

اندیشه آماری، بهار و تابستان ۱۳۹۰، شماره پیاپی ۳۱

سال شانزدهم شماره اول، ص ۲۷۶-۲۸۵

یک نمودار کنترل میانگین متحرک تغییرپذیری مبتنی بر چگالی پیش‌بین بیزی

عاطفه مختاری حسن‌آبادی^۱ منوچهر خردمندیا^۲

چکیده:

اخیرا چندین نمودار کنترل در متون کنترل فرآیند آماری معرفی شده که بر اساس ایده چگالی پیش‌بین بیزی استوار است. در بین این نمودارها نمودار کنترل تغییرپذیری قرار دارد که ما آن را نمودار VBPD می‌نامیم.

در این مقاله ما ایده میانگین متحرک را به نمودار VBPD اضافه می‌کنیم و به این ترتیب یک نمودار کنترل جدید معرفی می‌کنیم که تمام مزیت‌های نمودار اولیه VBPD را دارد و علاوه بر آن دارای یک مزیت جدید است، که آن مزیت جدید حساسیت نسبت به تغییرات کوچک در واریانس فرآیند می‌باشد. ما این نمودار جدید را نمودار MAVBPD می‌نامیم.

در هر دو نمودار VBPD و MAVBPD پارامترها مجهول فرض می‌شوند ولی آماره کنترل در هر دو مورد از یک توزیع معلوم فشر پیروی می‌کند که در نتیجه برای محاسبه حدود کنترل نیازی به شبیه‌سازی نمی‌باشد.

واژه‌های کلیدی: میانگین متحرک، چگالی پیش‌بین بیزی، تغییرپذیری فرآیند.

^۱ دانشجوی کارشناسی ارشد آمار اقتصادی - اجتماعی، گروه آمار دانشگاه اصفهان، atefe.mokhtary@yahoo.com

^۲ استادیار آمار، گروه آمار دانشگاه اصفهان، kheradmand@sci.ui.ac.ir

۱ مقدمه

داده‌اند. اکثر نمودارهای کنترل تغییرپذیری مربوط

به وضعیتی است که در آن پارامترهای فرآیند معلوم فرض می‌شوند. در حالتی که این پارامترها باید برآورد شوند، اغلب حدود کنترل با استفاده از شبیه‌سازی‌های گسترده حاصل می‌شوند. در سال‌های اخیر ایده بکارگیری چگالی پیش‌بین بیزی^۷ در طراحی نمودارهای کنترل مورد توجه قرار گرفته است. این ایده متعلق به منزفریخ^۸ (۲۰۰۲ و ۲۰۰۷ و ۲۰۱۰) می‌باشد. منزفریخ (۲۰۱۰) با استفاده از ایده چگالی پیش‌بین بیزی یک نمودار کنترل برای واریانس فرآیند یک متغیره ارائه کرده است. این نمودار کنترل، علاوه بر اینکه نامعلومی پارامترها را به حساب می‌آورد ما را از شبیه‌سازی‌های گسترده نیز بی‌نیاز می‌کند.

ما در مقاله حاضر ضمن معرفی نمودار کنترل پیشنهادی منزفریخ (۲۰۱۰)، یک نمودار کنترل میانگین متحرک جدید برای واریانس ارائه می‌دهیم که از ایده چگالی پیش‌بین بیزی بهره برده است. سپس با استفاده از مثال‌های شبیه‌سازی، عملکرد این دو نمودار کنترل را مورد بررسی قرار می‌دهیم. ما نمودار پیشنهادی منزفریخ (۲۰۱۰) را نمودار VBPD و نمودار پیشنهادی خویش را نمودار MAVBPD می‌نامیم.

