

درجات در درخت های بازگشتی تصادفی k -مینیمال برچسب

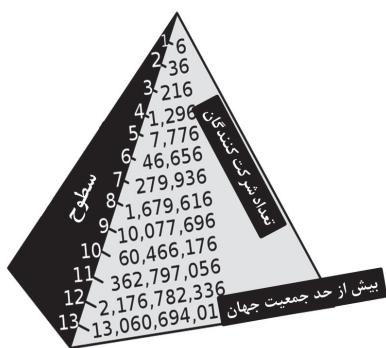
مهری جوانیان^۱

چکیده:

در این مقاله به شرح محاسبه توزیع حدی درجه گره ها در نوعی درخت تصادفی به نام درخت بازگشتی تصادفی k -مینیمال برچسب، وقتی که اندازه آن درخت به اندازه کافی بزرگ باشد، پرداخته شده است. درجه خارجی یک گره در درخت بازگشتی تصادفی k -مینیمال برچسب، برابر با تعداد مشتریانی است که آن گره بدون واسطه در یک طرح هرمی بازاریابی جذب می کند.

واژه های کلیدی: درخت، درخت بازگشتی تصادفی، توزیع حدی.

۱ ساختار های درختی متناظر با شرکت نوع شرکت ها وضع شده است.

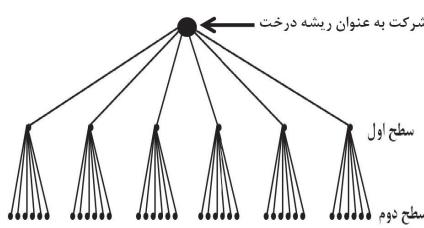


شکل ۱: افزایش هرمی شکل اعضای شرکت

های هرمی

شاید ساختار شرکت های هرمی مثل گولد کوئست را دیده باشید، هسته کار به این شکل است که شما با پرداخت مبلغی (با عنوان) عضو شرکت شده و موظفید افرادی را به عضویت شرکت درآورید و این روند ادامه پیدا کرده و شما به ازای پولی که افراد زیرمجموعه به شرکت پرداخت می کنند پورسانی را به عنوان سرگروه دریافت خواهید کرد.

چگونگی الحال هر عضو به یک شرکت هرمی را می توان با استفاده از یک درخت که نوعی گراف است، ترسیم کرد. به طور مثال در شکل (۲) شرکت به عنوان ریشه درخت و اعضای دیگر به عنوان گره های درخت در نظر گرفته شده است. ابتدا ۶ عضو (مشتری بی واسطه برای شرکت) به وسیله ۶ گره به ریشه متصل شده اند و الى آخر.



شکل ۲: نحوه عضویت در شرکت هرمی

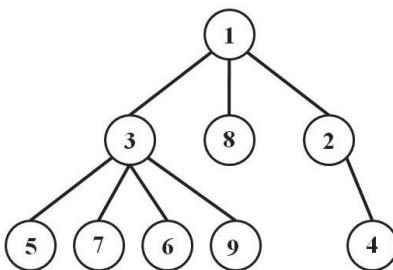
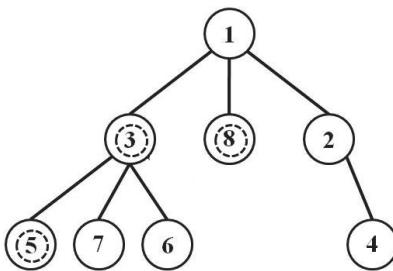
حال شرکت هرمی را در نظر بگیرید که متناظر با درخت شکل ۳، به نام درخت بازگشتی، باشد. ابتدا شرکت هرمی به عنوان گره

به طور مثال در شکل ۱ ملاحظه می کنید که ابتدا ۶ نفر عضو شرکت شده اند و هر یک برای دریافت پورسانت نیاز دارند که ۶ فرد جدید را به عضویت شرکت درآورند. یعنی در سطح دوم 6^2 عضو جدید برای رشد نیاز است. در سطح سوم 6^3 عضو جدید، پس از ده سطح 6^{10} عضو جدید و پس از سیزده سطح به بیش از سیزده میلیارد عضو جدید (6^{13}) یعنی بیش از کل جمعیت کره زمین برای رشد نیاز است. یعنی اعضای شرکت در سطح دوازده نمی توانند حداقل یک بار پورسانت دریافت کنند و حتی پولی که برای عضو شدن به شرکت پرداخته اند را به دست آورند. تنها چند نفر از اعضای سطوح بالای شرکت که زودتر عضو شده اند به درآمد کلانی می رسند.

