

مروری بر طرح‌های کاوش و معیار‌های ارزیابی آنها

نیز اسمعیل زاده^۱

چکیده:

در این مقاله طرح‌های کاوش معرفی شده در سری‌واستوا (۱۹۷۵) مرور می‌شوند. در یک مساله خاص ممکن است چند طرح کاوش با تعداد اجرهای یکسان وجود داشته باشند. بحث معیار‌های ارزیابی طرح‌های کاوش موضوع دیگر مطرح شده در این مقاله است. معیار‌های مبتنی بر احتمال کاوش و معیار کولبک - لیبلر مورد انتظار همراه با مثال‌های مطرح شده اند.

واژه‌های کلیدی: طرح کاوش، مدل خطی کاوش، احتمال کاوش، فاصله کولبک - لیبلر.

طرح‌هایی ساخت که با تعداد ترکیب‌های تیماری نسبت^۱ کم، اجازه جستجو برای تعداد محدودی اثرات متقابل مراتب پایین را بدهد؟ برای برآورده همه اثرات مرتبه پایین، مثلاً اثرات متقابل ۲ عاملی، طرح‌های کسری باقاعدۀ دارای تعداد اجراهای زیادی هستند. از طرفی، از قبل نمی‌توان گفت که کدام یک از اثرات متقابل، ممکن است معنی دار باشند. پس به چه طریق می‌توان تعداد اثرات متقابل را محدود کرد؟ برای غلبه بر این مشکل به جای مشخص کردن اثرات معینی، فرض می‌کنیم که تعداد محدودی، مثلاً k اثر در بین مجموعه‌ای از اثرات، معنی دار هستند و به دنبال ساخت طرح‌هایی خواهیم بود که توانایی شناسایی k اثر، در بین مجموعه‌ای از اثرات را داشته باشد و آنها را همراه با همه اثرات، در مجموعه‌ای دیگر شامل اثرات مورد علاقه برآورد کنند.

این ایده را برای نخستین بار سری‌واستوا (۱۹۷۵) مطرح کرد و طرح‌هایی با چنین قابلیتی را طرح کاوش نامید. مدل‌های خطی معمولی توانایی شناسایی k اثر غیر صفر را با استفاده از تعداد اندکی ترکیب تیماری نسبت به همه اجراهای ممکن برای یک آزمایش، ندارند. در نتیجه سری‌واستوا متناظر با طرح کاوش، مدل‌های خطی کاوش را نیز معرفی کرد. این موضوع در بخش ۲ مطرح می‌شود. در یک مساله خاص ممکن است چندین طرح کاوش وجود داشته باشد. مساله انتخاب

۱ مقدمه

طرح‌های عاملی به عنوان طرح‌هایی کارا جهت مطالعه اثر دو یا بیش از دو عامل، بر روی متغیر پاسخ مورد نظر، شناخته شده هستند. اگرچه این طرح‌ها، قادر به برآورد تمام اثرات عاملی هستند، اما با افزایش تعداد عوامل، تعداد اجرهای آن‌ها به صورت نمایی افزایش پیدا می‌کنند و لذا در عمل قابل اجرا نیستند. ممکن است این سوال مطرح شود، آیا همیشه ضروری است تمامی ترکیبات تیماری برای یک آزمایش عاملی انجام شود یا می‌توان تعدادی از آنها را حذف کرد؟ نظر به مستندات تجربی، تعداد عوامل تاثیر گذار روی یک سیستم اندک هستند. در حقیقت طبق اصل تُنک بودن اثرات، تعداد عوامل موثر روی متغیر پاسخ، اندک هستند. همچنین در یک آزمایش عاملی، تعداد زیادی اثر متقابل وجود دارد. اما طبق اصل سلسله مراتبی، اثرات مراتب پایین دارای اهمیت بیشتری نسبت به اثرات مراتب بالا هستند. پس، ممکن است بینیریم اثرات متقابل مراتب بالا ناچیز هستند. فرض ناچیز بودن همه اثرات متقابل، غیر واقعی به نظر می‌رسد، به طوری که حتی اگر فقط یک اثر غیر قابل اغماض وجود داشته باشد، این فرض منجر به برآورد اریب اثرات عاملی خواهد شد. حال این سؤال مطرح می‌شود که آیا می‌توان

^۱ گروه آمار دانشگاه کردستان

توسط محققان متعدد را می توان در گوش (۱۹۹۶) و گوش و همکاران (۲۰۰۷) مشاهده کرد.

