

فرایند وینر و انتگرال تصادفی نسبت به آن (انتگرال ایتو)^۱حمید رضا مصطفایی^۲

چکیده

در این مقاله فرایند وینر را معرفی می کنیم و پیوستگی و مشتق پذیری و انتگرال پذیری مسیرهای نمونه ای آن را بررسی کرده و انتگرال تصادفی نسبت به فرایند وینر را تعریف می کنیم و نشان می دهیم که با انتگرال ریمان استیلتیس متفاوت است.

مقدمه

در سالهای اخیر مدل سازی ریاضی به دلیل کاربرد وسیع آن در علوم، مورد توجه قرار گرفته است. قسمت عمده ای از این مدلها در قالب فرایندهای تصادفی می باشند. دو مدل ریاضی برای توصیف حرکت ذره ای که تحت بمباران مولکولی قرار گرفته است عبارت اند از:

(۱) فرایند وینر^۳(۲) معادلات دیفرانسیل تصادفی^۴ (SDEs)

در این مقاله، ابتدا در بخش اول کلیات مورد نیاز و مفاهیم مقدماتی مطرح شده است. در بخش دوم فرایند انتشار را تعریف می کنیم و فرایند وینر را نیز معرفی و آن را به عنوان یک حالت خاص از فرایند انتشار بیان کرده و آن را از نظر پیوستگی مشتق پذیر و انتگرال پذیری مورد بررسی قرار می دهیم و در بخش سوم انتگرال ایتو را معرفی و دستور ایتو را بدون اثبات بیان می کنیم.

۱. کلیات

۱-۱ تعریف - فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ و مجموعه اندیس گذار T را در نظر بگیرید. یک فرایند تصادفی $X = \{X(t); t \in T\}$ یک تابع $X: T \times \Omega \rightarrow R$ از دو متغیر است به طوری که برای هر $X(t) = X(t, \omega)$ ، $t \in T$ یک متغیر تصادفی و برای هر $X(\cdot, \omega): \Omega \rightarrow R$ ، $\omega \in \Omega$ یک تجسم یا مسیر نمونه ای از فرایند تصادفی نامیده می شود [۲].

۱-۲ رده بندی فرایندهای تصادفی - فرایندهای تصادفی بر اساس فضای وضعیت S و مجموعه اندیس گذار T و روابط متقابل بین $X(t)$ ها رده بندی می شوند [۷].

(۱) فضای وضعیت - فضایی است که مقادیر ممکن هر $X(t)$ در آن قرار دارد. اگر $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ باشد، فرایند را با مقدار صحیح یا یک فرایند با وضعیت گسسته نامیده و اگر $S = R$ باشد، آنگاه فرایند را با فضای وضعیت پیوسته می نامیم.

Winer Process^۳Stochastic Differential Equation (SDEs)^۴Ito's Integral^۱

^۲ عضو هیأت علمی واحد تهران شمال، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات

۱-۲ تعریف - فرایند مارکوف

فرایند $P(s, x; t, y)$ را یک فرایند انتشار می‌نامیم، اگر سرحد زیر برای هر $\varepsilon > 0$ و هر $s \geq 0$ و هر $x \in R$ موجود باشد: [۲]

$$\lim_{t \downarrow s} \frac{1}{t-s} \int_{|y-x| > \varepsilon} P(s, x; t, y) dy = 0 \quad (۲-۲)$$

$$\lim_{t \downarrow s} \frac{1}{t-s} \int_{|y-x| < \varepsilon} |y-x| P(s, x; t, y) dy = a(s, x) \quad (۳-۲)$$

$$\lim_{t \downarrow s} \frac{1}{t-s} \int_{|y-x| < \varepsilon} (y-x)^2 P(s, x; t, y) dy = b^2(s, x) \quad (۴-۲)$$

به طور کلی a و b توابع خوش تعریف هستند. حد (۲-۲) مانع از این می‌شود که فرایند انتشار، جهش‌های لحظه‌ای داشته باشد و کمیت‌های $a(s, x)$ و $b(s, x)$ را انباشتگی و ضریب انتشار در زمان s و مکان x از فرایند انتشار می‌نامیم.