به این ترتیب طرح هرمی نوعی کلاهبرداری است که در بسیاری از کشورها از جمله ایران، ایالات متحده آمریکا، کانادا و کشورهای اروپایی و آسیایی قوانینی بر ضد فعالیت در عضو گیری برای این

^۱گروه آمار دانشگاه زنجان

گره با کوچکترین برچسب در بین k گره انتخابی، متصل می کنیم. درخت T_n با اندازه n ($n \geq k$) را درخت بازگشته تصادفی k -مینیمال برچسب با اندازه n می نامند. برای مثال در شکل ۴ سه گره $3, 5$ و 8 را انتخاب کرده و گره 9 را به کوچکترین برچسب در بین آنها یعنی 3 متصل نموده ایم. هرگاه $1 = k$ باشد، درخت بازگشته یکنواخت حاصل می شود.



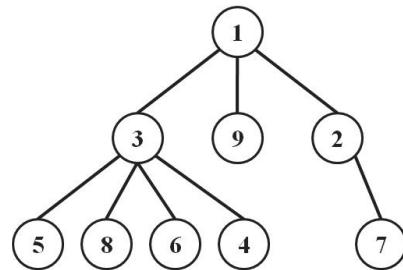
شکل ۴: نمایش اتصال گره 9 به درخت بازگشته 3 -مینیمال برچسب

در [۳]، توزیع حدی درجات برای درخت بازگشته تصادفی k -مینیمال برچسب به دست آمده است. می توان در [۳] مشاهده کرد که اگر انتخاب به تصادف k گره در تعریف درخت بازگشته تصادفی k -مینیمال برچسب، با جایگذاری نیز انجام شود، رفتار درخت به ازای n -های بزرگ تغییری نمی کند.

۳ توزیع حدی درجات

فرض کنید $D_{j,n-1}$ درجه گره j در T_n درختی بازگشته تصادفی k -مینیمال برچسب با اندازه n باشد. برای اتصال گره 1 ام به T_n ، ابتدا k گره به تصادف و بدون جایگذاری انتخاب می کنیم. اگر گره ز دارای مینیمم برچسب در بین k گره انتخاب شده از T_n باشد آنگاه گره $1+n$ ام به گره j متصل می شود و درجه گره j یک واحد افزایش می یابد و در غیر این صورت درجه گره j

ریشه درخت بازگشته با برچسب 1 در نظر گرفته می شود. سپس شرکت اولین عضو خود را پیدا می کند؛ یعنی این عضو که گره دوم درخت بازگشته با برچسب 2 است به گره ریشه متصل می شود. اینک شرکت و اولین عضو آن هر دو با شانس برابر، به رقابت برای پیدا کردن عضو می پردازند. عضو بعدی یعنی گره سوم درخت با احتمال برابر، توسط شرکت و یا گره دوم، به عضویت شرکت درآورده می شود. به همین ترتیب اعضای بعدی به این شرکت می پونددند. تعداد گره های درخت بازگشته شکل ۳ برابر با 9 است که به آن اندازه درخت گویند. عضو شونده سوم (گره با برچسب 3 در شکل ۳، چهار نفر را به عضویت شرکت درآورده است؛ یعنی گره سوم دارای درجه چهار است. بنابراین درجه گره n -ام برابر است با تعداد اعضایی که بدون واسطه به وسیله واردشونده n -ام، به عضویت شرکت درآورده شده اند. درجه گره متناسب با میزان پورسانت آن گره است. یعنی هر چه قدر درجه گره بزرگتر باشد، میزان پورسانت آن گره بیشتر است. هرگاه اندازه درخت خیلی بزرگ شود، بررسی درجه گره n -ام از اهمیت زیادی برخوردار است که در [۲] به آن پرداخته شده است. در [۱] می توان نتایجی راجع به پارامترهای یک درخت بازگشته را ملاحظه کرد. اگر در هر مرحله رشد درخت، گره جدید با شانس برابر به یکی از گره های درخت متصل شود، درخت حاصل را درخت بازگشته یکنواخت می نامند.



