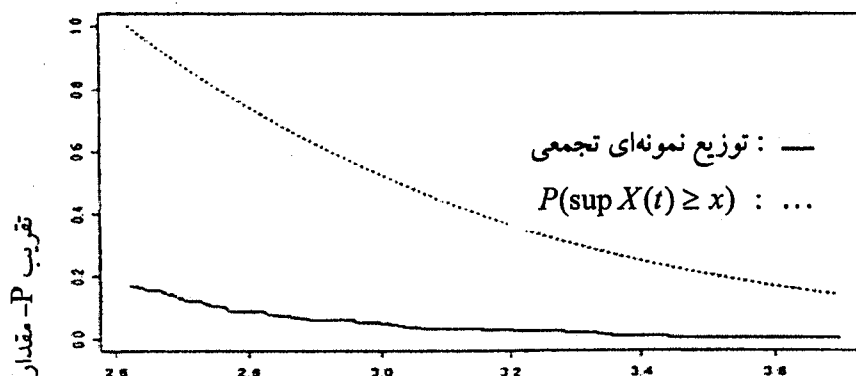
حداکثر میدان تصادفی گاوسی شبیه سازی شده با $S_{11} = 0.117$

شکل ۲-۴ (بررسی تقریب $P(\sup_{t \in T} X(t) \geq x)$ ، میدان گاوسی، $S_{11} = 0.117$)



حداکثر میدان تصادفی شبیه سازی شده با $s = 0.187, df = 15$

شکل ۳-۴ $P(\sup_{t \in T} X(t) \geq x)$ ، میدان t ، $df = 15$ ، $S_{11} = 0.187$



حداکثر میدان تصادفی شبیه سازی شده با $s = 0.187, df = 25$

شکل ۴-۴ $P(\sup_{t \in T} X(t) \geq x)$ ، میدان t ، $df = 25$ ، $S_{11} = 0.187$

جدول ۱: نتایج حاصل از شبیه سازی میدانهای تصادفی F

df	s	n	$n(./.)$	$d(./.)$	$n(./.)$	$d(./.)$	$n(./.)$	$d(./.)$
(۱۰,۱۵)	۱	۳۰۰	۱۸/۷۲	۰/۰۹	۲۳/۴۵۶۵۴	۰/۰۴۶۶۷	—	—
	۰/۱۱۷	۲۵۰	۱۴/۰۶۶۱۶	۰/۱	۷/۶۴۲۱	—/۰۲۰۲	—	—
	۰/۰۵۲۱	۳۰۰	۱۰/۸۰۸۶۲	۰/۰۸۳۳	۱۱/۸۳۷۲۴	۰/۰۳۶۶۷	۱۱/۸۳۷۲۴	—
	۰/۰۱۸۷	۴۰۰	۸/۰۹۱۱	۰/۰۴۵	۸/۹۰۰۷۲۳	۰/۰۰۷۵	۱۳/۹۴۷۷۷	—
(۱۵,۱۰)	۱	۳۰۰	۶/۹۱۱۳	۰/۱	—	—	—	—
	۰/۱۱۷	۲۵۰	۲۴/۴۸۴۳۲	۰/۰۸۴	—	—	—	—
	۰/۰۵۲۱	۳۰۰	۲۰/۰۸۸۳۸	۰/۰۹	—	—	—	—
	۰/۰۱۸۷	۲۵۰	۱۵/۲۸۱۳۸	۰/۰۸	۲۲/۰۰۹۹۳	—/۰۳۵۴	—	۰/۰۱