کیفیت همیشه بخش لاینفک کلیه محصولات و خدمات یک فرآیند تولید است. در کنترل فرآیند آماری افزایش تغییرپذیری می‌تواند تاثیر معنی‌داری روی کیفیت محصول و نیز روی نمودارکنترل مربوط به میانگین داشته باشد. از نظر بعضی از محققین بررسی تغییرپذیری فرآیند نسبت به مرکز فرآیند از اهمیت بالاتری برخوردار است. در این راستا مونته‌گمری^۳ (۲۰۰۹) نیز اهمیت خاصی برای کنترل تغییرپذیری قائل شده است. به همین دلیل تاکنون نمودارهای کنترل زیادی برای کنترل تغییرپذیری یک فرآیند معرفی شده است. یکی از مشهورترین آنها نمودار کنترل میانگین موزون متحرک نمایی کراودر و همیلتون^۴ (۱۹۹۲) است. این نمودار کنترل مربوط به وضعیتی است که در آن پارامترهای فرآیند معلوم فرض می‌شوند. ماراولاکیس و کاستالیول^۵ (۲۰۰۹) این نمودار کنترل را برای حالتی که پارامترها باید برآورد شوند، تعمیم داده‌اند. شونهوون و همکاران^۶ (۲۰۱۱) با استفاده از برآوردهای مختلف برای پارامترهای فرآیند، چندین نمودار کنترل تغییرپذیری معرفی کرده‌اند و با استفاده از معیار ARL آنها را مورد ارزیابی و مقایسه قرار

^۳Montgomery

^۴Crowder & Hamilton

^۵Maravelakis & Castagliola

^۶Schoonhoven, Riaz & Does

^۷Bayesian Predictive Distribution

^۸Menzefricke

۲ چگالی پیش بین بیزی

$$= \int p(x_{n+1}|\theta, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ p(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n)d\theta \\ = \int p(x_{n+1}|\theta)p(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n)d\theta \quad (1)$$

یک ویژگی مثبت توزیع پیش بین، عدم وابستگی آن به پارامتر θ است. این ویژگی مثبت، توزیع پیش بین را به یک معیار مناسب برای استنباط راجع به مقدار مشاهدات آینده بر مبنای مشاهدات گذشته تبدیل کرده است.

فرض کنید x یک متغیر تصادفی باشد که توزیع آن به پارامتر (های) θ بستگی دارد (θ ممکن است اسکالر و یا بردار باشد). فرض کنید که x_1, x_2, \dots, x_n به شرط θ یک نمونه تصادفی از x باشد. تابع درستنمایی حاصل از این نمونه را با نماد $p(x_1, x_2, \dots, x_n|\theta)$ و توزیع پیشین را با نماد $p(\theta)$ نشان داده ایم. در واقع اطلاع راجع به پارامتر θ قبل از به دست آوردن اطلاعات نمونه ای در توزیع پیشین $p(\theta)$ خلاصه شده است. از ترکیب

۳ چارچوب کلی کنترل فرآیند

آماري با رهيافت چگالي پیش بین

بیزی

برای هر نمودار کنترل دو فاز تعریف می شود: فاز اول و فاز دوم. فاز اول زمانی است که فرآیند تحت کنترل است. فرض کرده ایم که در فاز اول یک نمونه n تایی از x در اختیار است که آن را با x_1, x_2, \dots, x_n نشان داده ایم. متغیر i ام در فاز اول را با x_i و توزیع آن را با $p(x_i|\theta)$ نشان می دهیم که در آن θ پارامتر فرآیند است. در بسیاری از مواقع θ نامعلوم است و اطلاعات پیشین راجع به آن در چگالی پیشین $p(\theta)$ خلاصه شده است. اطلاعاتی که راجع به θ در داده ها وجود دارد در

اطلاعات پیشین با اطلاعات نمونه ای توزیع پسین حاصل می شود که آن را با نماد $p(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n)$ نشان داده ایم.

برای پیش بینی مشاهده جدید x_{n+1} و مطالعه رفتار آن بر مبنای مشاهدات قبلی x_1, x_2, \dots, x_n استفاده از توزیع احتمال $p(x_{n+1}|x_1, x_2, \dots, x_n)$ معقول می باشد. این توزیع احتمال را توزیع پیش بین بیزی می نامیم. توجه کنید که x_{n+1} به شرط θ مستقل از x_1, x_2, \dots, x_n است ولی به صورت غیر شرطی مستقل از x_1, x_2, \dots, x_n نمی باشد. توزیع پیش بین بیزی به صورت زیر حاصل می شود

$$p(x_{n+1}|x_1, x_2, \dots, x_n) \\ = \int p(x_{n+1}, \theta|x_1, x_2, \dots, x_n)d\theta$$

آماره بسنده که آن را با T_x نشان می‌دهیم خلاصه شده است. توزیع احتمال این آماره را با $p(T_x|\theta)$ نشان می‌دهیم. از ترکیب اطلاعات نهفته در آماره بسنده با اطلاعات پیشین توزیع پسین θ حاصل می‌شود. این توزیع را با $p(\theta|T_x)$ نشان می‌دهیم که براساس فرمول بیز با استفاده از رابطه زیر حاصل می‌شود

$$p(\theta|T_x) \propto p(\theta)p(T_x|\theta) \quad (۲)$$

حدود کنترل نیازی به شبیه‌سازی نمی‌باشد.