شکل ۵: درخت بازگشته با اندازه 9

۲ درخت بازگشته تصادفی k -مینیمال برچسب

درخت بازگشته دلخواه با اندازه k , T_k , را در نظر بگیرید. به ازای هر $1 \leq i \leq k$ گره به تصادف و بدون جایگذاری از بین $1 - k + i$ گره درخت T_{k+i-1} , انتخاب کرده و گره با برچسب $i + k$ را به

$$\begin{aligned} \frac{(i-j-1)_{k-1}}{(i)_k} &= \frac{(i-j-1)\cdots(i-j-k+1)}{i\cdots(i-k+1)} \\ &= \frac{(i-j-1)^{k-1}(1+O(\frac{1}{i-j-1}))}{i^k(1+O(\frac{1}{i}))} \\ &= \frac{1}{i}\left(1+O(\frac{j}{i})\right)\left(1+O(\frac{1}{i-j-1})\right) \\ &= \frac{1}{i} + O(\frac{j}{i^2}), \end{aligned} \quad (2)$$

و با جمع کردن بر روی $i, j+k \leq i \leq n$ از طرفین تساوی (۲)

داریم

$$\sum_{i=j+k}^n \left(\frac{1}{i} + O\left(\frac{j}{i^2}\right) \right) = H_n - H_{j+k-1} + O(1),$$

که در آن $H_n = \sum_{m=1}^n \frac{1}{m} \sim \ln n$

بنابراین به ازای هر u ثابت داریم

$$\begin{aligned} \phi_{j,n}\left(\frac{u}{\sqrt{\ln \frac{n}{j}}}\right) &= \exp\left(D_{j,j+k-1} \frac{u}{\sqrt{\ln \frac{n}{j}}} + k(H_n - H_{j+k} + O(1))(e^{\frac{u}{\sqrt{\ln \frac{n}{j}}}} - 1)\right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=j+k}^n O\left(\frac{(i-j-1)_{k-1}}{(i)_k} (e^{\frac{u}{\sqrt{\ln \frac{n}{j}}}} - 1)^2\right)\right) \\ &= \exp\left(D_{j,j+k-1} \frac{u}{\sqrt{\ln \frac{n}{j}}} + (k \ln \frac{n}{j} + O(1)) \left[1 + \frac{u}{\sqrt{\ln \frac{n}{j}}} + O\left(\frac{1}{\ln^{\frac{3}{2}} \frac{n}{j}}\right) \right] - 1\right) \\ &\quad + O\left(\left(1 + \frac{u}{\ln \frac{n}{j}} + \frac{2 \ln \frac{n}{j}}{u^2} + O\left(\frac{1}{\ln^{\frac{3}{2}} \frac{n}{j}}\right)\right)^2 - 1\right). \end{aligned}$$

در نتیجه داریم

$$\begin{aligned} \phi_{j,n}\left(\frac{u}{\sqrt{\ln \frac{n}{j}}}\right) \exp\left(-ku\sqrt{\ln \frac{n}{j}}\right) \\ = \exp\left(\frac{1}{2}ku^2 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\ln \frac{n}{j}}}\right)\right) \rightarrow e^{\frac{k}{2}u^2}. \end{aligned}$$

پس به ازای $j = o(n)$ داریم

$$\frac{D_{j,n} - k \ln \frac{n}{j}}{\sqrt{\ln \frac{n}{j}}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, k),$$

که در آن $\xrightarrow{\mathcal{L}}$ علامت همگرایی در توزیع را نشان می‌دهد. حال اگر $j = c_n n$, به طوری که $c_n \rightarrow c$ و $c \in (0, 1]$, آنگاه اولًاً $D_{j,j+k-1} = 1$, ثانیاً طبق (۱)، (۲)، و تقریب استرلینگ برای تابع