۳ معیار های ارزیابی طرح های کاوش مبتنی

بر احتمال کاوش

بحث انتخاب طرح های کاوش بهینه و معیار هایی برای انتخاب این طرح ها، توسط سریو استوا (۱۹۷۷) مطرح شد. هر چند شرط سریو استوا برای طرح کاوش بودن در حالت وجود اغتشاش در مدل کافی نیست اما همچنان یک شرط لازم است. در این حالت شیراکورا و همکاران (۱۹۹۶) معیار احتمال کاوش را جهت انتخاب طرح محتمل تر برای شناسایی اثرات غیر صفر معرفی کردند. در توسعه و بهبود نتایج شیراکورا و همکاران، گوش و تچماچر (۲۰۰۲) و همچنین طالی و اسمعیل زاده (۲۰۱۱a) معیار های متفاوتی را مبتنی بر احتمال کاوش ارائه کردند و از آنها برای انتخاب طرح کاوش برتر، در بین مجموعه طرح های کاوش ارائه شده، استفاده کردند. در این بخش، معیار های ارزیابی مبتنی بر احتمال کاوش را بطور مختصر مورد بررسی قرار می دهیم.

۱.۳ احتمال کاوش

سریو استوا (۱۹۷۵) علاوه بر معرفی طرح های کاوش، فرایندی را جهت کاوش اثرات غیر صفر بردار ξ_2 معرفی کرد. فرض کنید S کلاس همه $(\nu_2)_k$ زیر مدل از مدل (۱) که شامل بردار ξ_1 و k تا از پارامتر های بردار ξ_2 هستند، باشد. یعنی مجموعه مدل های

$$S = \{M_i : y = A_1 \xi_1 + A_2 \xi_2 + e\}, \quad (3)$$

که در آن $\xi_2 = \xi - A_1 \xi_1$ مین بردار $1 \times k$ در بین $(\nu_2)_k$) حالت ممکن از بردار $A_2 \xi_2$ زیر ماتریس $N \times k$ متناظر آن از A_2 است. هر دو مدل در این کلاس در پارامتر های بردار ξ_2 مشترک ولی دارای مجموعه ای k عضوی از پارامتر های بردار ξ_2 هستند که در بعضی یا همه عناصر متفاوتند. مسئله کاوش k اثر غیر صفر از بردار ξ_2 در مدل (۱)، در حقیقت مسئله انتخاب یکی از مدل ها در مجموعه S است. سریو استوا از مجموع مربعات خطای (SSE) جهت شناسایی مدل درست استفاده کرد. گوییم مدل M_i برازش بهتری نسبت به مدل M_j دارد هرگاه دارای SSE کمتری باشد. در فرایند

طرح برتر جهت شناسایی اثرات غیر صفر در حالت $1 = k$ برا ساس معیار احتمال کاوش و معیار های مربوط در بخش ۳ بحث می شود. در بخش ۴ معیاری براساس فاصله کولبک - لیبلر برای انتخاب طرح کاوش ارایه می شود که محدود به حالت $1 = k$ نیست.

۲ طرح کاوش

مدل خطی زیر را برای بردار مشاهدات $(1 \times N) y$ در نظر می گیریم:

$$y = A_1 \xi_1 + A_2 \xi_2 + e, \quad Var(e) = \sigma^2 I, \quad (1)$$

که در آن $(1 \times \nu_1) A_1$ و $(N \times \nu_2) A_2$ ماتریس های طرح و معلوم هستند، $(1 \times \nu_1) \xi_1$ و $(1 \times \nu_2) \xi_2$ بردار پارامتر ها و $e(N \times 1)$ بردار خطاست. فرض می کنیم حداقل k تا از اثرات بردار ξ_2 غیر صفر باشند که k نسبت به ν_2 کوچک است. هدف برآورد پارامتر های بردار ξ_1 و شناسایی و برآورد k پارامتر بردار ξ_2 است. طرحی که توانایی حل این مسئله را دارد طرح کاوش نامیده می شود. همچنین مدل (۱) را مدل خطی کاوش می نامند. این طرح ها توسط سریو استوا معرفی شدند.