جدول ۲: نتایج حاصل از شبیه سازی میدانهای تصادفی χ^2

df	s	n	$n(./.)$	$d(./.)$	$n(./.)$	$d(./.)$	$n(./.)$	$d(./.)$
۱۰	۱	۶۵۰	۴۳/۳۹۷۷	۰/۰۷۶۹	۴۵/۹۰۶۹	۰/۰۵	۴۹/۹۶۶۶	۰/۰۰۸۵
	۰/۱۱۷	۲۵۰	۳۷/۸۱۲۲	۰/۰۷۶	۳۹/۳۶۲۸	۰/۰۳۸	۴۵/۱۶۲۹	۰/۰۱
	۰/۰۵۲۱	۲۵۰	۳۵/۶۹۲۷	۰/۰۹۲	۳۷/۶۰۲۰۹	۰/۰۴۶	۴۴/۰۳	۰/۰۱
	۰/۰۱۸۷	۵۰۰	۳۱/۸۴۰۳۳	۰/۰۶۶	۳۴/۸۸۰۲	۰/۰۳۸	۴۴/۰۵۷۱	۰/۰۱
۱۵	۱	۳۰۰	۵۲/۹۳۳۲	۰/۰۸۳۳	۵۵/۶۳۸۱	۰/۰۴۶۷	—	—
	۰/۱۱۷	۲۵۰	۴۶/۹۰۵۱	۰/۰۸	۵۰/۵۳۵۵	۰/۰۵	—	—
	۰/۰۵۲۱	۲۵۰	۴۳/۱۶۶۹	۰/۰۴۴	۴۵/۹۴۳۴	۰/۰۳۴	۲۵/۴	۰/۰۱
	۰/۰۱۸۷	۳۰۰	۴۱/۲۳۷۵	۰/۰۹	۴۴/۲۰۸۴	۰/۰۴۶۷	—	—
۲۵	۱	۵۰۰	۷۰/۱۲۰۷	۰/۰۸۲	۷۱/۹۷۳۶	۰/۰۳۶	۷۹/۶۰۷۵	۰/۰۰۸
	۰/۱۱۷	۱۰۰	۶۳/۴۵۳۲	۰/۰۶	۶۶/۱۳۰۹	۰/۰۰۶	—	—
	۰۰۵۲۱	۲۵۰	۶۰/۳۹۱۵	۰/۰۸	۷۴/۸۲	۰/۰۵	۷۴/۸۲	—
	۰/۰۱۸۷	۲۵۰	۵۶/۸۷۵۳	۰/۰۹۶	۶۶/۶۸	۰/۰۵	۶۶/۶۸	—

جدول ۳: نتایج حاصل از شبیه سازی میدانهای تصادفی گاوسی

s	n	$n(0/\cdot)$	$d(0/\cdot)$	$n(0/\cdot 0.5)$	$d(0/\cdot 0.5)$	$n(0/\cdot 0.8)$	$d(0/\cdot 0.8)$
۱	۵۰۰	۴/۵۱۴۸	۰/۰۷۸	۴/۷۳۷۳	۰/۰۴	—	—
۰/۱۱۷	۵۰۰	۳/۹۲۵۹	۰/۰۸۴	۴/۲۱۵۱۱	۰/۰۴۴	—	—
۰/۰۵۲۱	۵۰۰	۳/۶۶۳۶	۰/۰۷۴	۳/۹۱۵۳	۰/۰۰۶	—	—
۰/۰۱۸۷	۵۰۰	۳/۲۵۸۳	۰/۰۶	۳/۵۲۶۳	۰/۰۱	۴/۱۹۳۶۱	۰/۰۱

منابع

- [1] Adler, R.J., (1981), *The Geometry of Random Fields*, Wiley, New York.
- [2] Adler, R.J., (1999), *On Excursion Sets, Tube Formulae, and Maxima of Random Fields*.
- [3] Adler, R.J. and Hasofer, A.M., (1976), *Level Crossings for Random Fields*, Annals of Probability, 4, 1-12.
- [4] Anderson, T.W., (1984), *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis*, 2nd Edition, Wiley, New York.
- [5] Cressie, N. and Davis, R.W., (1981), *The Suprimum Distribution of Another Gaussian Process*, J. Appl. Prob. 18, 131-138.
- [6] Hasofer, A.M., (1978), *Upcrossings of Random Fields*, Supplement to Advances in Applied Probability, 10, 14-21.
- [7] Siegmund, D.O. and Worsley, K.J., (1995), *Testing for a Signal With Unkown Location and Scale in a Stationary Gaussian Random Field*, Annals of Statistics, 23, 608-639.
- [8] Shafie, Khalil, (1998), Ph.D. Thesis, *The Geometry of Gaussian Rotation Space Random Field*, Department of Mathematics and Statistics, McGill University, Montreal.
- [9] Worsley, K.J., Evans, A.C., Marrett, S. and Neelin, P., (1992), *A Three Dimensional Statistical Analysis for CBF Activation Studies in Human Brain*, Journal of Cerebral Blood Flow and Metabolism, 12, 900-918.
- [10] Worsley, K.J., Evans, A.C., Marrett, S. and Neelin, P., (1993), *Detecting Changes in Random Fields and Applications to Medical Images*, Journal of the American Statistical Association.
- [11] Worsley, K.J., (1994), *Local Maxima and the Expected Euler Characteristic of Excursion Sets of χ^2 , F and t Fields*, Advances in Applied Probability, 26, 13-42.
- [12] Worsley, K.J., (1996), *The Geometry of Random Images*, Chance, 9(1), 27-40.
- [13] Worsley, K.J., Marrett, S., Neelin, P.D. and Evans, A.C., (1996), *Searching Scale Space for Activation in PET Images*, Human Brain Mapping, 4, 74-90.
- [14] Worsley, K.J., (1998), *Testing for Signals with Unkown Location and Scale in a χ^2 Random Field, with an Application to fMRI*.

[۱۵] سمانه قادری، ۱۳۸۰، بررسی تقریب توزیع احتمال حداکثر یک میدان تصادفی با میانگین مشخصه اولیه، رساله کارشناسی ارشد، دانشگاه شهید

بهشتی تهران.