

مروری بر طرح های کاوش و معیار های ارزیابی آنها

نیز اسمعیل زاده^۱

چکیده:

در این مقاله طرح های کاوش معرفی شده در سریواستوا (۱۹۷۵) مرور می شوند. در یک مساله خاص ممکن است چند طرح کاوش با تعداد اجرا های یکسان وجود داشته باشند. بحث معیار های ارزیابی طرح های کاوش موضوع دیگر مطرح شده در این مقاله است. معیار های مبتنی بر احتمال کاوش و معیار کولبک - لیلبر مورد انتظار همراه با مثال هایی مطرح شده اند.

واژه های کلیدی: طرح کاوش، مدل خطی کاوش، احتمال کاوش، فاصله کولبک - لیلبر.

۱ مقدمه

طرح هایی ساخت که با تعداد ترکیب های تیماری نسبتاً کم، اجازه جستجو برای تعداد محدودی اثرات متقابل مراتب پایین را بدهد؟ برای برآورد همه اثرات مرتبه پایین، مثلاً اثرات متقابل ۲ عاملی، طرح های کسری باقاعده دارای تعداد اجراهای زیادی هستند. از طرفی، از قبل نمی توان گفت که کدام یک از اثرات متقابل، ممکن است معنی دار باشند. پس به چه طریق می توان تعداد اثرات متقابل را محدود کرد؟ برای غلبه بر این مشکل به جای مشخص کردن اثرات معینی، فرض می کنیم که تعداد محدودی، مثلاً k اثر در بین مجموعه ای از اثرات، معنی دار هستند و به دنبال ساخت طرح هایی خواهیم بود که توانایی شناسایی k اثر، در بین مجموعه ای از اثرات را داشته باشند و آنها را همراه با همه اثرات، در مجموعه ای دیگر شامل اثرات مورد علاقه برآورد کنند.

این ایده را برای نخستین بار سریواستوا (۱۹۷۵) مطرح کرد و طرح هایی با چنین قابلیت را **طرح کاوش** نامید. مدل های خطی معمولی توانایی شناسایی k اثر غیر صفر را با استفاده از تعداد اندکی ترکیب تیماری نسبت به همه اجراهای ممکن برای یک آزمایش، ندارند. در نتیجه سریواستوا متناظر با طرح کاوش، **مدل های خطی کاوش** را نیز معرفی کرد. این موضوع در بخش ۲ مطرح می شود. در یک مساله خاص ممکن است چندین طرح کاوش وجود داشته باشد. مساله انتخاب

طرح های عاملی به عنوان طرح هایی کارا جهت مطالعه اثر دو یا بیش از دو عامل، بر روی متغیر پاسخ مورد نظر، شناخته شده هستند. اگر چه این طرح ها، قادر به برآورد تمام اثرات عاملی هستند، اما با افزایش تعداد عوامل، تعداد اجرا های آن ها به صورت نمایی افزایش پیدا می کنند و لذا در عمل قابل اجرا نیستند. ممکن است این سوال مطرح شود، آیا همیشه ضروری است تمامی ترکیبات تیماری برای یک آزمایش عاملی انجام شود یا می توان تعدادی از آنها را حذف کرد؟ نظر به مستندات تجربی، تعداد عوامل تاثیر گذار روی یک سیستم اندک هستند. در حقیقت طبق اصل تُنک بودن اثرات، تعداد عوامل موثر روی متغیر پاسخ، اندک هستند. همچنین در یک آزمایش عاملی، تعداد زیادی اثر متقابل وجود دارد. اما طبق اصل سلسله مراتبی، اثرات مراتب پایین دارای اهمیت بیشتری نسبت به اثرات مراتب بالا هستند. پس، ممکن است بپذیریم اثرات متقابل مراتب بالا ناچیز هستند. فرض ناچیز بودن همه اثرات متقابل، غیر واقعی به نظر می رسد، به طوری که حتی اگر فقط یک اثر غیر قابل اغماض وجود داشته باشد، این فرض منجر به برآورد اریب اثرات عاملی خواهد شد. حال این سؤال مطرح می شود که آیا می توان

^۱ گروه آمار دانشگاه کردستان

توسط محققان متعدد را می توان در گوش (۱۹۹۶) و گوش و همکاران (۲۰۰۷) مشاهده کرد.

۳ معیارهای ارزیابی طرح های کاوش مبتنی

بر احتمال کاوش

بحث انتخاب طرح های کاوش بهینه و معیارهایی برای انتخاب این طرح ها، توسط سریواستاوا (۱۹۷۷) مطرح شد. هرچند شرط سریواستاوا برای طرح کاوش بودن در حالت وجود اغتشاش در مدل کافی نیست اما همچنان یک شرط لازم است. در این حالت شیراکورا و همکاران (۱۹۹۶) معیار احتمال کاوش را جهت انتخاب طرح محتمل تر برای شناسایی اثرات غیر صفر معرفی کردند. در توسعه و بهبود نتایج شیراکورا و همکاران، گوش و تچماچر^۲ (۲۰۰۲) و همچنین طالبی و اسمعیل زاده (۲۰۱۱a) معیارهای متفاوتی را مبتنی بر احتمال کاوش ارائه کردند و از آنها برای انتخاب طرح کاوش برتر، در بین مجموعه طرح های کاوش ارائه شده، استفاده کردند. در این بخش، معیارهای ارزیابی مبتنی بر احتمال کاوش را بطور مختصر مورد بررسی قرار می دهیم.

۱.۳ احتمال کاوش

سریواستاوا (۱۹۷۵) علاوه بر معرفی طرح های کاوش، فرایندی را جهت کاوش اثرات غیر صفر بردار ξ_2 معرفی کرد. فرض کنید S کلاس همه (ν_k) زیر مدل از مدل (۱) که شامل بردار ξ_1 و k تا از پارامترهای بردار ξ_2 هستند، باشد. یعنی مجموعه مدل های

$$S = \{M_i : y = A_1 \xi_1 + A_{2i} \xi_{2i} + e\}, \quad (3)$$

که در آن ξ_{2i} ، i -امین بردار $1 \times k$ در بین (ν_k) حالت ممکن از بردار ξ_2 و A_{2i} زیر ماتریس $N \times k$ متناظر آن از A_2 است. هر دو مدل در این کلاس در پارامترهای بردار ξ_1 مشترک ولی دارای مجموعه ای k عضوی از پارامترهای بردار ξ_2 هستند که در بعضی یا همه عناصر متفاوتند. مسئله کاوش k اثر غیر صفر از بردار ξ_2 در مدل (۱)، در حقیقت مسئله انتخاب یکی از مدل ها در مجموعه S است. سریواستاوا از مجموع مربعات خطا (SSE) جهت شناسایی مدل درست استفاده کرد. گوییم مدل M_i برازش بهتری نسبت به مدل M_j دارد هرگاه دارای SSE کمتری باشد. در فرایند

طرح برتر جهت شناسایی اثرات غیر صفر در حالت $k = 1$ برا ساس معیار احتمال کاوش و معیار های مربوط در بخش ۳ بحث می شود. در بخش ۴ معیاری براساس فاصله کولبک - لیبلر برای انتخاب طرح کاوش ارایه می شود که محدود به حالت $k = 1$ نیست.

۲ طرح کاوش

مدل خطی زیر را برای بردار مشاهدات $y(N \times 1)$ در نظر می گیریم:

$$y = A_1 \xi_1 + A_2 \xi_2 + e, \quad \text{Var}(e) = \sigma^2 I, \quad (1)$$

که در آن $A_1(N \times \nu_1)$ و $A_2(N \times \nu_2)$ ماتریس های طرح و معلوم هستند، $\xi_1(\nu_1 \times 1)$ و $\xi_2(\nu_2 \times 1)$ بردار پارامترها و $e(N \times 1)$ بردار خطاست. فرض می کنیم حداکثر k تا از اثرات بردار ξ_2 غیر صفر باشند که k نسبت به ν_2 کوچک است. هدف برآورد پارامترهای بردار ξ_1 و شناسایی و برآورد k پارامتر بردار ξ_2 است. طرحی که توانایی حل این مسئله را دارد طرح کاوش نامیده می شود. همچنین مدل (۱) را مدل خطی کاوش می نامند. این طرح ها توسط سریواستاوا معرفی شدند.