$$a(s, x) = \lim_{t \downarrow s} \frac{1}{t-s} E(X(t) - X(s) | X(s) = x) \quad (۵-۲)$$

را نسبت لحظه‌ای تغییرات میانگین از فرایند $X(t)$ با $X(s) = x$ و همچنین مربع ضریب انتشار

$$b^2(s, x) = \quad (۶-۲)$$

$$\lim_{t \downarrow s} \frac{1}{t-s} E((X(t) - X(s))^2 | X(s) = x)$$

را نسبت لحظه‌ای از میانگین مربع تغییرات فرایند $X(t)$ با $X(s) = x$ می‌باشد.

۲-۲ قضیه پیوستگی کولموگوروف - [۶، ۵، ۱] فرض کنید

$X = \{X(t), t \in T\}$ یک فرایند تصادفی زمان پیوسته و α, β, c و h ثابت‌های مثبت باشند، به طوری که

$$\forall s, t, |t-s| \leq h$$

$$E(|X(t) - X(s)|^\alpha) \leq c|t-s|^{1+\beta}$$

آنگاه $X = \{X(t), t \in T\}$ با احتمال یک دارای مسیرهای نمونه‌ای پیوسته است.

(۲) مجموعه اندیس گذار T - اگر $T = \{0, 1, 2, \dots\}$ باشد، آنگاه

فرایند X را یک فرایند زمان گسسته و اگر $T = [0, \infty)$ باشد، آنگاه فرایند X را یک فرایند زمان پیوسته می‌نامیم.

(۳) در ذیل چند نوع کلاسیک از فرایندهای تصادفی که با روابط مختلف بین $X(t)$ مشخص می‌شوند، را معرفی می‌نماییم.

۱-۳ فرایند با نمونه‌های مستقل - هرگاه متغیرهای تصادفی $X(t_1) - X(t_0), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ به ازای جمیع مقادیر $t_1, \dots, t_n$ که $t_1 < \dots < t_n$ مستقل باشند، آنگاه فرایند را با نمونه‌های مستقل می‌نامیم.

۲-۳ تعریف - فرایند تصادفی X را اکیدا ایستا می‌گوییم هرگاه توابع توزیع مشترک خانواده‌های $(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n))$ و $(X(t_1+h), X(t_2+h), \dots, X(t_n+h))$ از متغیرهای تصادفی به ازای $h > 0$ و $t_1, \dots, t_n \in T$ یکسان باشد. همچنین فرایند X را وسیع ایستا می‌نامیم اگر دارای گشتاور مرتبه دوم متناهی و $\text{cov}(X(t), X(t+h))$ فقط تابعی از h باشد.

۳-۳ فرایند مارکوف - فرایند تصادفی X را با این خاصیت که $X(s)$ به ازای $s > t$ به مقادیر $X(u)$ که $u < t$ بستگی نداشته باشد، فرایند مارکوف می‌نامیم.

$$\forall t_1 < \dots < t_n < t:$$

$$\Pr(a \leq X(t) \leq b | X(t_1) = x_1, \dots, X(t_n) = x_n) =$$

$$\Pr(a \leq X(t) \leq b | X(t_n) = x_n)$$

۲. فرایند انتشار و فرایند وینر

فرض کنید $X = \{X(t); t \in [0, \infty)\}$ یک فرایند مارکوف با تابع احتمال تغییر وضعیت

$$P(s, x; t, B) = P(X(t) \in B | X(s) = x) \quad ; s < t$$

باشد که $P(s, x; t, \cdot)$ تابع احتمال روی δ -میدان بورل $\mathcal{B}$ از زیر مجموعه‌های بورل R می‌باشد چگالی تغییر وضعیت فرایند نامیده و داریم:

$$\forall B \in \mathcal{B}; P(s, x; t, B) = \int_B P(s, x; t, y) dy \quad (۱-۲)$$