مدل (۱) را در نظر بگیرید و فرض کنید $\sigma^2 = 0$ (بدون اغتشاش) باشد. طرح T یک طرح کاوش است، اگر و تنها اگر، برای هر زیر

ماتریس $(2k \times 2k) A_{22}$ از $A_{22}(N \times 2k)$ داشته باشیم:[۶]

$$rank[A_1 : A_{22}] = \nu_1 + 2k. \quad (2)$$

هر چند حالت $\sigma^2 = 0$ در عمل ممکن است رخ ندهد، شرط (۲) در ساختن طرح های کاوش از اهمیت زیادی برخوردار است. در حقیقت شرط (۲) در حالت $\sigma^2 > 0$ (با اغتشاش) نیز یک شرط لازم است. بنابراین در این مقاله منظور از طرح کاوش، طرحی است که شرط (۲) را برقرار کند. تعداد زیر مدل های ممکن از مدل (۱) که شامل بردار ξ_1 و k تا از پارامتر های بردار ξ_2 هستند، برایر $(\nu_2)_k$ است. شرط (۲) امکان برآورد پارامتر ها و تمایز بین هر دو مدل از کلاس مدل های ممکن را فراهم می کند. بنابراین، یک طرح کاوش شناسایی و کاوش k اثر غیر صفر ξ_2 و سپس برآورد آنها همراه با اثرات بردار ξ_2 را ممکن می سازد. تحقیق برقراری شرط، مستلزم بررسی رتبه تعداد زیادی ماتریس است که کاری حجمی و پر محاسبه است. بعد از معرفی طرح های کاوش توسط سریو استوا، تحقیقات زیادی در زمینه ساختن این طرح ها و یافتن شروط معادل شرط (۲) صورت گرفت. فهرستی از طرح های کاوش ساخته شده

طرح داده شده T ، احتمال زیر را به عنوان احتمال کاوش معرفی کردند:

$$P_T(\rho) = \min_{\zeta_0 \in \mathcal{E}_T} \min_{\zeta \in A(\zeta_0; \zeta)} G(\zeta_0, \zeta, \rho), \quad (6)$$

که در آن $(\zeta_0; \mathcal{E}_T)$ مجموعه‌ی همه ζ ‌ها از \mathcal{E}_T است که حداقل یکی از اثرات آنها با اثرات ζ یکسان نیست. مقادیر بزرگ $P_T(\rho)$ نشان دهنده اطمینان بیشتر به شناسایی اثرات غیر صفر در \mathcal{E}_T بوسیله طرح T است. از $P_T(\rho)$ می‌توان به عنوان معیاری جهت مقایسه طرح‌های کاوش استفاده و تعریف زیر را بیان کرد.

تعویف ۱۰.۳ طرح‌های کاوش T_1 و T_2 را در نظر بگیرید. گوییم طرح T_1 در کاوش اثرات غیر صفر برتر از طرح T_2 است هرگاه به ازای همه $\rho > 0$ ، $P_{T_1}(\rho) > P_{T_2}(\rho)$ باشد.