مدل (۱) را در نظر بگیرید و فرض کنید $\sigma^2 = 0$ (بدون اغتشاش) باشد. طرح T یک طرح کاوش است، اگر و تنها اگر، برای هر زیر

ماتریس $A_{22}(N \times 2k)$ از A_2 داشته باشیم: [۶]

$$\text{rank}[A_1 : A_{22}] = \nu_1 + 2k. \quad (2)$$

هر چند حالت $\sigma^2 = 0$ در عمل ممکن است رخ ندهد، شرط (۲) در ساختن طرح های کاوش از اهمیت زیادی برخوردار است. در حقیقت شرط (۲) در حالت $\sigma^2 > 0$ (با اغتشاش) نیز یک شرط لازم است. بنابراین در این مقاله منظور از طرح کاوش، طرحی است که شرط (۲) را برقرار کند. تعداد زیر مدل های ممکن از مدل (۱) که شامل بردار ξ_1 و k تا از پارامترهای بردار ξ_2 هستند، برابر (ν_k) است. شرط (۲) امکان برآورد پارامترها و تمایز بین هر دو مدل از کلاس مدل های ممکن را فراهم می کند. بنابراین، یک طرح کاوش شناسایی و کاوش k اثر غیر صفر ξ_2 و سپس برآورد آنها همراه با اثرات بردار ξ_1 را ممکن می سازد. تحقیق برقراری شرط، مستلزم بررسی رتبه تعداد زیادی ماتریس است که کاری حجیم و پر محاسبه است. بعد از معرفی طرح های کاوش توسط سریواستاوا، تحقیقات زیادی در زمینه ساختن این طرح ها و یافتن شروط معادل شرط (۲) صورت گرفت. فهرستی از طرح های کاوش ساخته شده

طرح داده شده T ، احتمال زیر را به عنوان احتمال کاوش معرفی کردند:

$$P_T(\rho) = \min_{\zeta_0 \in \xi_2} \min_{\zeta \in A(\xi_2; \zeta)} G(\zeta_0, \zeta, \rho), \quad (6)$$

که در آن $A(\xi_2; \zeta)$ مجموعه‌ی همه ζ ها از ξ_2 است که حداقل یکی از اثرات آنها با اثرات ζ_0 یکسان نیست. مقادیر بزرگ $P_T(\rho)$ نشان دهنده اطمینان بیشتر به شناسایی اثرات غیر صفر در ξ_2 بوسیله طرح T است. از $P_T(\rho)$ می‌توان به عنوان معیاری جهت مقایسه طرح‌های کاوش استفاده و تعریف زیر را بیان کرد.

تعریف ۱.۳. طرح‌های کاوش T_1 و T_2 را در نظر بگیرید. گوئیم طرح T_1 در کاوش اثرات غیر صفر برتر از طرح T_2 است هرگاه به ازای همه $\rho > 0$ ، $P_{T_1}(\rho) > P_{T_2}(\rho)$ باشد.

مثال ۲.۳. طرح‌های کاوش D_1 ، D_2 و D_3 داده شده در جدول ۱ را در نظر بگیرید. در مدل (۱) فرض کنید که بردار ξ_1 شامل میانگین عمومی و اثرات اصلی و بردار ξ_2 شامل اثرات متقابل دو و سه عاملی باشد. همچنین فرض کنید $k=1$ باشد. طرح D_1 را اسمعیل زاده و همکاران (۲۰۱۱) و طرح‌های D_2 و D_3 را گوش و طالی (۱۹۹۳) ارائه کردند. دقت کنید که طرح‌های D_2 و D_3 فقط در اجرای هفتم متفاوت هستند. نمودار $P_T(\rho)$ برای D_1 ، D_2 و D_3 در فاصله $0 < \rho < 4$ در شکل ۱ ارائه شده است. با توجه به نمودار و تعریف ۱.۳ مشاهده می‌کنیم که طرح D_3 در کاوش یک اثر متقابل غیر صفر بهتر از طرح‌های D_1 و D_2 است. اما در مورد طرح‌های D_1 و D_2 با استفاده از این معیار نمی‌توان بصورت کلی تصمیم گرفت. برای مقادیر کوچک ρ طرح D_2 بهتر از D_1 است و برای مقادیر بزرگ ρ برعکس.

۲.۳ معیارهای گوش و تچماچر

برای هر مدل درست M_0 ، $(\nu_2 - 1)$ مدل رقیب وجود دارد. چون مدل درست متناظر پارامتر غیر صفر ζ_0 از قبل مشخص نیست پس همه $(\nu_2 - 1)$ حالت ممکن برای زوج مدل‌های (M_0, M_i) را در نظر می‌گیریم. پس برای تابع $G_i(\zeta_0, \zeta, \rho)$ در (۵)، $(\nu_2 - 1)$ مقدار به ازای هر مقدار معلوم ρ وجود دارد. حال برای هر طرح کاوش D_i ، ماتریس $\nu_2 \times \nu_2$ که درایه‌های آن تابع $G_i(\zeta_0, \zeta, \rho)$ هستند، را می‌توان تشکیل داد. ستون‌های این ماتریس متناظر با همه حالات ممکن برای مدل درست، M_0 ، و سطرها آن متناظر با هر مدل رقیب، M_i ، هستند.

کاوش مجموع مربعات خطای همه (ν_2) مدل ممکن را محاسبه کرده و مدل دارای کمترین مقدار SSE را به عنوان مدل درست انتخاب می‌کنیم. در حالت بدون اغتشاش مدل درست و در حقیقت اثرات غیر صفر ξ_2 بطور قطعی شناسایی می‌شوند. زیرا در این حالت مشاهدات و برآورد آنها دقیقاً برابرند و SSE برابر صفر است. علی‌رغم اهمیت حالت بدون اغتشاش در ساختن طرح‌های کاوش، همانطور که قبلاً ذکر شد در عمل مدل‌های آماری دارای اغتشاش $(\sigma^2 > 0)$ هستند و در این حالت ممکن است فرایند کاوش، مدل درست را به دلیل ساختار تصادفی مجموع مربعات خطا شناسایی نکند. پس در حالت وجود اغتشاش، حال سوالی که مطرح می‌شود این است که در بین چند طرح کاوش کدام یک شانس بالاتری برای شناسایی مدل درست در کلاس مدل‌های ممکن دارد؟ برای مدل داده شده M_0 و مدل رقیب M_i احتمال زیر را در نظر بگیرید:

$$P[SSE(M_0) < SSE(M_i) | M_0, M_i, \sigma^2]. \quad (4)$$

این احتمال در حقیقت احتمال انتخاب مدل درست M_0 نسبت به مدل رقیب M_i است که به مقدار σ^2 بستگی دارد. شیراکورا و همکاران (۱۹۹۶) ساختار تصادفی SSE را بررسی کردند و در حالت $k=1$ ، تحت خطای نرمال عبارت زیر را برای محاسبه احتمال (۳) بدست آوردند:

$$G(\zeta_0, \zeta, \rho) = 1 - \Phi(c_1\rho) - \Phi(c_2\rho) + 2\Phi(c_1\rho)\Phi(c_2\rho) \quad (5)$$

که در آن $\Phi(\cdot)$ تابع توزیع نرمال استاندارد است و $c_1 = \left(\frac{r(\zeta_0, \zeta_0)}{r(\zeta_0, \zeta)} (1 - x(\zeta_0, \zeta)) \right)^{1/2}$ و $c_2 = \left(\frac{r(\zeta_0, \zeta_0)}{r(\zeta_0, \zeta)} (1 + x(\zeta_0, \zeta)) \right)^{1/2}$ برای (γ, η) ، $c_2(\zeta_0, \zeta) = \left(\frac{r(\zeta_0, \zeta_0)}{r(\zeta_0, \zeta)} (1 + x(\zeta_0, \zeta)) \right)^{1/2}$ و $c_1(\zeta_0, \zeta) = \left(\frac{r(\zeta_0, \zeta_0)}{r(\zeta_0, \zeta)} (1 - x(\zeta_0, \zeta)) \right)^{1/2}$ و $r(\gamma, \eta) = A'_{\gamma_1}(\gamma)[I - A_1(A'_1 A_1)^{-1} A'_1] A_{\gamma_1}(\eta)$ و $x(\zeta_0, \zeta) = r(\zeta_0, \zeta) / [r(\zeta_0, \zeta_0) r(\zeta, \zeta)]^{1/2}$.