در فاز دوم، ممکن است فرآیند تحت کنترل باشد و یا ممکن است خارج از کنترل باشد. فرض می‌شود که داده‌های فاز دوم گروهی‌اند یعنی در هر زمان t یک نمونه m تایی از مشخصه مورد بررسی دریافت می‌شود. این نمونه را با $y_{t1}, y_{t2}, \dots, y_{tm}$ نشان می‌دهیم. آماره بسنده T_y حاوی تمامی اطلاعات حاصل از این نمونه است. توزیع احتمال این آماره را با $p(T_y|\theta)$ نشان می‌دهیم. بنابراین توزیع پیشین برای T_y عبارت است از

$$\begin{aligned} p(T_y|T_x) &= \int p(T_y, \theta|T_x) d\theta \\ &= \int p(T_y|\theta, T_x) p(\theta|T_x) d\theta \\ &= \int p(T_y|\theta) p(\theta|T_x) d\theta \quad (۳) \end{aligned}$$

که در آن $p(T_y|\theta)$ توزیع T_y در شرایط کنترل می‌باشد. توجه کنید که T_y به شرط θ مستقل از

T_x است بنابراین $p(T_y|\theta, T_x) = p(T_y|\theta)$ اما به صورت غیرشرطی مستقل از T_x نمی‌باشد. در μ و σ^2 یک نمونه تصادفی از $N(\mu, \sigma^2)$ باشد

۴ استنباط بیزی نرمال یک متغیره

طبق روند چارچوب کلی مطرح شده در بخش ۳، برای محاسبه چگالی پیشین ابتدا لازم است که توزیع پسین پارامترها تعیین شود. بنابراین لازم است که استنباط بیزی راجع به پارامترهای فرآیند انجام گیرد. نمودارهای کنترلی که در مقاله حاضر معرفی می‌شوند، همانند اغلب نمودارهای کنترل پرکاربرد براساس فرض نرمال بودن فرآیند استواراند. از این رو در بخش حاضر برای حالت خاص نرمال

یک متغیره چگونگی دستیابی به توزیع‌های پسین تشریح شده است.

فرض کنید که در فاز اول x_1, x_2, \dots, x_n به شرط

که در آن μ و σ^2 هر دو نامعلوم اند. آماره بسنده که در آن

$$T_x = (\bar{x}, s_x^2) \text{ است که در آن } \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \text{ و } s_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \text{ به ترتیب میانگین و واریانس حاصل از نمونه فوق است. تمام اطلاعات استنباطی که در نمونه راجع به پارامترها نهفته، توسط آماره بسنده خلاصه می شود. توزیع مولفه های آماره}$$

$$\mu_* = \frac{n_0 \mu_0 + n \bar{x}}{n_*} \quad (11)$$

$$n_* = n + n_0 \quad (12)$$

$$\sigma_*^2 = [n_0 \sigma_0^2 + (n-1)s_x^2 + \frac{nn_0}{n_*} (\bar{x} - \mu_0)^2] / n_* \quad (13)$$

بسنده به شرط μ و σ^2 عبارت است از

$$p(\bar{x} | \mu, \sigma^2) = N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \quad (4)$$

$$p(s_x^2 | \mu, \sigma^2) = Ga\left(\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2\sigma^2}\right) \quad (5)$$

فرض کنید اطلاعات پیشین راجع به μ و σ^2 در

پیشین های مزدوج زیر خلاصه شده باشد

$$p(\mu | \sigma^2) = N\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n_0}\right) \quad (6)$$

$$p(\sigma^2) = IG\left(\frac{n_0}{2}, \frac{n_0 \sigma_0^2}{2}\right) \quad (7)$$