مثال ۲۰.۳ طرح‌های کاوش D_1 ، D_2 و D_3 داده شده در جدول ۱ را در نظر بگیرید. در مدل (۱) فرض کنید که بردار γ شامل میانگین عمومی و اثرات اصلی و بردار ζ شامل اثرات متقابل دو و سه عاملی باشد. همچنین فرض کنید $k = 1$ باشد. طرح D_1 را اسمعیل زاده و همکاران (۲۰۱۱) و طرح‌های D_2 و D_3 را گوش و طالبی (۱۹۹۳) ارائه کردند. دقت کنید که طرح‌های D_2 و D_3 فقط در اجرای هفتم متفاوت هستند. نمودار (ρ) برای D_1 ، D_2 و D_3 در فاصله $0 < \rho < 1$ در شکل ۱ ارائه شده است. با توجه به نمودار و تعویف ۱۰.۳ مشاهده می‌کنیم که طرح D_3 در کاوش یک اثر متقابل غیر صفر بهتر از طرح‌های D_1 و D_2 است. اما در مورد طرح‌های D_1 و D_2 با استفاده از این معیار نمی‌توان بصورت کلی تصمیم گرفت. برای مقادیر کوچک ρ طرح D_2 بهتر از D_1 است و برای مقادیر بزرگ ρ بر عکس.

۲۰.۳ معیارهای گوش و تچماچر

برای هر مدل درست M_0 ، $(\nu_2 - 1)$ مدل رقیب وجود دارد. چون مدل درست متناظر پارامتر غیر صفر ζ از قبل مشخص نیست پس همه $(\nu_2 - 1)$ حالت ممکن برای زوج مدل‌های (M_0, M_i) را در نظر می‌گیریم. پس برایتابع (ζ_0, ζ, ρ) $G_i(\zeta_0, \zeta, \rho)$ در (۵)، $(\nu_2 - 1)$ مقدار به ازای هر مقدار معلوم ρ وجود دارد. حال برای هر طرح کاوش D_i ، ماتریس $\nu_2 \times \nu_2$ که درایه‌های آن تابع (ζ_0, ζ, ρ) $G_i(\zeta_0, \zeta, \rho)$ هستند، را می‌توان تشکیل داد. ستون‌های این ماتریس متناظر با همه حالات ممکن برای مدل درست، M_0 ، و سطرهای آن متناظر با هر مدل رقیب، M_i ، هستند.

کاوش مجموع مربیعات خطای همه $(\nu_2)_k$ مدل ممکن را محاسبه کرده و مدل دارای کمترین مقدار SSE را به عنوان مدل درست انتخاب می‌کنیم. در حالت بدون اغتشاش مدل درست و در حقیقت اثرات غیر صفر ζ بطور قطعی شناسایی می‌شوند. زیرا در این حالت مشاهدات و برآورده آنها دقیقاً برابرند و SSE برابر صفر است. علی‌رغم اهمیت حالت بدون اغتشاش در ساختن طرح‌های کاوش، همانطور که قبل ذکر شد در عمل مدل‌های آماری دارای اغتشاش $(\sigma^2 > 0)$ هستند و در این حالت ممکن است فرایند کاوش، مدل درست را به دلیل ساختار تصادفی مجموع مربیعات خطا شناسایی نکند. پس در حالت وجود اغتشاش، حال سوالی که مطرح می‌شود این است که در بین چند طرح کاوش کدام یک شانس بالاتری برای شناسایی مدل درست در کلاس مدل‌های ممکن دارد؟ برای مدل داده شده M_0 و مدل رقیب M_i احتمال زیر را در نظر بگیرید:

$$P[SSE(M_0) < SSE(M_i) | M_0, M_i, \sigma^2]. \quad (4)$$

این احتمال در حقیقت احتمال انتخاب مدل درست M_0 نسبت به مدل رقیب M_i است که به مقدار σ^2 بستگی دارد. شیراکورا و همکاران (۱۹۹۶) ساختار تصادفی SSE را بررسی کردند و در حالت $k = 1$ تحت خطای نرمال عبارت زیر را برای محا سبه احتمال (۳) بدست آوردن:

$$G(\zeta_0, \zeta, \rho) = 1 - \Phi(c_1\rho) - \Phi(c_2\rho) + 2\Phi(c_1\rho)\Phi(c_2\rho) \quad (5)$$

$$\begin{aligned} c_1 &= \text{تابع توزیع نرمال استاندارد است و} \\ c_2 &= c_1(\zeta_0, \zeta) = \left(\frac{r(\zeta_0, \zeta)}{\sqrt{2}} (1 - x(\zeta_0, \zeta)) \right)^{1/2} \\ (\gamma, \eta) &= c_2(\zeta_0, \zeta) \text{ برای} \\ &\quad (\zeta_0, \zeta_0), (\zeta_0, \zeta), (\zeta, \zeta) \end{aligned}$$