وینر با پارامتر σ^2 باشد و f و g توابع پیوسته مشتق پذیر روی فاصله $[a, b]$ باشند، آنگاه داریم:

$$E \left(\int_a^b f'(t)(W(t) - W(a))dt \right) \times \left(\int_a^b g'(t)(W(t) - W(a))dt \right) = \sigma^2 \int_a^b (f(t) - f(b))(g(t) - g(b))dt.$$

مسئله دوم - فرایند وینر در هیچ نقطه ای مشتق پذیر نیست. [۸،۷]

روش اول - فرض کنید $W = \{W(t), t \geq 0\}$ یک فرایند وینر با پارامتر σ^2 باشد، لذا

$$E \left(\frac{W(t+h) - W(t)}{h} \right)^2 = \frac{\sigma^2}{|h|}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} E \left(\frac{W(t+h) - W(t)}{h} \right)^2 = \infty \quad (۷-۲)$$

چنانچه فرایند وینر مشتق پذیر می بود، آنگاه

$$\lim_{h \rightarrow 0} E \left(\frac{W(t+h) - W(t)}{h} - W'(t) \right)^2 = 0$$

در نتیجه

$$\lim_{h \rightarrow 0} E \left(\frac{W(t+h) - W(t)}{h} \right)^2 = E(W'(t))^2 \quad (۸-۲)$$

که این با رابطه (۷-۲) متناقض است.

روش دوم - در این روش ابتدا قانون مکرر لگاریتم^۳ را بدون اثبات بیان می کنیم، سپس مشتق پذیر نبودن فرایند وینر را به کمک این دو اثبات می کنیم.

۵-۲ قانون مکرر لگاریتم - [۷] شکل اصلی قانون مکرر لگاریتم برای فرایند وینر می گوید که:

$$\limsup_{t \downarrow 0} \frac{W(t)}{\sqrt{2t \log \log (1/t)}} = 1 \quad (۹-۲)$$

LIL: Law of the Integrated Logarithm^۴

۳-۲ تعریف فرایند وینر - فرایند تصادفی $\{W(t); t \geq 0\}$ را فرایند وینر می گوئیم هرگاه:

- (i) هر نمو $W(t+s) - W(s)$ دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس $\sigma^2 t$ باشد که σ یک پارامتر ثابت است.
- (ii) به ازای هر جفت فاصله زمانی از هم جدا مثلاً $[t_1, t_2]$ و $[t_3, t_4]$ که $t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$ ، نموهای $W(t_2) - W(t_1)$ و $W(t_4) - W(t_3)$ متغیرهای تصادفی مستقل با توزیعهای داده شده در (۱) باشند و به همین ترتیب در مورد n فاصله زمانی از هم جدا که n عدد صحیح مثبت دلخواه می باشند.
- (iii) $W(0) = 0$ و $W(t)$ در $t = 0$ پیوسته باشد.

معمولاً $\sigma^2 = 1$ فرض می شود و فرایند را فرایند وینر استاندارد می نامیم.

مثال - فرایند وینر استاندارد یک فرایند انتشار با انباشتگی $a(s, x) = 0$ و ضریب انتشار $b(s, x) = 1$ می باشد:

$$a(s, x) = \lim_{t \downarrow s} \frac{1}{t-s} E(W(t) - W(s) | W(s) = x)$$

$$= \lim_{t \downarrow s} \frac{1}{t-s} E(W(t) - W(s)) = 0$$

$$b^*(s, x) = \lim_{t \downarrow s} \frac{1}{t-s} E((W(t) - W(s))^2 | W(s) = x)$$

$$= \lim_{t \downarrow s} \frac{1}{t-s} E(W(t) - W(s))^2$$

$$= \lim_{t \downarrow s} \frac{1}{t-s} (t-s) = 1$$

سه مسئله اساسی درباره فرایند وینر

مسئله اول - فرایند وینر دارای مسیرهای نمونه ای پیوسته است. اگر $W = \{W(t), t \geq 0\}$ یک فرایند وینر استاندارد باشد، آنگاه داریم:

$$W(t) - W(s) \sim N(0, t-s)$$

$$\forall t > s \geq 0; \quad E(|W(t) - W(s)|^2) = 2|t-s|^2$$

لذا بنابر قضیه پیوستگی کولموگروف، فرایند وینر با احتمال یک دارای مسیرهای نمونه ای پیوسته است.