که در آن μ_0 و n_0 و σ_0^2 ابر پارامترهای پیشین هستند. طبق منطق آمار بیز بایستی اطلاعات نهفته

در آماره بسنده را با اطلاعات پیشین ترکیب کرد. با

ترکیب این دو منبع اطلاعات، توزیع های پسین زیر حاصل می شوند

$$p(\mu | \bar{x}, s_x^2, \sigma^2) = N\left(\mu_*, \frac{\sigma^2}{n_*}\right) \quad (8)$$

$$p(\sigma^2 | \bar{x}, s_x^2) = IG\left(\frac{n_*}{2}, \frac{n_* \sigma_*^2}{2}\right) \quad (9)$$

توزیع پسین کناری μ عبارت است از

$$p(\mu | \bar{x}, s_x^2) = t_1\left(\mu_*, \frac{\sigma_*^2}{n_*}, n_*\right) \quad (10)$$

علامت IG نماد توزیع وارون گاما و علامت t_1

نماد توزیع t یک متغیره غیر مرکزی است.

در حالت خاص اگر اطلاعات پیشین وجود نداشته

باشد، پیشین آگاهی نابخش ناسره می تواند انتخاب

مناسبی باشد. پیشین توام ناسره به صورت زیر است

$$p(\mu, \sigma^2) \propto \frac{1}{\sigma^2} \quad (14)$$

در این حالت توزیع های پسین عبارتند از

$$p(\mu | \bar{x}, s_x^2, \sigma^2) = N\left(\bar{x}, \frac{\sigma^2}{n}\right) \quad (15)$$

$$p(\sigma^2 | \bar{x}, s_x^2) = IG\left(\frac{n-1}{2}, \frac{(n-1)s_x^2}{2}\right) \quad (16)$$

با انتگرال گیری از پسین توام روی σ^2 توزیع پسین

کناری μ به صورت زیر حاصل می شود

$$p(\mu | \bar{x}, s_x^2) = t_1\left(\bar{x}, \frac{s_x^2}{n}, n-1\right) \quad (17)$$

برای توضیح مفصل راجع به استنباط بیزی به عنوان

مثال به لی^۹ (۱۹۹۷) مراجعه کنید.

^۹Lee

۵ نمودار کنترل VBPD

که در آن $F_{\alpha, m-1, n-1}$ صدک $100(1-\alpha)$ درصد

توزیع F با $m-1$ و $n-1$ درجه آزادی است.

فرض کنید که در فاز دوم $y_{t1}, y_{t2}, \dots, y_{tm}$ به

شرط μ و σ^2 یک نمونه تصادفی از $N(\mu, \sigma^2)$

باشد که در آن μ و σ^2 هر دو مجهول اند. میانگین و

واریانس این نمونه را به ترتیب با $\bar{y}_t = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_{ti}$

و $s_t^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (y_{ti} - \bar{y}_t)^2$ نشان می دهیم.

توزیع s_t^2 به شرط μ و σ^2 عبارت است از

$$p(s_t^2 | \mu, \sigma^2) = Ga\left(\frac{m-1}{2}, \frac{m-1}{2\sigma^2}\right) \quad (18)$$

در صورت استفاده از پیشین های مزدوج (۶) و

(۷) پیشنهاد می کنیم که آماره زیر به عنوان آماره

کنترل استفاده شود و از لحاظ تحت کنترل بودن

مورد بررسی قرار گیرد

$$V_t = \frac{s_t^2}{\sigma_*^2} \quad (19)$$

توزیع پیش بین برای V_t به صورت زیر حاصل می شود

$$p(V_t | \bar{x}, s_x^2) = F_{m-1, n_*} \quad (20)$$

در حالت خاص اگر اطلاعات پیشین وجود نداشته

باشد، آماره کنترل به صورت زیر ساده می شود

$$V_t = \frac{s_t^2}{s_x^2} \quad (21)$$

در این حالت توزیع پیش بین V_t عبارت است از

$$p(V_t | \bar{x}, s_x^2) = F_{m-1, n-1} \quad (22)$$

بنابراین اگر بخواهیم احتمال خطای نوع اول α

باشد حد بالای کنترل برابر است با

$$UCL = F_{\alpha, m-1, n-1} \quad (23)$$

۶ نمودار کنترل MAVBPD

تمامی شرایط بخش قبل را در نظر بگیرید. میانگین

متحرک V_t با پهنای w را با نماد M_t نشان دهید

و به صورت زیر تعریف کنید

$$M_t = \begin{cases} \frac{V_t + V_{t-1} + \dots + V_{t-w+1}}{w} & t > w \\ \frac{V_1 + V_2 + \dots + V_t}{t} & t \leq w \end{cases} \quad (24)$$