تابع G از طریق c_1 و c_2 به طرح بستگی دارد. G تابعی متقارن و صعودی نسبت به ρ است. پس بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض می‌کنیم که $\rho = |\zeta_0|/\sigma$ واضح است که برای ζ_0 معینی $\nu_2 - 1$ مقدار برای (۴) وجود دارد. دقت کنید، در مرحله انتخاب طرح و قبل از انجام آزمایش اثر غیر صفر نامعلوم است. با در نظر گرفتن همه $(\nu_2 - 1)$ حالت ممکن برای زوج (ζ_0, ζ) شیراکورا و همکاران (۱۹۹۶) برای

$\nu_2 = \binom{5}{2} = 10$ دقت کنید که $n_1^+ = 42$ و $n_1^- = 48$ است. دقت کنید که $\nu_2 = \binom{5}{2} = 10$ است. پس براساس معیار I طرح D_2 بهتر از طرح D_1 است. چون $n_1^+ = 42$ و $n_1^- = 48$ ، براساس معیار II طرح D_1 بهتر از طرح D_2 است. همچنین $GMSP_1(1) - GMSP_2(1) = 0.8779 - 0.9109 = 0.0330 > 0$ ، یعنی براساس معیار III طرح D_1 بهتر از طرح D_2 است.

در مثال ۳.۳ طرح های D_1 و D_2 برای $\rho = 1$ مقایسه شدند. به منظور ارائه مقایسه جامع و درست بایستی مقایسه به ازای همه $\rho > 0$ انجام گیرد لیکن بدیهی است که انجام این کار در عمل امکان پذیر نیست. گوش و تچماچر (۲۰۰۲) روشی را ارائه کردند که در آن بدون نیاز به مقدار ρ ، مقایسات براساس معیارهای $III - I$ قابل انجام است.

فرض کنید $c^D(\zeta_0, \zeta)$ و $r_i(\zeta_0, \zeta)$ مقادیر $c(\zeta_0, \zeta)$ و $r(\zeta_0, \zeta)$ برای طرح D_i باشند، که در c_1 با قدرمطلق جایگزین شده است. دقت کنید که مقادیر $c(\zeta_0, \zeta)$ و $r(\zeta_0, \zeta)$ به پارامتر مجهول ρ بستگی ندارند. با این جایگزینی می توان رابطه (۵) را دوباره نویسی کرد بطوری که فقط به مقدار c_1 و ρ بستگی داشته باشد. گوش و تچماچر (۲۰۰۲) نشان دادند، مساله مقایسه احتمال کاوش به ازای همه $\rho > 0$ به مقایسه مقادیر c_1 و r که به ρ بستگی ندارند، تقلیل پیدا می کند.

حال برای طرح های مفروض D_1 و D_2 ، سه حالت زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{الف) } r_1(\zeta_0, \zeta_0) \geq r_2(\zeta_0^*, \zeta_0^*) \text{ و } c^{D_1}(\zeta_0, \zeta) \geq c^{D_2}(\zeta_0^*, \zeta_0^*)$$

$$\text{ب) } r_1(\zeta_0, \zeta_0) \leq r_2(\zeta_0^*, \zeta_0^*) \text{ و } c^{D_1}(\zeta_0, \zeta) \leq c^{D_2}(\zeta_0^*, \zeta_0^*)$$

$$\text{ج) } r_1(\zeta_0, \zeta_0) > r_2(\zeta_0^*, \zeta_0^*) \text{ و } c^{D_1}(\zeta_0, \zeta) < c^{D_2}(\zeta_0^*, \zeta_0^*)$$

در مقایسه طرح D_1 در مقابل D_2 ، تحت شرایط معیار I ، فرض کنید $\tilde{n}_1^+$ ، $\tilde{n}_1^-$ و $\tilde{n}_2^+$ تعداد مواردی باشد که به ترتیب در شرایط الف، ب و ج با $\zeta_0^* = \zeta_0^*$ صدق می کنند. آنها براساس قواعد زیر در مورد مقایسه دو طرح عمل کردند:

اگر $\tilde{n}_1^+ > \nu_2 \times (\nu_2 - 1) / 2$ آنگاه براساس معیار I طرح D_1 بهتر از D_2 است.

اگر $\tilde{n}_1^- > \nu_2 \times (\nu_2 - 1) / 2$ آنگاه براساس معیار I طرح D_2 بهتر از D_1 است.

حال تحت شرایط معیار II ، فرض کنید $\tilde{n}_1^+$ ، $\tilde{n}_1^-$ و $\tilde{n}_2^+$ تعداد مواردی باشد که به ترتیب در شرایط الف، ب و ج با $\zeta_0^* = \zeta_0^*$ صدق می کنند.

این ماتریس را ماتریس احتمال کاوش، $SPM_i(\rho)$ ، می نامند. چون مدل درست M_0 متفاوت از هر مدل رقیب M_i است، پس درایه های روی قطر اصلی بی معنی هستند. گوش و تچماچر (۲۰۰۲)، براساس ماتریس احتمال کاوش، سه معیار جهت مقایسه طرح های کاوش معرفی کردند، که در ادامه به صورت خلاصه به آنها اشاره می شود.

معیار I: های طرح D_1 و D_2 را در نظر بگیرید. برای مقایسه این دو طرح از تفاضل دو ماتریس احتمال کاوش متناظر آنها استفاده می کنیم. فرض کنید n_1^+ و n_1^- به ترتیب تعداد مقادیر مثبت و منفی درایه های ماتریس $(SPM_1(\rho) - SPM_2(\rho))$ به ازای مقدار ρ داده شده ای باشند. واضح است که $\nu_2(\nu_2 - 1) \leq n_1^- + n_1^+$ بنا بر این می توان گفت که براساس معیار I طرح D_1 بهتر از طرح D_2 است هرگاه به ازای همه $\rho > 0$ ، $n_1^+ > (\nu_2(\nu_2 - 1)) / 2$ باشد.

معیار II: هر یک از ستون های ماتریس احتمال کاوش، متناظر با اثری است که غیر صفر فرض شده است. کمترین مقدار احتمال کاوش در هر ستون را در نظر بگیرید و بردار کمترین احتمال کاوش، $MSPV_i(\rho)$ ، را برای طرح D_i تشکیل دهید. برای طرح های D_1 و D_2 ، فرض کنید n_1^+ و n_1^- به ترتیب تعداد مقادیر مثبت و منفی درایه های بردار $(MSPV_1(\rho) - MSPV_2(\rho))$ باشند. $n_1^- + n_1^+ \leq \nu_2$ بنا بر این می توان گفت که براساس معیار II طرح D_1 بهتر از طرح D_2 است هرگاه به ازای همه $\rho > 0$ ، $n_1^+ > \nu_2 / 2$ باشد.

معیار III: به منظور به حداقل رساندن تعداد مقایسه ها، می توان از کمینه مقدار احتمال کاوش، $GMSP_i(\rho)$ ، در ماتریس احتمال کاوش طرح D_i می توان استفاده کرد. براساس معیار III طرح D_1 بهتر از طرح D_2 است هرگاه به ازای همه $\rho > 0$ ، $GMSP_1(\rho) - GMSP_2(\rho) > 0$ باشد. در حقیقت معیار III همان معیار معرفی شده در (۵) است.