گاما (Γ) داریم

$$\phi_{j,n}(t) \sim e^t \prod_{i=j+k}^n \left(1 + \frac{k}{i}(e^t - 1)\right)$$

تغییری نمی‌کند. بنابراین درجه گره j , با احتمالی برابر با $\binom{n-j-1}{k-1} / \binom{n}{k}$ یک واحد افزایش می‌یابد و داریم

$$\begin{aligned} D_{j,n} &= D_{j,n-1} + B\left(\binom{n-j-1}{k-1} / \binom{n}{k}\right) \\ &= D_{j,n-1} + B\left(k \frac{(n-j-1)_{k-1}}{(n)_k}\right), \end{aligned}$$

که در آن $B(p)$ متغیر تصادفی برنولی با احتمال پیروزی p است،

$$(x)_r = x(x-1)\cdots(x-r+1),$$

و $D_{j,n-1}$ از متغیر تصادفی برنولی مستقل است. بنابراین به روش بازگشتی، برای $n \geq j+k$ داریم

$$D_{j,n} = D_{j,j+k-1} + \sum_{i=j+k}^n B\left(k \frac{(i-j-1)_{k-1}}{(i)_k}\right),$$

با شرایط اولیه ای به این صورت که: اگر $j < k$, مقادیر ثابت $D_{j,j}, D_{j,j+1}, \dots, D_{j,j+k-1}$ از درخت بازگشتی T_k که در تعریف درخت بازگشتی تصادفی k -مینیمال برچسب، درختی دلخواه و ثابت فرض شده است، به دست می‌آیند؛ و اگر $j \geq k$ داریم

$$D_{j,j} = D_{j,j+1} = \dots = D_{j,j+k-1} = 1.$$

فرض کنید $\phi_{j,n}(t)$ تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی $D_{j,n}$ باشد. در این صورت داریم

$$\begin{aligned} \phi_{j,n}(t) &= e^{D_{j,j+k-1}t} \times \prod_{i=j+k}^n \left(1 - k \frac{(i-j-1)_{k-1}}{(i)_k} \right. \\ &\quad \left. + k \frac{(i-j-1)_{k-1}}{(i)_k} e^t\right). \end{aligned} \quad (1)$$

اگر $j = o(n)$ آنگاه با بسط دادن لگاریتم $\phi_{j,n}(t)$ به ازای t های به اندازه کافی کوچک داریم

$$\begin{aligned} \ln(\phi_{j,n}(t)) &= D_{j,j+k-1}t \\ &\quad + \sum_{i=j+k}^n \ln\left(1 - k \frac{(i-j-1)_{k-1}}{(i)_k} + k \frac{(i-j-1)_{k-1}}{(i)_k} e^t\right) \\ &= D_{j,j+k-1}t + \sum_{i=j+k}^n k \frac{(i-j-1)_{k-1}}{(i)_k} (e^t - 1) \\ &\quad + \sum_{i=j+k}^n O\left(\left(\frac{(i-j-1)_{k-1}}{(i)_k} (e^t - 1)\right)^2\right). \end{aligned}$$

از طرفی با محاسبه تعیین مرتبه عبارت $\frac{(i-j-1)_{k-1}}{(i)_k}$ به صورت زیر

$c \in (0, 1]$ و $c_n \rightarrow c$ به طوری که $j = c_n n$ به ازای

داریم

$$D_{j,n} \xrightarrow{\mathcal{L}} 1 + Poi\left(k \ln \frac{1}{c}\right),$$

که در آن $Poi(\lambda)$ متغیر تصادفی پواسن با میانگین λ است.

$$\begin{aligned} &= e^t \frac{\Gamma(n+1+k(e^t-1))\Gamma(j+k)}{\Gamma(j+k+k(e^t-1))\Gamma(n+1)} \\ &\sim e^t \left(\frac{n}{j}\right)^{k(e^t-1)} \\ &= e^t e^{k(e^t-1) \ln \frac{n}{j}} \\ &\rightarrow e^t e^{k \ln \frac{1}{c} (e^t-1)}. \end{aligned}$$

مراجع

- [1] Drmota, M. (2009), *Random trees: an interplay between combinatorics and probability*, Springer.
- [2] Kuba, M. and Panholzer, A. (2007), on the degree distribution of the nodes in increasing trees, *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 114, 597–618.
- [3] Mahmoud, H. (2012), The degree profile in some classes of random graphs that generalize recursive tree. *Methodology and Computing in Applied Probability*, 16, 527–538.