ما پیشنهاد می کنیم که آماره M_t از لحاظ تحت

کنترل بودن مورد بررسی قرار گیرد و از آن به عنوان

آماره کنترل استفاده شود. در این صورت برای

$t \leq w$ از تمامی نمونه ها در آماره کنترل استفاده

می شود و برای $t > w$ قدیمی ترین نمونه حذف و

جدیدترین نمونه به مجموعه نمونه های مورد استفاده

در آماره کنترل اضافه می شود. به طور کلی اندازه

تغییر مورد نظر که می خواهیم به وجود آن پی ببریم

با w رابطه معکوس دارد. به منظور پی بردن به وجود

تغییرات کوچک می توان از میانگین های متحرک

طولانی تری استفاده کرد.

فرض کنید اطلاعات پیشین راجع به μ و σ^2 در

پیشین های مزدوج (۶) و (۷) خلاصه شده باشد. با

توجه به رابطه (۱۸) و نیز با توجه به اینکه نمونه های

فاز دوم مستقل از یکدیگرند، توزیع پیش بین M_t

به صورت زیر حاصل می شود

و واریانس فرآیند تحت کنترل است. فرض کرده ایم که این مشاهدات مربوط به فاز اول است. میانگین و واریانس حاصل از این مشاهدات به شرح زیر مشاهده گردید

$$p(M_t|\bar{x}, s_x^2) = \begin{cases} F_{w(m-1), n_*} & t > w \\ F_{t(m-1), n_*} & t \leq w \end{cases} \quad (25)$$

$$\bar{x} = 0.0348, \quad s_x^2 = 0.9525$$

در حالت خاص اگر اطلاعات پیشین راجع به μ

به عنوان مشاهدات فاز دوم، ۳۰ نمونه ۱۰ تایی از

توزیع نرمال تولید کرده ایم. به این ترتیب که ۱۵

نمونه اول را در شرایط تحت کنترل و در نتیجه از

$N(\mu_{in}, \sigma_{in}^2)$ تولید کرده ایم و ۱۵ نمونه دوم را

در شرایط خارج از کنترل و از $N(\mu_{out}, \sigma_{out}^2)$

تولید کرده ایم که در آن $\mu_{out} = \mu_{in} = 0$ و

$\sigma_{out}^2 = 2\sigma_{in}^2$. در واقع برای ۱۵ نمونه دوم

واریانس را دو برابر کرده ایم ولی در میانگین تغییری

ایجاد نکرده ایم. مشاهداتی که به این طریق به عنوان

مشاهدات فاز دوم تولید شده اند، در شکل ۱ ملاحظه

می شوند. نمودارهای کنترل $VBPD$ و $MAVBPD$

نیز در این شکل ارائه شده اند. همانطور که ملاحظه

می شود، هر دو نمودار ۱۵ نقطه اول را تحت کنترل

رسم کرده اند اما از نقطه ۱۶ به بعد که متناظر با

داده های آلوده است هشدار خروج از کنترل را شروع

کرده اند. نکته قابل توجه این است که در نمودار

$MAVBPD$ تمامی نقاط متناظر با داده های آلوده

خارج از کنترل رسم شده اند در حالیکه در نمودار

$VBPD$ تعداد زیادی از این نقاط، تحت کنترل رسم

شده اند.

و σ^2 وجود نداشته باشد، توزیع پیش بین M_t به

صورت زیر ساده می شود

$$p(M_t|\bar{x}, s_x^2) = \begin{cases} F_{w(m-1), n-1} & t > w \\ F_{t(m-1), n-1} & t \leq w \end{cases} \quad (26)$$

همانطور که ملاحظه می شود توزیع پیش بین فوق

به زمان t بستگی دارد. بنابراین حد بالای کنترل

عبارت است از

$$UCL = \begin{cases} F_{\alpha, w(m-1), n-1} & t > w \\ F_{\alpha, t(m-1), n-1} & t \leq w \end{cases} \quad (27)$$

۷ مثال های شبیه سازی

در همه مثال های بخش حاضر اندازه خطای نوع اول

را برابر ۰/۰۱ و پهنای میانگین متحرک را برابر با

۵ قرار داده ایم.