مثال ۳.۳. مجدداً طرح های کاوش D_1 و D_2 داده شده در جدول I را در نظر بگیرید. D_1 و D_2 را براساس معیارهای $III - I$ در $\rho = 1$ مقایسه می کنیم. ماتریس های احتمال کاوش و بردارهای کمترین احتمال کاوش برای وقتی که ξ شامل اثرات متقابل دو عاملی است در پیوست ارائه شده اند. با توجه به ماتریس های احتمال کاوش،

نکرده‌اند. مقایسه طرح‌ها به دلیل وجود متغیرهای غیر قابل کنترل در عمل، بدون در نظر گرفتن مقدار σ^2 حتی ممکن است بی‌معنی باشد. ممکن است متغیرهای غیر قابل کنترلی که در آزمایش در نظر گرفته نشده‌اند، اثر متفاوتی روی خطا داشته باشند و منجر به تولید واریانس متفاوت برای طرح‌های مختلفی تحت مدل یکسانی شوند. این مساله، منجر به داشتن طرح‌هایی با میزان ρ متفاوتی برای اثر درست می‌شود. در نتیجه ممکن است مقایسه طرح‌ها در یک مقدار مشخص و یکسان ρ نادرست باشد. مقدار احتمال کاوش معرفی شده توسط شیراکورا و همکاران در این حالت کارا نیست. یک راه غلبه بر این مشکل ممکن است در نظر گرفتن ρ به عنوان یک متغیر تصادفی و میانگین گیری روی احتمال کاوش برای همه مقادیر ρ باشد. اما با توجه به ساختار تابع G در (۵)، انتگرال گیری روی آن ممکن است منجر به عبارتی صریح و قابل محاسبه نشود. در این بخش معیار احتمال کاوش وزنی معرفی شده توسط طالبی و اسمعیل زاده (۲۰۱۱ا) را بیان می‌کنیم.

کمیت زیر را در نظر بگیرید

$$W_f(\zeta_0, \zeta) = \int_0^{\infty} G(\zeta_0, \zeta, \rho) f(\rho) d\rho. \quad (۷)$$

مقدار $W_f(\zeta_0, \zeta)$ به طرح بستگی دارد، در حالی که وابسته به ρ نیست. در حقیقت $W(\zeta_0, \zeta)$ میانگین وزنی $G(\zeta_0, \zeta, \rho)$ با تابع وزن $f(\rho)$ است. مشابه رابطه (۶) معیار جدید زیر را معرفی می‌کنیم:

$$WSP = \min_{\zeta_0 \in \zeta_1} \min_{\zeta \in A(\zeta_1; \zeta)} W_f(\zeta_0, \zeta). \quad (۸)$$

این معیار را احتمال کاوش وزنی می‌نامیم و با WSP نشان می‌دهیم. دقت کنید WSP فقط به ماتریس معلوم طرح بستگی دارد. برای یک طرح کاوش، مقادیر بزرگتر WSP مطلوب تر است و نشان دهنده توانایی بالاتر طرح در شناسایی اثر درست است. در نتیجه از WSP می‌توان برای مقایسه طرح‌های کاوش استفاده کرد. بدین منظور فرض کنید WSP_i احتمال کاوش وزنی متناظر با طرح کاوش T_i ، $i = 1, 2$ ، باشد. در این صورت تعریف زیر را داریم.

تعریف ۴.۳. طرح T_1 در کاوش اثرات غیر صفر برتر از طرح T_2 است اگر $WSP_1 > WSP_2$.

۱.۳.۳ انتخاب تابع وزن

احتمال کاوش وزنی به تابع وزن $f(\rho)$ بستگی دارد. در مقایسه طرح‌های کاوش، آزمایشگر ممکن است علاقمند به طرحی باشد که احتمال کاوش

اگر $\nu_2/2 > \tilde{n}_1^+$ باشد آنگاه بر اساس معیار II طرح D_1 بهتر از D_2 است.

اگر $\nu_2/2 > \tilde{n}_1^-$ باشد آنگاه بر اساس معیار II طرح D_2 بهتر از D_1 است.

مثال ۳.۳ (ادامه): مقادیر $c^{D_1}(\zeta_0, \zeta)$ ، $c^{D_2}(\zeta_0, \zeta)$ و $c^{D_3}(\zeta_0, \zeta)$ برای طرح‌های D_1 ، D_2 و D_3 در ماتریس‌های C_1 ، C_2 و C_3 در پیوست داده شده‌اند. همچنین مقادیر $r_1(\zeta_0, \zeta_0)$ ، $r_2(\zeta_0, \zeta_0)$ و $r_3(\zeta_0, \zeta_0)$ بصورت بردارهای r_1 ، r_2 و r_3 آورده شده‌اند. با توجه به مقادیر جدول ۳، هیچ یک از مقادیر $\tilde{n}_1^+$ و $\tilde{n}_1^-$ بزرگتر از ۴۵ = $\frac{10 \times 9}{2} = \frac{\nu_2(\nu_2-1)}{2}$ نیستند، پس براساس معیار I نمی‌توان در مورد طرح‌های D_1 و D_2 اظهار نظر کرد. همچنین هیچ کدام از مقادیر $\tilde{n}_1^+$ و $\tilde{n}_1^-$ بزرگتر از $\frac{\nu_2}{2} = \frac{10}{2} = 5$ نیستند، پس براساس معیار II نیز نمی‌توان تصمیمی گرفت.

در مقایسه D_1 در مقابل D_2 ، از جدول ۳ مقدار $\tilde{n}_1^- = 48$ که بزرگتر از $\frac{\nu_2(\nu_2-1)}{2} = 45$ است. پس براساس معیار I طرح D_2 بهتر از D_1 است. اما هیچکدام از مقادیر $\tilde{n}_1^+$ و $\tilde{n}_1^-$ بزرگتر از $\frac{\nu_2}{2} = 5$ نیستند، پس براساس معیار II نمی‌توان تصمیمی گرفت. در مقایسه D_2 در مقابل D_3 ، $\tilde{n}_1^+ = 47 > 45$ و $\tilde{n}_1^- = 8 > 5$ است. طرح D_2 بهتر از D_3 است.

۳.۳ احتمال کاوش وزنی

در بخش‌های قبل، معیار احتمال کاوش معرفی شده توسط شیراکورا و همکاران (۱۹۹۶) و معیارهای $III - I$ گوش و تجماجر (۲۰۰۲) برای انتخاب طرح کاوش بهینه بررسی شدند. همانطور که مشاهده شد کمیت (۶) به پارامتر مجهول ρ بستگی دارد و به منظور ارائه نتایج درست، مقایسه‌ها بایستی برای همه مقادیر $\rho > 0$ انجام گیرد. در مثال‌های ۱ و ۲ مشاهده شد که این کار مستلزم محاسبات حجیم و تقریباً در عمل کاری غیر ممکن است. حتی در حالتی که بتوان نمودار احتمال کاوش را رسم کرد، با توجه به شکل ۱ تصمیم گیری براساس معیار (۶) ممکن است بی نتیجه باشد. اگر چه مقایسه‌ها بر اساس معیارهای $III - I$ به مقادیر ρ بستگی ندارد، اما در بعضی حالات مانند مقایسه طرح‌های D_1 و D_2 در مثال ۳.۳، ممکن است تصمیم گیری براساس این معیارها بی نتیجه باشد. علاوه بر این، گوش و تجماجر (۲۰۰۲) با حذف ρ ، از اطلاعات موجود در مقدار پارامتر درست و σ^2 استفاده

و مدل های رقیب $M_i \in S_0$, $S_0 = S - \{M_0\}$, ارائه می کنیم. این معیار برخلاف معیارهای مبتنی بر احتمال کاوش برای همه $k \geq 1$ قابل استفاده است.

۱.۴ معیار کاوش کولبک-لیبلر

فرض کنید $f_0(y, A_{\tau_0}, \xi_{\tau_0}, \sigma)$ و $f_1(y, A_{\tau_1}, \xi_{\tau_1}, \sigma)$ به ترتیب توابع چگالی مشاهدات تحت مدل درست M_0 و مدل رقیب M_i باشند. فاصله کولبک-لیبلر براساس بردار مشاهدات $y' = (y_1, \dots, y_N)$ با مؤلفه های مستقل بصورت زیر است:

$$I_i(f_0, f_1) = \quad (12)$$

$$\int f_0(y, A_{\tau_0}, \xi_{\tau_0}, \sigma) \log \left\{ \frac{f_0(y, A_{\tau_0}, \xi_{\tau_0}, \sigma)}{f_1(y, A_{\tau_1}, \xi_{\tau_1}, \sigma)} \right\} dy,$$

که $dy = dy_1 \dots dy_N$. حال فرض کنید بردار خطا، e ، دارای توزیع نرمال با مؤلفه های مستقل $N(0, \sigma^2)$ باشد، یعنی $\mu_i = E(y) =$ آنگاه $A_1 \xi_1 + A_{\tau_1} \xi_{\tau_1}$

$$\begin{aligned} I_i(f_0, f_1) &= \frac{1}{2\sigma^2} [E_{f_1} \{ (y - \mu_i)' (y - \mu_i) \} \\ &\quad - E_{f_0} \{ (y - \mu_0)' (y - \mu_0) \}] \quad (13) \\ &= \frac{1}{2\sigma^2} (A_{\tau_0} \xi_{\tau_0} - A_{\tau_1} \xi_{\tau_1})' (A_{\tau_0} \xi_{\tau_0} - A_{\tau_1} \xi_{\tau_1}), \end{aligned}$$