۴-۲ قضیه - [۸] فرض کنید $W = \{W(t), t \geq 0\}$ یک فرایند



$$\varepsilon^h(t) = \frac{W(t+h) - W(t)}{h}$$

باشد. اگر $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon^h(t) = \varepsilon(t)$ ، $h \rightarrow 0$ را نوفه سفید (مشتق فرایند وینر) می‌نامیم. ثابت شد فرایند وینر در هیچ نقطه‌ای مشتق پذیر نیست، لذا نوفه سفید به معنی یک «فرایند تصادفی» نبوده و قابل تجسم فیزیکی هم نمی‌باشد.

مسألة سوم - انتگرال گیری از فرایند وینر [۸] - فرض می‌کنیم
 $W = \{W(t), t \geq 0\}$ یک فرایند وینر با پارامتر σ^2 و f تابعی مشتق پذیر روی فاصله $[a, b]$ باشد به طوری که a و b متناهی باشند. از آنجایی که فرایند وینر مشتق پذیر نمی‌باشد، لذا انتگرالهای زیر به مفهوم معمولی وجود ندارند:

$$\int_a^b f(t) dW(t) \quad (1)$$

$$\int_a^b f(t) W'(t) dt \quad (2)$$

اما انتگرال (۲) را با شرط این که حد وجود داشته باشد، به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

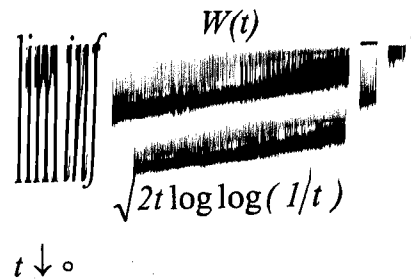
$$\int_a^b f(t) W'(t) dt = \lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b f(t) \left[\frac{W(t+h) - W(t)}{h} \right] dt$$

برای اطمینان از موجود بودن حد و محاسبه آن داریم:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) \left[\frac{W(t+h) - W(t)}{h} \right] dt &= \\ &= \int_a^b f(t) \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{h} \int_t^{t+h} W(s) ds \right) dt \end{aligned}$$

در نتیجه با انتگرال گیری جزء به جزء، سمت راست رابطه بالا برابر است با:

$$= \left[f(t) \frac{1}{h} \int_t^{t+h} W(s) ds \right]_a^b - \int_a^b f'(t) \left(\frac{1}{h} \int_t^{t+h} W(s) ds \right) dt$$



پیشامدهایی با احتمال یک هستند.

۲-۱ - [۷] فرض کنید که $W = \{W(t), t \geq 0\}$ یک فرایند وینر باشد، آنگاه برای هر $s \geq 0$ فرایند $W = \{W(t+s) - W(s), s \geq 0\}$ نیز یک فرایند وینر می‌باشد.

حالت نشان می‌دهیم که فرایند $W = \{W(t+s) - W(s), s \geq 0\}$ در $t = 0$ مشتق پذیر نیست.
 بنابر تعریف $\limsup$ و $\liminf$ داریم:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists t_n \downarrow 0;$$

$$\frac{W(t_n + s) - W(s)}{\sqrt{t_n \log \log(1/t_n)}} > (1 - \varepsilon) \Rightarrow$$

$$\frac{W(t_n + s) - W(s)}{t_n} > (1 - \varepsilon) \sqrt{\frac{2 \log \log(1/t_n)}{t_n}} \quad (10.2)$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists t'_n \downarrow 0;$$

$$\frac{W(t'_n + s) - W(s)}{\sqrt{t'_n \log \log(1/t'_n)}} \leq (-1 + \varepsilon)$$