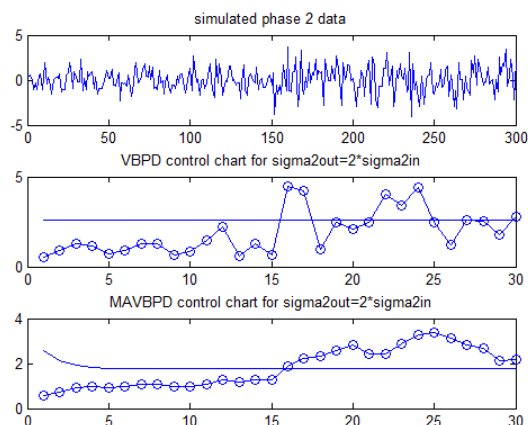
مثال ۱۰۷. با استفاده از برنامه متلب، تعداد ۱۰۰

مشاهده تکی از توزیع $N(\mu_{in}, \sigma_{in}^2)$ تولید کرده ایم

که در آن $\mu_{in} = 0$ و $\sigma_{in}^2 = 1$ به ترتیب میانگین

جدول ۱: مقادیر آماره کنترل نمودارهای VBPB و MAVBPD و حد بالای کنترل نمودار MAVBPD

t	V_t	M_t	UCL	t	V_t	M_t	UCL
۱	۰/۵۶۲۴	۰/۵۶۲۴	۲/۵۹۱۷	۱۶	۴/۴۶۴۵*	۱/۸۵۰۶*	۱/۷۶۵۴
۲	۰/۹۰۸۴	۰/۷۳۵۴	۲/۱۲۲۳	۱۷	۴/۲۰۷۳*	۲/۲۴۵۲*	۱/۷۶۵۴
۳	۱/۲۵۷۱	۰/۹۰۹۳	۱/۹۳۵۷	۱۸	۰/۹۷۰۸	۲/۳۱۶۲*	۱/۷۶۵۴
۴	۱/۱۵۳۳	۰/۹۷۰۳	۱/۸۳۲۱	۱۹	۲/۴۹۹۸	۲/۵۵۵۹*	۱/۷۶۵۴
۵	۰/۷۲۴۰	۰/۹۲۱۰	۱/۷۶۵۴	۲۰	۲/۰۶۳۶	۲/۸۴۱۲*	۱/۷۶۵۴
۶	۰/۹۳۳۸	۰/۹۹۵۳	۱/۷۶۵۴	۲۱	۲/۴۶۷۷	۲/۴۴۱۸*	۱/۷۶۵۴
۷	۱/۲۵۳۱	۱/۰۶۴۲	۱/۷۶۵۴	۲۲	۴/۰۲۹۷*	۲/۴۰۶۳*	۱/۷۶۵۴
۸	۱/۲۶۲۱	۱/۰۶۵۲	۱/۷۶۵۴	۲۳	۳/۳۸۰۷*	۲/۸۸۸۳*	۱/۷۶۵۴
۹	۰/۶۲۸۱	۰/۹۶۰۲	۱/۷۶۵۴	۲۴	۴/۴۰۸۶*	۳/۲۷۰۱*	۱/۷۶۵۴
۱۰	۰/۸۲۰۵	۰/۹۷۹۵	۱/۷۶۵۴	۲۵	۲/۴۸۲۷	۳/۳۵۳۹*	۱/۷۶۵۴
۱۱	۱/۴۸۱۹	۱/۰۸۹۱	۱/۷۶۵۴	۲۶	۱/۲۱۷۳	۳/۱۰۳۸*	۱/۷۶۵۴
۱۲	۲/۲۳۴۵	۱/۲۸۵۴	۱/۷۶۵۴	۲۷	۲/۶۲۴۶*	۲/۸۲۲۸*	۱/۷۶۵۴
۱۳	۰/۶۱۵۵	۱/۱۵۶۱	۱/۷۶۵۴	۲۸	۲/۵۲۵۵	۲/۶۵۱۷*	۱/۷۶۵۴
۱۴	۱/۳۰۱۳	۱/۲۹۰۷	۱/۷۶۵۴	۲۹	۱/۷۸۶۴	۲/۱۲۷۳*	۱/۷۶۵۴
۱۵	۰/۶۳۷۲	۱/۲۵۴۱	۱/۷۶۵۴	۳۰	۲/۷۵۲۸*	۲/۱۸۱۳*	۱/۷۶۵۴