که در آن E_{f_1} امید ریاضی تحت مدل M_i را نشان می دهد. یعنی فاصله کولبک - لیبلر در این حالت، فاصله بین میانگین های مدل های M_0 و M_i است. حالتی را در نظر بگیرید که در آن حداقل فاصله بین M_0 و M_i وجود داشته باشد، یعنی وقتی که (۱۳) روی همه بردار های ξ_{τ_1} حداقل شده باشد. در این صورت حداقل مقدار (۱۳) در $\xi_{\tau_1} = (A'_{\tau_1} A_{\tau_0})^{-1} A'_{\tau_1} A_{\tau_0} \xi_{\tau_0}$ اتفاق می افتد و برابر است با:

$$\begin{aligned} I_i(\rho, A_{\tau_0}) &= \min_{\xi_{\tau_1}} I_i(f_0, f_1) \\ &= \frac{1}{2} \rho' A'_{\tau_0} (I - H_i) A_{\tau_0} \rho, \quad (14) \end{aligned}$$

که $\rho = \frac{1}{\sigma^2} \xi_{\tau_0}$ و $H_i = A_{\tau_1} (A'_{\tau_1} A_{\tau_0})^{-1} A'_{\tau_1}$. حال معیار زیر را براساس فاصله KL در نظر می گیریم:

$$KL_T(\rho) = \min_S \min_{S_i} I_i(\rho, A_{\tau_0}). \quad (15)$$

تابع KL_T تابعی حقیقی از ρ است و از طریق A_{τ_0} و A_{τ_1} به طرح T بستگی دارد. مقادیر بزرگتر معیار KL_T نشان دهنده توانایی بالاتر طرح

بالاتری را به اثرات غیر صفر کوچک تر اختصاص می دهد. با توجه به این که $G(\zeta_0, \zeta, \rho)$ تابعی صعودی از ρ است، پس با افزایش مقدار ρ مقدار G و در نتیجه مقدار احتمال کاوش بدون توجه به طرح، به یک نزدیک می شود. این مسئله به این مفهوم است که هر طرح کاوش با احتمال بالایی قادر به شناسایی اثرات غیر صفر با مقدار بزرگ است. یعنی در حقیقت رقابت طرح ها برای مقادیر کوچک ρ است. از این نکته در انتخاب تابع وزن $f(\rho)$ استفاده می کنیم. $f(\rho)$ را به گونه ای انتخاب می کنیم که وزن بیشتری را به مقادیر کوچک ρ اختصاص دهد. با توجه به این مطالب، تابع های وزن چوله به راست گزینه مناسبی به نظر می رسند. در اینجا فرض می کنیم $f(\omega) = \rho^2$ ، تابع چگالی احتمال گاما با پارامتر های مناسب v و λ است. یعنی $\omega = \rho^2$ دارای توزیع $Gamma(v, \lambda)$ با میانگین $\frac{v}{\lambda}$ است. با انتخاب تابع وزن گاما انتگرال (۷) به شکل ساده و قابل محاسبه زیر تقلیل داده می شود: (طالعی و اسمعیل زاده، ۲۰۱۱a)

$$\begin{aligned} W_f(\zeta_0, \zeta) &= 1 - \mathcal{T} \left(c_1 \left(\frac{v}{\lambda} \right)^{1/2} \right) - \mathcal{T} \left(c_2 \left(\frac{v}{\lambda} \right)^{1/2} \right) \\ &\quad + 2 \mathcal{T} \left(c_1 \left(\frac{v}{\lambda} \right)^{1/2} \right) \mathcal{T} \left(c_2 \left(\frac{v}{\lambda} \right)^{1/2} \right), \quad (9) \end{aligned}$$

که $\mathcal{T}(\cdot)$ تابع توزیع تجمعی t با $2v$ درجه آزادی است.

۴ استفاده از اطلاع کولبک-لیبلر برای

ارزیابی طرح های کاوش

تمامی معیارهای ارزیابی طرح های کاوش مبتنی بر احتمال کاوش که در بخش ۳ بیان شدند، فقط برای حالت $k = 1$ قابل استفاده هستند. در این بخش، براساس اطلاع کولبک-لیبلر معیاری جهت ارزیابی طرح های کاوش برای حالت $k \geq 1$ معرفی می کنیم. در مباحث طرح های بهینه معیارهایی برای تمیز مدل ارائه شده است. لُپز^۳ و همکاران (۲۰۰۷) برای مدل غیر نرمال با در نظر گرفتن آزمون فرض

$$H_0 : M = M_i \quad v.s. \quad H_1 : M = M_0, \quad (10)$$

معیاری را براساس فاصله کولبک-لیبلر برای تمیز مدل M_0 از مدل های رقیب M_i ارائه کردند. براساس فاصله کولبک-لیبلر معیاری جهت ارزیابی توانایی طرح های کاوش در تمیز مدل درست

$$M_0 : y = A_1 \xi_1 + A_{\tau_0} \xi_{\tau_0} + e, \quad (11)$$

برابرند. در مدل (۱)، فرض کنید ξ_1 میانگین عمومی و تمامی اثرات اصلی، ξ_2 اثرات متقابل ۲- و ۳- عاملی باشد. مقادیر $KL_{D_i}(1)$ و $\frac{1}{N}KL_{D_i}(1)$ در جدول ۴ آورده شده‌اند. نتایج نشان می‌دهد که $KL_{D_4} > KL_{D_1} > KL_{D_2}$ ، یعنی طرح D_4 بهتر از طرح‌های D_1 و D_2 و طرح D_1 بهتر از طرح D_2 است.

۲.۲.۴ حالت ۲ = k

همانطور که ذکر شد، معیارهای مبتنی بر احتمال کاوش فقط برای حالت $k = 1$ قابل استفاده هستند. در حالی که معیار KL دارای این محدودیت نیست. از $KL_T(\rho)$ برای مقایسه طرح‌های D_5 و D_6 استفاده می‌کنیم. D_5 یک آرایه متوازن است که در گوش و تجمیچر (۲۰۰۲) ارائه شده است و D_6 تصویر طرح پلاکت - برمن با ۱۲ اجرا روی هر چهار ستون است. طالبی و اسمعیل زاده (۲۰۱۱a) نشان دادند که تصویر طرح پلاکت - برمن بر روی هر چهار ستون یک طرح کاوش است. طرح D_6 یک آرایه متعامد توان ۲ است. این دو طرح، طرح‌های کاوش هستند وقتی که $k = 2$ و ξ_i ، $i = 1, 2$ ، مشابه بخش قبل در نظر گرفته می‌شوند. مقادیر $KL_T(\rho)$ برای چند مقدار $\rho' = (\rho_1, \rho_2)$ در جدول ۵ داده شده‌اند. نتایج نشان دهنده برتری طرح D_5 است.

۳.۴ معیار کولبک-لیبلر مورد انتظار

اگر چه ارزیابی طرح‌های کاوش براساس معیار KL در حالت $k = 1$ ، بدون نیاز به مقدار پارامتر ρ قابل انجام است، ولی همانطور که در بخش قبلی مشاهده شد، این معیار برای $k \geq 2$ به مقدار مجهول پارامتر ρ بستگی دارد و به منظور انجام مقایسه‌های با معنی این کار بایستی برای همه مقادیر ρ انجام گیرد. بدیهی است این کار بسیار خسته کننده و حتی غیر ممکن است. به منظور غلبه بر مشکل با میانگین گیری از تابع (۱۴) روی مقادیر ρ ، طالبی و اسمعیل زاده (۲۰۱۱b) معیاری را ارائه کردند که به مقدار خاص ρ بستگی ندارد. در این بخش به معرفی این معیار می‌پردازیم.