حال اگر $n \rightarrow \infty$ ، آنگاه $t_n, t'_n \downarrow 0$ و لذا

$$\sqrt{\frac{2 \log \log(1/t_n)}{t_n}} \rightarrow \infty$$

در نتیجه

$$\frac{W(t_n + s) - W(s)}{t_n} \rightarrow \infty$$

و

$$\frac{W(t'_n + s) - W(s)}{t'_n} \rightarrow -\infty$$

لذا مسیرهای نمونه‌ای از $W(t)$ با احتمال یک، تابع مشتق پذیر از زمان نمی‌باشند. لذا تابعهای نمونه‌ای از فرایند وینر با احتمال یک در هیچ نقطه‌ای مشتق پذیر نیستند.

۲-۲ تعریف نوفه سفید (مشتق فرایند وینر) - فرض می‌کنیم
 $W = \{W(t), t \geq 0\}$ یک فرایند وینر استاندارد باشد و برای $h > 0$

از طرفی فرایند وینر دارای توابع نمونه‌ای پیوسته می‌باشد. لذا طرف راست رابطه بالا چنانچه $h \rightarrow 0$ به

$$f(t)W(t) \Big|_a^b - \int_a^b f'(t)W(t)dt$$

همگرا می‌باشد. اگر $h \rightarrow 0$ آنگاه $\int_a^b f(t)dW(t)$ را به صورت زیر

تعریف می‌کنیم:

$$\int_a^b f(t)dW(t) = f(b)W(b) - f(a)W(a) - \int_a^b f'(t)W(t)dt$$

۳. انتگرال ایتو

در این بخش انتگرال تصادفی (ایتو) را تعریف کرده و تمایز آن را با انتگرال گیری معمولی و دستور ایتو بیان می‌کنیم. برای این منظور معادله دیفرانسیل معمولی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$dx = a(t, x)$$

اگر $x(t) = x(t; t_0, x_0)$ یک جواب از این معادله دیفرانسیل باشد که در شرط اولیه $x(t_0) = x_0$ صدق کند، آنگاه با انتگرال گیری از طرفین داریم:

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t a(s, x(s))ds \quad (۱-۳)$$

۱-۳ تعریف - اگر معادله دیفرانسیل (۱-۳) توسط یک فرایند تصادفی مختل شود، معادله دیفرانسیل حاصل را معادله دیفرانسیل تصادفی می‌نامیم. فرض کنید ε_t یک فرایند تصادفی باشد و

$$dX(t) = a(t, X(t))dt + b(t, X(t))\varepsilon_t dt \quad (۲-۳)$$

در این صورت $X = \{X(t), t \geq 0\}$ یک فرایند تصادفی و معادله (۲-۳) یک معادله دیفرانسیل تصادفی است که دو فرایند تصادفی $\varepsilon = \{\varepsilon_t, t \geq 0\}$ و $X = \{X(t), t \geq 0\}$ را به هم مربوط می‌سازد. حال اگر این فرایند اخلاص کننده «ناشی از بمباران مولکولی» باشد، آنگاه با استدلال فیزیکی می‌توان نتیجه گرفت که ε_t به صورت نوفه سفید (مشتق فرایند وینر) با یک پارامتر مناسب است [۲].

با انتگرال گیری از معادله (۲-۳) داریم:

$$X(t, w) = X(t_0, w) + \int_{t_0}^t a(s, X(s, w))ds + \int_{t_0}^t b(s, X(s, w))\varepsilon_s(w)ds$$

وقتی

$$\varepsilon_s(w) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{W(t+s) - W(t)}{s}$$

در نتیجه

$$X(t, w) = X(t_0, w) + \int_{t_0}^t a(s, X(s, w))ds + \int_{t_0}^t b(s, X(s, w))dW_s(w) \quad (۳-۳)$$

اما می‌دانیم که فرایند $W(s, w)$ مشتق پذیر نیست و $\varepsilon_s(w)$ به عنوان یک فرایند تصادفی از s وجود خارجی ندارد. لذا انتگرال دوم یک انتگرال معمولی نیست.