شکل ۱: نمودار مشاهدات فاز دوم و نمودارهای کنترل VBPB و MAVBPD برای آلودگی شبیه سازی شده در واریانس فرآیند

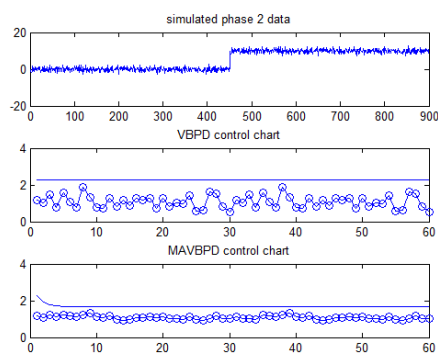
به وضوح نمودار MAVBPD نسبت به تغییرات تولید کنیم، تعداد ۳۰+۳۰ نمونه تولید کرده‌ایم. کوچک در واریانس حساس‌تر از نمودار VBPD ثانیاً به جای ایجاد آلودگی در واریانس، میانگین می‌باشد. را آلوده کرده‌ایم و میانگین خارج از کنترل را برابر به منظور درک بهتر رفتار نمودارهای کنترل فوق، $\mu_{out} = \mu_{in} + 10$ قرار داده‌ایم. در واقع برای مقادیر آماره کنترل این نمودارها را برای هر نمونه فاز دوم محاسبه و در جدول ۱ ارائه کرده‌ایم. مقادیری از این آماره‌ها که از حد بالای کنترل مربوطه بیشتر شده‌اند، با علامت "*" نشان داده‌ایم. لازم به ذکر است که حد بالای کنترل نمودار VBPD برابر با $UCL = F_{0.01,9,99} = 2.5917$ می‌باشد که به صورت خطی افقی در نمودار مربوطه رسم شده است. حد بالای کنترل نمودار MAVBPD نیز به صورت

$$UCL = \begin{cases} F_{0.01,45,99} & t > w \\ F_{0.01,9t,99} & t \leq w \end{cases} \quad (28)$$

است که در جدول ۱ ارائه و در نمودار کنترل مربوطه رسم شده است.

یک ویژگی مهم نمودارهای کنترل VBPD و MAVBPD غیر حساس بودن آنها نسبت به آلودگی در میانگین است. مثال بعدی به منظور آشکار نمودن این ویژگی ارائه شده است.

مثال ۲.۷. در یک مطالعه شبیه‌سازی دیگر تمامی شرایط مثال ۱.۷ را بکار برده‌ایم با این تفاوت که اولاً به جای اینکه در فاز دوم تعداد ۱۵+۱۵ نمونه



شکل ۲: نمودار مشاهدات فاز دوم و نمودارهای کنترل VBPD و MAVBPD برای آلودگی شبیه سازی شده در میانگین فرآیند

۸ مباحث تکمیلی

و $MAVBPD$ بدون نیاز به شبیه سازی توسط صدک های

نتیجه گیری

توزیع فیشر حاصل می شوند. این ویژگی بسیار حائز

اهمیت است زیرا در نمودارهای کنترل رقیب که

نامعلومی پارامترها را نیز به حساب می آورند، حدود

کنترل تنها از طریق شبیه سازی قابل حصول است.

نتیجه ۲۰۸. هر دو نمودار کنترل نسبت به هرگونه

آلودگی در میانگین غیرحساس اند. این ویژگی برای

نمودارهای کنترل تغییرپذیری یک حسن محسوب

می شود.