فرض کنید ρ یک بردار تصادفی $1 \times k$ با تابع چگالی احتمال چند متغیره $f(\rho)$ باشد. کمیت زیر را در نظر بگیرید:

$$EKL_i(A_{\rho_0}) = \int I_i(\rho, A_{\rho_0}) f(\rho) d\rho. \quad (16)$$

دقت کنید $EKL_i(A_{\rho_0})$ از طریق A_{ρ_0} و H_i در (۱۴) به طرح بستگی

T در تمییز بین مدل درست و مدل های رقیب است. پس می‌توان از آن برای مقایسه طرح‌های کاوش استفاده کرد. تعریف زیر شرایط را برای رتبه بندی طرح‌های کاوش براساس معیار KL فراهم می‌کند.

تعریف ۱.۰۴. طرح‌های کاوش T_1 و T_2 با N تیمار را در نظر بگیرید. گوییم طرح T_1 در تشخیص مدل درست برتر از طرح T_2 است هرگاه به ازای همه ρ $KL_{T_1}(\rho) > KL_{T_2}(\rho)$.

۲.۴ کاربرد

در این بخش از معیار KL در (۱۵)، برای مقایسه طرح‌های کاوش جداول ۱ و ۲ استفاده می‌کنیم.

۱.۰۲.۴ حالت ۱ = k

طرح کاوشی با N اجرا را در نظر بگیرید و فرض کنید $k = 1$ باشد. واضح است که $I_i(\rho, A_{\rho_0}) = I_i(-\rho, A_{\rho_0})$ ، یعنی تابع $I_i(\rho, A_{\rho_0})$ تابعی متقارن بر حسب ρ است. همچنین داریم $I_i(\rho, A_{\rho_0}) \leq N\rho^2$ پس می‌توان گزاره زیر را بیان کرد:

گزاره ۲.۰۴. طرح کاوش T با N اجرا را در نظر بگیرید. اگر $k = 1$ باشد آنگاه نتایج زیر برای $KL_T(\rho)$ برقرار است:

$$KL_T(\rho) = KL_T(-\rho). \quad 1$$

$$0 \leq \frac{1}{N}KL_T(1) \leq 1, \rho = 1 \quad 2$$

قسمت ۱ گزاره بیان می‌کند که مقایسه طرح‌ها کافی است برای $\rho > 0$ انجام گیرد. برای $k = 1$ رابطه (۱۴) یک اسکالر است که ρ^2 به صورت یک مضرب ظاهر خواهد شد. در نتیجه در مقایسه طرح‌ها با استفاده از تعریف ۱.۰۴ کمیت ρ^2 از طرفین نامساوی حذف شده و تاثیری روی مقایسه نخواهد داشت. بنابراین با توجه به قسمت ۲، بدون از دادن کلیت مسئله کافی است مقایسه در $\rho = 1$ انجام شود.

حال براساس گزاره ۲.۰۴، از (۱۵) برای اندازه گیری قابلیت کاوش طرح‌های D_1 و D_2 در جدول ۱ و طرح D_4 در جدول ۲ استفاده می‌کنیم. طرح D_4 تصویر طرح پلاکت-برمن ۱۲ اجرایی روی ۵ ستون است. دقت کنید این طرح یک طرح متوازن و متعامد است. به این مفهوم که تمام ستون ها به تعداد یکسان علامت + و - دارند. همچنین برای هر دو ستون دلخواه تعداد ترکیب های $(++)$ ، $(+-)$ ، $(-+)$ و $(--)$

می یابد. پس EKL_T در (۱۹) به

$$EKL_T = \min_S \min_{S_i} \text{Trace}(H_i(A_{\tau_0})), \quad (21)$$

کاهش می یابد. واضح است که $EKL_T \leq kN$ است. در اینجا مجدداً طرح های D_5 و D_6 را با استفاده (۲۱) مقایسه می کنیم. مقدار EKL برای D_5 و D_6 به ترتیب برابر 10.0571 و 9.3333 است. پس طرح D_5 براساس تعریف ۳.۴ در شناسایی مدل درست توانا تر است.

۵ نتیجه گیری

احتمال کاوش به عنوان معیاری برای اندازه گیری توانایی طرح در کاوش اثرات غیر صفر توسط شیراکورا و همکاران (۱۹۹۶) معرفی شد. در صورت وجود طرح های کاوش متفاوت تحت مدل خطی یکسان، مسأله ی مقایسه توانایی کاوش این طرح ها مطرح می شود. شیراکورا و همکاران (۱۹۹۶) از احتمال کاوش جهت مقایسه طرح ها استفاده کردند. این معیار به مقادیر پارامتر نامعلوم ρ ، نسبت مقدار درست پارامتر به اغتشاش، بستگی دارد که در مقایسه بعضی طرح ها تصمیم گیری بدون نتیجه خواهد بود. معیار احتمال کاوش وزنی معرفی شده است که به مقادیر ρ بستگی ندارد و به نظر می رسد توسط این معیار مقایسه طرح ها با دقت بیشتری انجام می گیرد. این معیار با میانگین گیری وزنی نسبت به ρ تحت تابع وزن $f(\rho)$ مقدار مجهول ρ را از محاسبات حذف می کند. جهت انتخاب تابع وزن پیشنهاد می شود از توابع چگالی استفاده شود که وزن بیشتری به مقادیر کوچک تر ρ اختصاص می دهد. به نظر می رسد توابع چگالی چوله به راست مناسب باشند.

در این مقاله طرح های D_1 ، D_2 و D_3 براساس احتمال کاوش مقایسه شدند. براساس این معیار طرح D_3 طرح برتر است، در حالی که مقایسه بین طرح های D_1 و D_2 بی نتیجه است. براساس معیار های I و II گوش و تچماچر نیز مقایسه طرح D_1 و D_2 بی نتیجه است. طرح D_3 براساس معیار I بهتر از طرح D_1 ولی مقایسه D_2 و D_3 بی نتیجه است. طرح D_2 براساس هر دو معیار برتر از D_3 است. این در حالی است که طرح D_3 براساس معیار احتمال کاوش نسبت به D_2 ارجح تر بود. یعنی معیار های متفاوت قضاوت یکسانی در مورد انتخاب طرح برتر ندارند.

معیارهای مبتنی بر احتمال کاوش فقط برای حالت $k = 1$ قابل محاسبه هستند و در عمل قادر به مقایسه طرح ها برای $k \geq 2$ براساس این

دارد در حالی که به ρ وابسته نیست. به منظور ساده کردن (۱۶)، فرم درجه دوم $I_i(\rho, A_{\tau_0})$ را بصورت زیر می نویسیم:

$$I_i(\rho, A_{\tau_0}) = \sum_{i=1}^k \rho_i^2 h_{ii} + \sum_{i \neq j} \rho_i \rho_j h_{ij}, \quad (17)$$

که h_{ij} ، $i, j = 1, 2, \dots, k$ ، (i, j) -امین عنصر ماتریس $H_i(A_{\tau_0}) = A_{\tau_0}'(I - H_i)A_{\tau_0}$ برای ρ_i ، $i = 1, \dots, k$ ، مستقل و هم توزیع $EKL_i(A_{\tau_i})$ بصورت شکل صریح زیر در می آید:

$$EKL_i(A_{\tau_0}) = \text{Trace}(H_i(A_{\tau_0}))\text{var}(\rho_i) + \sum_i \sum_j h_{ij} E^{\tau}(\rho_i, \rho_j), \quad (18)$$

که $E(\rho_i)$ و $\text{var}(\rho_i)$ به ترتیب امید ریاضی و واریانس مشترک ρ_i ها است. برای طرح کاوش T معیار اصلاح شده کولبک-لیبلر مورد انتظار (EKL) را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$EKL_T = \min_S \min_{S_i} EKL_i(A_{\tau_0}). \quad (19)$$

مقادیر بزرگتر EKL دلیل بر توانایی بالاتر طرح T در تمییز بین مدل درست و مدل های رقیب است. از این معیار نیز می توان برای مقایسه طرح های کاوش بر اساس تعریف زیر استفاده کرد.

تعریف ۳.۴. طرح های کاوش T_1 و T_2 با N تیمار را در نظر بگیرید. گوئیم طرح T_1 در تشخیص مدل درست برتر از طرح T_2 است هرگاه $EKL_{T_1} > EKL_{T_2}$.