۲-۳ انتگرال ایتو - برای $b(t, x) \equiv b$ انتظار داریم که انتگرال دوم در (۳-۳) را اگر بتوانیم تعریف کنیم، مساوی $b(W(t) - W(t_0))$ شود. این نقطه شروع برای تعریف ایتو از یک انتگرال تصادفی است و انتگرال از یک تابع f روی فاصله زمانی واحد $0 \leq t \leq 1$ را با

$$I(f)(w) = \int_0^1 f(s, w)dW_s(w) \quad (۴-۳)$$

نشان داده و در نهایت آن را برای یک فاصله زمانی دلخواه تعمیم می‌دهیم.

۳-۳ تعریف - اگر $[t_i, t_{i+1}]$ را i -امین فاصله زمانی فرض کنیم، آنگاه انتگرالی را که با انتخاب نقاط ابتدای بازه (انتهای چپ فاصله زمانی) $t_j^* = t_j$ تعریف شود، انتگرال ایتو نامیده و با نماد

$$I(f)(w) = \int_0^T f(s, w)dW_s(w) \quad (۵-۳)$$

نمایش می‌دهیم و انتگرالی را که با انتخاب نقاط میانی بازه $t_j^* = \frac{1}{2}(t_j + t_{j+1})$ تعریف می‌شود، انتگرال استراتنویچ^۷ نامیده و به شکل زیر نشان می‌دهیم:

^۷ Stratonovich

۳-۶ قضیه - [۲ و ۱] برای هر $f, g \in S_T^Y$ و $\alpha, \beta \in R$ انتگرال تصادفی ایتو در خواص ذیل صدق می کند:

$$(1) \quad I(f) \text{ نسبت به } \mathcal{F}_t \text{ اندازه پذیر باشد.}$$

$$(2) \quad E(I(f)) = 0$$

$$(3) \quad E(I(f)^2) = \int_0^T E(f(t, \cdot))^2 dt$$

$$(4) \quad I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) + \beta I(g) \text{ a.s.}$$

۳-۷ تعریف - می گویم $f \in \mathcal{L}_T^w$ است اگر f نسبت به $\mathcal{F}_t$ اندازه پذیر و $f(t, \cdot)$ برای هر $t \in [0, T]$ نسبت به $\mathcal{F}_t$ اندازه پذیر و با احتمال یک

$$\int_0^T f^2(s, w) ds < \infty$$

برقرار باشد. در نتیجه $\mathcal{L}_T^Y \subset \mathcal{L}_T^w$ می باشد.

$f_n \in \mathcal{L}_T^w$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$f_n(t, w) = \begin{cases} f(t, w) & ; \int_0^T f^2(s, w) ds \leq n \\ 0 & ; \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$

ثابت می شود که انتگرالهای تصادفی ایتو $I(f_n)$ از f_n برای $0 \leq t \leq T$ خوش تعریف و با احتمال یک به $I(f)$ از $\mathcal{L}_T^w$ روی فاصله $0 \leq t \leq T$ همگرا هستند.

فرض کنید a و b دو تابع $a, b \in \mathcal{L}_T^w$ باشند به طوری که a و b در خاصیتهای مورد نیاز از یک تابع در $\mathcal{L}_T^w$ به جز انتگرال پذیری صدق کنند. معادله دیفرانسیل تصادفی

$$dX_t(w) = a(t, w)dt + b(t, w)dW_t(w)$$

را در نظر می گیریم. برای هر $0 \leq s \leq t \leq T$ داریم:

$$X_t(w) - X_s(w) =$$

$$\int_s^t a(u, w)du + \int_s^t b(u, w)dW_u(w) \text{ a.s. } (3.3)$$

$$\int_0^T f(s, w) \circ dW_s(w)$$

تکته - در انتگرال تصادفی (ایتو) برخلاف انتگرال ریمان - استیلتیس (معمولی) انتخاب نقاط از افراز، دلخواه نیست و با انتخاب نقاط مختلف، نتایج متفاوتی به دست می آید. در این بخش وجود انتگرال