ما در این مقاله فرض کرده ایم که تنها تشخیص

افزایش تغییرپذیری فرآیند مورد نظر است و بنابراین

تنها حد بالای کنترل را برای نمودارهای $VBPD$ و

$MAVBPD$ ارائه کرده ایم. اگرچه برای حالتی که

لازم است این نمودارها دارای حد پایین کنترل

نیز باشد، حدود کنترل به سادگی توسط صدک های

توزیع فیشر حاصل می شوند.

نتیجه ۳۰۸. نمودارهای کنترل $VBPD$ و

$MAVBPD$ در شناسایی انواع آلودگی های واریانس

قابلیت دارند. اما نمودار $MAVBPD$ نسبت به

تغییرات کوچک در واریانس حساس تر از نمودار

$VBPD$ می باشد.

ما در مقاله حاضر برای افزایش حساسیت نمودار

$VBPD$ نسبت به تغییرات کوچک واریانس، از

ایده میانگین متحرک به جای میانگین متحرک

موزون نمایی استفاده کرده ایم. دلیل این امر این

واقعیت است که با استفاده از ایده میانگین متحرک،

توزیع پیش بین آماره کنترل به طور دقیق معلوم است

و لذا حدود کنترل بدون نیاز به شبیه سازی قابل

حصول می باشد. اما در صورت استفاده از ایده

میانگین متحرک موزون نمایی، حدود کنترل فقط

از طریق شبیه سازی قابل حصول است.

ما در اینجا نمودار کنترل $VBPD$ را به همراه نمودار

کنترل جدید $MAVBPD$ معرفی نموده و با مطالعات

شبیه سازی خود عملکرد آنها را بررسی کردیم و به

نتایج زیر دست یافتیم.

نتیجه ۱۰۸. حدود کنترل نمودارهای $VBPD$ و

مراجع

- [1] Crowder, S. and Hamilton, M. (1992), An EWMA for Monitoring a Process Standard Deviation, *Jornal of Quality Technology*, **24**, 1.
- [2] Lee, P. M. (1997), *Bayesian Statistics: An introduction*, Arnolds, London.
- [3] Maravelakis, P. E. and Castagliola, P. (2009), An EWMA Chart for Monitoring the Process Standard Deviation when Parameters are Estimated, *Computational Statistics and Data Analysis*, **53**, 2653-2664.
- [4] Menzefricke, U. (2002), On the Evaluation of Control Chart Limits Based on Predictive Distributions, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **31**, 8, 1423-1440.
- [5] Menzefricke, U. (2007), Control Charts for the Generalized Variance Based on its Predictive Distribution, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **36**, 5, 1031-1038.
- [6] Menzefricke, U. (2010), Multivariate Exponentially Weighted Moving Average Charts for a Mean Based on its Prediction Distribution, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **39**, 16, 2942-2960.
- [7] Menzefricke, U. (2010), Control Charts for the Variance and the Coefficient of Variation Based on their Predictive Distribution, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **39**, 16, 2930-2941.
- [8] Montgomery, D. C. (2009), *Introduction to Statistical Quality Control*, Wiley, New York.

- [9] Schoonhoven, M. , Riaz, M. and Does, R. J. M. M. (2011), Design and Analysis of Control Charts for Standard Deviation with Estimated Parameters, *Journal of Quality Technology*, **43**, 4.

Statistical Thinking, Spring 2011

Vol. 31, No. 1, pp 265-275

A Moving Average Variation Control Chart Based on Bayesian Predictive Density

Mokhtari Hasanabadi, Atefe ¹ Kheradmandnia, Manouchehr ²

Abstract:

Recently several control charts have been introduced in the statistical process control literature which are based on the idea of Bayesian Predictive Density (BPD). Among these charts is the variation control chart which we refer to it as VBPD chart.

In this paper we add the idea of Moving Average to VBPD chart and introduce a new variation control chart which has all advantages of the original VBPD chart and in addition has a new advantage which is its sensitivity to small changes in process variance. We refer to this new chart as MAVBPD chart. In both VBPD and MAVBP charts , the parameters are assumed unknown but the control statistic has a known F distribution which means that, the control limits can be obtained without simulation.

Keywords: Moving average, Bayesian predictive density, Process variation.

¹ MSc student, Department of statistics, University of Isfahan, atefe.mokhtary@yahoo.com

² Assistant professor, Department of statistics, University of Isfahan, kheradmand@sci.ui.ac.ir