تابع $f(\rho)$ را طوری انتخاب می کنیم که وزن بیشتر را به مقادیر کوچک ρ تخصیص دهد. زیرا برای مقادیر بزرگ ρ ، همه طرح های کاوش قدرت بالایی در شناسایی مدل درست دارند. به نظر می رسد تابع وزن زیر مناسب باشد:

$$f_i(\rho_i) = \begin{cases} \frac{1}{\gamma} g(-\rho_i) & \text{if } \rho_i < 0 \\ \frac{1}{\gamma} g(\rho_i) & \text{if } \rho_i > 0 \end{cases} \quad (20)$$

که تابع $g(\rho_i)$ تابع چگالی گاما با میانگین $v\lambda$ است. برای تابع وزن (۲۰) کمیت (۱۸) بصورت زیر ساده می شود:

$$EKL_i(A_{\tau_0}) = (v\lambda^2 + v^2\lambda^2)\text{Trace}(H_i(A_{\tau_0})).$$

در مقایسه بین دو طرح در استفاده از تعریف ۳.۴ عبارت $v\lambda^2 + v^2\lambda^2$ از محاسبه حذف می شود و ارزیابی به مقایسه $\text{Trace}(H_i(A_{\tau_0}))$ تقلیل

جدول ۲: طرح های D_5 و D_4

D_5				D_4				
+	+	+	+	+	+	+	+	+
-	-	-	-	-	+	-	-	-
+	-	-	-	+	-	-	-	+
-	+	-	-	-	-	-	+	+
-	-	+	-	-	-	+	+	+
-	-	-	+	-	+	+	+	-
+	+	-	-	+	+	+	-	+
+	-	+	-	+	+	-	+	-
+	-	-	+	+	-	+	-	-
-	+	+	-	-	+	-	-	+
-	+	-	+	+	-	-	+	-
-	-	+	+	-	-	+	-	-

ماتریس های احتمال کاوش و بردارهای کمترین احتمال کاوش برای طرح های D_1 ، D_2 و D_3 در مثال های ۱ و ۲

$$SPM_1(1) = \begin{bmatrix} - & 0/9477 & 0/9771 & 0/9477 & 0/9477 & 0/9109 & 0/9771 & 0/9477 & 0/9462 & 0/9109 \\ 0/9757 & - & 0/9757 & 0/9236 & 0/9236 & 0/9236 & 0/9757 & 0/9367 & 0/9757 & 0/9236 \\ 0/9771 & 0/9477 & - & 0/9109 & 0/9477 & 0/9477 & 0/9462 & 0/9477 & 0/9771 & 0/9109 \\ 0/9757 & 0/9236 & 0/9457 & - & 0/9367 & 0/9236 & 0/9757 & 0/9236 & 0/9457 & 0/9367 \\ 0/9757 & 0/9236 & 0/9757 & 0/9367 & - & 0/9367 & 0/9457 & 0/9236 & 0/9457 & 0/9236 \\ 0/9457 & 0/9236 & 0/9757 & 0/9236 & 0/9367 & - & 0/9457 & 0/9236 & 0/9757 & 0/9367 \\ 0/9771 & 0/9477 & 0/9462 & 0/9477 & 0/9109 & 0/9109 & - & 0/9477 & 0/9771 & 0/9477 \\ 0/9757 & 0/9367 & 0/9757 & 0/9236 & 0/9236 & 0/9236 & 0/9757 & - & 0/9757 & 0/9236 \\ 0/9462 & 0/9477 & 0/9771 & 0/9109 & 0/9109 & 0/9477 & 0/9771 & 0/9477 & - & 0/9477 \\ 0/9457 & 0/9236 & 0/9457 & 0/9367 & 0/9236 & 0/9367 & 0/9757 & 0/9236 & 0/9757 & - \end{bmatrix}$$

$$SPM_2(1) = \begin{bmatrix} - & 0/8884 & 0/9646 & 0/9646 & 0/9646 & 0/9439 & 0/9646 & 0/9646 & 0/9439 & 0/9439 \\ 0/9318 & - & 0/9318 & 0/9653 & 0/9653 & 0/9653 & 0/9318 & 0/9221 & 0/9318 & 0/9653 \\ 0/9646 & 0/8884 & - & 0/9439 & 0/9646 & 0/9646 & 0/9439 & 0/9646 & 0/9646 & 0/9439 \\ 0/9646 & 0/9273 & 0/9439 & - & 0/9439 & 0/9646 & 0/9646 & 0/9646 & 0/9439 & 0/9439 \\ 0/9646 & 0/9273 & 0/9646 & 0/9439 & - & 0/9439 & 0/9439 & 0/9646 & 0/9439 & 0/9646 \\ 0/9439 & 0/9273 & 0/9646 & 0/9646 & 0/9439 & - & 0/9439 & 0/9646 & 0/9646 & 0/9439 \\ 0/9646 & 0/8884 & 0/9439 & 0/9646 & 0/9439 & 0/9439 & - & 0/9646 & 0/9646 & 0/9646 \\ 0/9646 & 0/8779 & 0/9646 & 0/9646 & 0/9646 & 0/9646 & 0/9646 & - & 0/9646 & 0/9646 \\ 0/9439 & 0/8884 & 0/9646 & 0/9439 & 0/9439 & 0/9646 & 0/9646 & 0/9646 & - & 0/9646 \\ 0/9439 & 0/9273 & 0/9439 & 0/9439 & 0/9646 & 0/9439 & 0/9646 & 0/9646 & 0/9646 & - \end{bmatrix}$$

$$MSPV_1(1) = \begin{bmatrix} 0/9457 & 0/9236 & 0/9457 & 0/9109 & 0/9109 & 0/9109 & 0/9457 & 0/9236 & 0/9457 & 0/9109 \end{bmatrix}$$

$$MSPV_2(1) = \begin{bmatrix} 0/9318 & 0/8779 & 0/9318 & 0/9439 & 0/9439 & 0/9439 & 0/9318 & 0/9221 & 0/9318 & 0/9439 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} - & 1/8284 & 2/2337 & 1/8284 & 1/8284 & 1/3940 & 2/2337 & 1/8284 & 1/6330 & 1/3940 \\ 2/1351 & - & 2/1351 & 1/4955 & 1/4955 & 1/4955 & 2/1351 & 1/6330 & 2/1351 & 1/4955 \\ 2/2337 & 1/8284 & - & 1/3940 & 1/8284 & 1/8284 & 1/6330 & 1/8284 & 2/2337 & 1/3940 \\ 2/1351 & 1/4955 & 1/6279 & - & 1/6330 & 1/4955 & 2/1351 & 1/4955 & 1/6279 & 1/6330 \\ 2/1351 & 1/4955 & 2/1351 & 1/6330 & - & 1/6330 & 1/6279 & 1/4955 & 1/6279 & 1/4955 \\ 1/6279 & 1/4955 & 2/1351 & 1/4955 & 1/6330 & - & 1/6279 & 1/4955 & 2/1351 & 1/6330 \\ 2/2337 & 1/8284 & 1/6330 & 1/8284 & 1/3940 & 1/3940 & - & 1/8284 & 2/2337 & 1/8284 \\ 2/1351 & 1/6330 & 2/1351 & 1/4955 & 1/4955 & 1/4955 & 2/1351 & - & 2/1351 & 1/4955 \\ 1/6330 & 1/8284 & 2/2337 & 1/3940 & 1/3940 & 1/8284 & 2/2337 & 1/8284 & - & 1/8284 \\ 1/6279 & 1/4955 & 1/6279 & 1/6330 & 1/4955 & 1/6330 & 2/1351 & 1/4955 & 2/1351 & - \end{bmatrix}$$