$$\int_0^t f(s, w)dw_s(w)$$

را برای دسته وسیعی از توابع $R \rightarrow [0, T] \times \Omega \rightarrow f$ وقتی که $W = \{W(t), t \in T\}$ یک فرایند وینر است، بررسی می کنیم. فرض کنید $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ یک فضای احتمال و $W = \{W(t), t \geq 0\}$ فرایند وینر و $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ خانواده صعودی از δ -میدانهای $\mathcal{F}$ باشند، به طوری که $W(t)$ نسبت به $\mathcal{F}_t$ اندازه پذیر باشد و برای هر $0 \leq s \leq t$ داشته باشیم:

$$E(W(t) - W(s) | W(s)) = 0 \text{ a.s.}$$

$$E(W(t) | \mathcal{F}_s) = 0$$

۳-۴ تعریف - برای $0 < T < \infty$ ، $\mathcal{L}_T^Y$ را دسته همه توابع $R \rightarrow [0, T] \times \Omega \rightarrow f$ تعریف می کنیم به طوری که در شرایط ذیل صدق کنند:

$$(1) \quad f \text{ نسبت به } \mathcal{F} \times \mathcal{L} \text{ اندازه پذیر باشد.}$$

$$(2) \quad \int_0^T E(f(t, \cdot))^2 dt < \infty$$

$$(3) \quad E(f(t, \cdot))^2 < \infty ; 0 \leq t \leq T$$

$$(4) \quad \text{برای هر } f(t, \cdot), 0 \leq t \leq T \text{ نسبت به } \mathcal{F}_t \text{ اندازه پذیر باشند.}$$

۳-۵ تعریف - S_T^Y را زیر مجموعه ای از توابع پله ای در $\mathcal{L}_T^Y$ تعریف می کنیم،

$$S_T^Y = \mathcal{P}(\{f(\mathcal{L}_T^Y | f(t, w) = f_j(w), t_j \leq t < t_{j+1}; j = 1, \dots, n, \text{a.s.}\})$$

اگر انتگرال دوم یک انتگرال ایتو می باشد. انتگرال ایتو برای انتگرالده

$$u(t, x) = \exp\left(x - \frac{1}{2} \int_0^t b_u^2 du\right)$$

باشد، آنگاه $dY_t = b_t Y_t dW_t$ می باشد.

مثال - فرض کنید $dX_t = b_t dW_t$. با استفاده از دستور ایتو نشان

می دهیم که برای هر $n \geq 1$ داریم:

$$d(X_t^{2n}) = n(2n-1)b_t^2 X_t^{2n-2} dt + 2nb_t X_t^{2n-1} dW_t$$

و $d(W_t^{2n})$ برای $n \geq 1$ برابر خواهد بود با:

$$Y_t = u(t, X_t), \quad u(t, x) = x^{2n}, \quad dX_t = b_t dW_t$$

$$u_t = 0, \quad u_x(t, x) = 2nx^{2n-1}$$

$$u_{xx}(t, x) = 2n(2n-1)x^{2n-2}$$

$$d(X_t^{2n}) = dY_t = \frac{1}{2} b_t^2 u_{xx} dt + b_t u_x dW_t$$

$$= n(2n-1)b_t^2 X_t^{2n-2} dt + 2nb_t X_t^{2n-1} dW_t$$

حال اگر $b_t \equiv 1$ ، آنگاه $X_t \equiv W_t$ و لذا

$$d(W_t^{2n}) = n(2n-1)W_t^{2n-2} dt + 2nW_t^{2n-1} dW_t$$

و سرانجام با فرض $n=1$ خواهیم داشت:

$$d(W_t^2) = (2 \times 1 - 1)W_t^{2 \times 1 - 2} dt + 2 \times 1 W_t^{2 \times 1 - 1} dW_t$$

$$= dt + 2W_t dW_t$$

با انتگرال گیری از طرفین رابطه فوق داریم:

$$W_t^2 = \int_0^t dt + 2 \int_0^t W_s dW_s$$

در نتیجه

$$\int_0^t W_s dW_s = \frac{1}{2} W_t^2 - \frac{t}{2}$$

$f \in \mathcal{L}_T^w$ را همانند حد از انتگرالهای ایتو برای انتگرالده های در

$\mathcal{L}_T^2$ تعریف می کنیم. همچنین فرض می کنیم که $X(t)$ اندازه پذیر با

مسیرهای نمونه ای با احتمال یک پیوسته باشد، وقتی که a و b بسته به t

نیستند، آنها متغیرهای تصادفی می باشند که نسبت به $\mathcal{F}_0$ اندازه پذیر و

نموهای $X(t) - X(s)$ روی فاصله های جدا از هم مستقلند و

$$E(X(t) - X(s)) = E(a)(t-s)$$

$$\text{Var}(X(t) - X(s)) = E(b^2)(t-s)$$

۹-۳- لم - [۴و۵] فرض کنید $u: [0, T] \times R \rightarrow R$ دارای

مشقات جزئی پیوسته $\frac{\partial u}{\partial x}$ ، $\frac{\partial u}{\partial t}$ و $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ باشد و برای

هر $t, t + \Delta t \in [0, T]$ و $x, x + \Delta x \in R$ ثابتهای $0 \leq \alpha \leq 1$ و $0 \leq \beta \leq 1$ وجود دارد به طوری که

$$u(t + \Delta t, x + \Delta x) - u(t, x) = \frac{\partial u}{\partial t}(t + \alpha \Delta t, x) \Delta t$$

$$+ \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x + \beta \Delta x) (\Delta x)^2$$

۱۰-۳ قضیه دستور ایتو - [۴و۵] فرض کنید $Y_t = u(t, X_t)$ ،

$0 \leq t \leq T$ ، باشد به طوری که u در لم ۹-۳ و X_t در معادله (۶-۳)

با $a, b \in \mathcal{L}_T^w$ صدق کنند. آنگاه برای هر $0 \leq s \leq t \leq T$ داریم:

$$Y_t - Y_s = \int_s^t \left(\frac{\partial u}{\partial t}(u, X_u) + a_u \frac{\partial u}{\partial x}(u, X_u) + \right.$$

$$\left. \frac{1}{2} b_u^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(u, X_u) \right) du$$

$$+ \int_s^t b_u \frac{\partial u}{\partial x}(u, X_u) dW_u \quad \text{a.s.}$$

مثال - فرض کنید $dX_t = b_t dW_t$ و $u(t, x) = e^x$. از دستور

ایتو داریم:

$$dY_t = \frac{1}{2} b_t^2 Y_t dt + b_t Y_t dW_t, \quad Y_t = u(t, X_t)$$

مراجع

- [1] Karlin, S. and Taylor, H. M., (1981), *A Second Course in Stochastic Process*, Academic Press.
- [2] Kloeden, P.,E. and Platern E., (1995), *Numerical Solution of Stochastic Differential Equation*, Springer.
- [3] Kloeden, P.,E., Platern, E., and Shurz, H., (1999), *Numerical Solution of SDEs through Computer Experiment*, Springer.
- [4] Mao, X., (1997), *Stochastic Differential Equation and Application*.
- [5] Milstein, G.N., (1995), *Numerical Integration of Stochastic Differential Equation*, Kluwer Academic Publishers.
- [6] Strook, D.W. and Varadhan, S.R.S., (1977), *Multidimensional Diffusion*, Springer.

[۷] ساموئل کارلین، هروارد ام. تیلور، نخستین درس در فرایندهای تصادفی، ترجمه دکتر عالم زاده و دکتر پاشا، ۱۳۷۳.

[۸] هوئل، پورت، استون، آشنایی با فرایندهای تصادفی، ترجمه دکتر افقهی، ۱۳۷۶.

[۹] مصطفایی، حمید رضا، معادلات دیفرانسیل تصادفی، پایان نامه کارشناسی ارشد، گروه آمار، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران شمال، استاد راهنما: دکتر پاشا، شهریور ۱۳۷۹.

اساس علم مشاهده، اثبات، استنتاج و تعمیم است.