$$\tau_1 = \begin{bmatrix} 10/3226 & 7/5699 & 10/3226 & 7/5699 & 7/5699 & 7/5699 & 10/3226 & 7/5699 & 10/3226 & 7/5699 \end{bmatrix}$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} - & 1/2787 & 1/9518 & 1/9518 & 1/9518 & 1/6330 & 1/9518 & 1/9518 & 1/6330 & 1/6330 \\ 1/5193 & 0/0000 & 1/5193 & 1/9729 & 1/9729 & 1/9729 & 1/5193 & 1/4429 & 1/5193 & 1/9729 \\ 1/9518 & 1/2787 & - & 1/6330 & 1/9518 & 1/9518 & 1/6330 & 1/9518 & 1/9518 & 1/6330 \\ 1/9518 & 1/6605 & 1/6330 & - & 1/6330 & 1/9518 & 1/9518 & 1/9518 & 1/6330 & 1/6330 \\ 1/9518 & 1/6605 & 1/9518 & 1/6330 & - & 1/6330 & 1/6330 & 1/9518 & 1/6330 & 1/9518 \\ 1/6330 & 1/6605 & 1/9518 & 1/9518 & 1/6330 & - & 1/6330 & 1/9518 & 1/9518 & 1/6330 \\ 1/9518 & 1/2787 & 1/6330 & 1/9518 & 1/6330 & 1/6330 & - & 1/9518 & 1/9518 & 1/9518 \\ 1/9518 & 1/2144 & 1/9518 & 1/9518 & 1/9518 & 1/9518 & 1/9518 & - & 1/9518 & 1/9518 \\ 1/6330 & 1/2787 & 1/9518 & 1/6330 & 1/6330 & 1/9518 & 1/9518 & 1/9518 & - & 1/9518 \\ 1/6330 & 1/6605 & 1/6330 & 1/6330 & 1/9518 & 1/6330 & 1/9518 & 1/9518 & 1/9518 & - \end{bmatrix}$$

$$\tau_2 = \begin{bmatrix} 9/1429 & 6/4762 & 9/1429 & 9/1429 & 9/1429 & 9/1429 & 9/1429 & 9/1429 & 9/1429 & 9/1429 \end{bmatrix}$$

$$C_3 = \begin{bmatrix} - & 1/4926 & 1/3333 & 2/0367 & 2/0367 & 1/7855 & 1/3333 & 1/4926 & 1/4378 & 1/7855 \\ 1/3819 & - & 1/8856 & 1/9626 & 1/9626 & 1/7213 & 1/8856 & 1/6330 & 2/0798 & 1/7213 \\ 1/3333 & 2/0367 & - & 1/7855 & 1/4926 & 2/0367 & 1/6330 & 2/0367 & 2/3094 & 1/1260 \\ 1/8856 & 1/9626 & 1/6531 & - & 1/6330 & 1/9626 & 1/3819 & 1/9626 & 1/8214 & 1/3333 \\ 1/8856 & 1/9626 & 1/3819 & 1/6330 & - & 1/3333 & 1/6531 & 1/9626 & 1/8214 & 1/9626 \\ 1/6531 & 1/7213 & 1/8856 & 1/9626 & 1/3333 & - & 1/0424 & 1/7213 & 2/0798 & 1/6330 \\ 1/3333 & 2/0367 & 1/6330 & 1/4926 & 1/7855 & 1/1260 & - & 2/0367 & 2/3094 & 2/0367 \\ 1/3819 & 1/6330 & 1/8856 & 1/9626 & 1/9626 & 1/7213 & 1/8856 & - & 2/0798 & 1/7213 \\ 1/1740 & 1/8342 & 1/8856 & 1/6063 & 1/6063 & 1/8342 & 1/8856 & 1/8342 & - & 1/8342 \\ 1/6531 & 1/7213 & 1/0424 & 1/3333 & 1/9626 & 1/6330 & 1/8856 & 1/7213 & 2/0798 & - \end{bmatrix}$$

$$\tau_3 = \begin{bmatrix} 7/1111 & 8/2963 & 7/1111 & 8/2963 & 8/2963 & 8/2963 & 7/1111 & 8/2963 & 10/6667 & 8/2963 \end{bmatrix}$$

جدول ۳: مقایسه طرح‌های D_1 ، D_2 و D_3 بر اساس معیارهای $III - I$

	$\tilde{n}_2^-$	$\tilde{n}_2^+$	$\tilde{n}_3^+$	$\tilde{n}_1^-$	$\tilde{n}_1^+$
$D_1 v.s. D_2$	۱	۴	۵	۱۳	۴۴
$D_1 v.s. D_3$	۷	۰	۳	۱۹	۴۸
$D_2 v.s. D_3$	۰	۲	۸	۲۶	۱۷

جدول ۴: مقایسه طرح های D_1, D_2 و D_4

D_2	D_1	D_4	
۶/۶۶۶۷	۹/۰۰۰۰	۱۰/۶۶۷	$KL_{D_i}(1)$
۰/۵۵۵۶	۰/۷۵۰۰	۰/۸۸۸۹	$\frac{1}{N}KL_{D_i}(1)$

جدول ۵: مقایسه طرح های D_4 و D_5

ρ_2	-۲	-۱/۵	-۱	-۰/۵	۰/۵	۱	۱/۵	۲
ρ_1	D_4							
-۲	۴۰/۲۲۸	۲۲/۶۲۸	۱۰/۰۵۷	۲/۵۱۴	۲/۵۱۴	۱۰/۰۵۷	۲۲/۶۲۸	۴۰/۲۲۸
-۱/۵	۲۲/۶۲۸	۲۲/۶۲۸	۱۰/۰۵۷	۲/۵۱۴	۲/۵۱۴	۱۰/۰۵۷	۲۲/۶۲۸	۲۲/۶۲۸
-۱	۱۰/۰۵۷	۱۰/۰۵۷	۱۰/۰۵۷	۲/۵۱۴	۲/۵۱۴	۱۰/۰۵۷	۱۰/۰۵۷	۱۰/۰۵۷
-۰/۵	۲/۵۱۴	۲/۵۱۴	۲/۵۱۴	۲/۵۱۴	۲/۵۱۴	۲/۵۱۴	۲/۵۱۴	۲/۵۱۴
	D_5							
-۲	۳۷/۳۳۳	۲۱	۹/۳۳۳	۲/۳۳۳	۲/۳۳۳	۹/۳۳۳	۲۱	۳۷/۳۳۳
-۱/۵	۲۱	۲۱	۹/۳۳۳	۲/۳۳۳	۲/۳۳۳	۹/۳۳۳	۲۱	۲۱
-۱	۹/۳۳۳	۹/۳۳۳	۹/۳۳۳	۲/۳۳۳	۲/۳۳۳	۹/۳۳۳	۹/۳۳۳	۹/۳۳۳
-۰/۵	۲/۳۳۳	۲/۳۳۳	۲/۳۳۳	۲/۳۳۳	۲/۳۳۳	۲/۳۳۳	۲/۳۳۳	۲/۳۳۳

مراجع

- [1] Esmailzadeh, N., Talebi, H., Momihara, k. and Jimbo, M. (2011). A new series of small size search designs for 2^m factorial experiments. *J. Statist. plann. Inference*, **141**, 1567-1574.
- [2] Ghosh, S. and Talebi, H. (1993). Main effect plans with additional search property for factorial experiments. *J. Statist. Plann. Inference*, **36**, 367-384.
- [3] Ghosh, S. and Teschmacher, L. (2002). Comparisons of search designs using search probabilities, *J. Statist. Plann. Inference*, **104**, 439-458.
- [4] Ghosh, S., Shirakura, T. and Srivastava, J. N. (2007). Model identification using search linear models and search designs. Entropy, search, complexity, 85-112, Bolyai Soc. Math. Stud., 16, Springer, Berlin.
- [5] Lopez-Fidalgo, J., Tommasi, C. and Trandafir, P. C. (2007). An optimal experimental design criterion for discrimination between non-normal models. *J. R. Statist. Soc. B*, **69**, 231-242.
- [6] Shirakura, T., Takahashi, T. and Srivastava, J. N. (1996). Searching probabilities for nonzero effects in search designs for the noisy case. *Ann. Statist.*, **24**, 6, 2560-2568.
- [7] Srivastava, J. N. (1975). Designs for searching non-negligible effects. In: Srivastava, J.N. (Ed.), A Survey of Statistical Design and Linear Models. North-Holland, Elsevier, Amsterdam, pp. 507-519.

- [8] Srivastava, J. N. (1977). Optimal search designs or designs optimal under bias free optimality criteria. In: S. S. Gupta and Moore, D. S. eds., Statistical Decision Theory and Related Topics, Vol.2, 375-409.
- [9] Talebi, H. and Esmailzadeh, N. (2011a). Weighted searching probability for classes of equivalent search designs comparison. *Comm. Statist. Theory Methods*, **40**, 4, 635-647.
- [10] Talebi, H. and Esmailzadeh, N. (2011b). Using Kullback-Leibler distance for performance evaluation of search designs. *Bulletin Iranian Math. Soc.* **37**, 4, 269-279.