که در آن $\Phi(\cdot)$ تابع توزیع نرمال استاندارد است و $r(\gamma, \eta) = A'_{21}(\gamma)[I - A_1(A'_1 A_1)^{-1} A'_{21}]\eta$. $x(\zeta_0, \zeta) = r(\zeta_0, \zeta)/[r(\zeta_0, \zeta)r(\zeta, \zeta)]^{1/2}$ تابع G از طریق c_1 و c_2 به طرح بستگی دارد. G تابعی متقارن و صعودی نسبت به ρ است. پس بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض می‌کنیم $|\zeta_0|/\sigma = \rho$. واضح است که برای ζ معینی $1 - \nu_2$ مقدار برای (۴) وجود دارد. دقت کنید، در مرحله انتخاب طرح و قبل از انجام آزمایش اثر غیر صفر نامعلوم است. با در نظر گرفتن همه $(\nu_2 - 1)$ حالت ممکن برای زوج (ζ_0, ζ) شیراکورا و همکاران (۱۹۹۶) برای

$n_2 = 42$ و $n_1^- = 48$ است. دقت کنید که $10 = \frac{5}{7}$ است. پس براساس معیار I طرح D_2 بهتر از طرح D_1 است. چون $n_2^+ = 6$ و $n_1^- = 4$ ، براساس معیار II طرح D_1 بهتر از طرح D_2 است. $GMSP_1(1) - GMSP_2(1) = \frac{1}{9109} - \frac{1}{8779} > 0.033$ ، یعنی براساس معیار III طرح D_1 بهتر از طرح D_2 است.

در مثال ۳.۳ طرح‌های D_1 و D_2 برای $\rho = 1$ مقایسه شدند. به منظور ارائه مقایسه جامع و درست بایستی مقایسه به ازای همه $> \rho$ انجام گیرد لیکن بدیهی است که انجام این کار در عمل امکان پذیر نیست. گوش و تچماچر (۲۰۰۲) روشی را ارائه کردند که در آن بدون نیاز به مقدار ρ ، مقایسات براساس معیارهای $I - III$ قابل انجام است. فرض کنید (ζ_0, ζ_0) و c^{D_i} مقادیر (ζ_0, ζ_0) و $r_i(\zeta_0, \zeta_0)$ برای طرح D_i باشند، که در c_1 ، x با قدر مطلقوش جایگزین شده است. دقت کنید که مقادیر (ζ_0, ζ_0) و $r(\zeta_0, \zeta_0)$ به پارامتر مجھول ρ بستگی ندارند. با این جایگزینی می‌توان رابطه (۵) را دویاره نویسی کرد بطوری که فقط به مقدار c_1 و ρ بستگی داشته باشد. گوش و تچماچر (۲۰۰۲) نشان دادند، مساله مقایسه احتمال کاوش به ازای همه $> \rho$ به مقایسه مقادیر c_1 و r که به ρ بستگی ندارند، تقلیل پیدا می‌کند.

حال برای طرح‌های مفروض D_1 و D_2 ، سه حالت زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{الف) } r_1(\zeta_0, \zeta_0) \geq r_2(\zeta_0^*, \zeta_0^*) \text{ و } c^{D_1}(\zeta_0^*, \zeta_0^*) \geq c^{D_2}(\zeta_0^*, \zeta_0^*)$$

$$\text{ب) } r_1(\zeta_0, \zeta_0) \leq r_2(\zeta_0^*, \zeta_0^*) \text{ و } c^{D_1}(\zeta_0^*, \zeta_0^*) \leq c^{D_2}(\zeta_0^*, \zeta_0^*)$$

ج) $r_1(\zeta_0, \zeta_0) > r_2(\zeta_0^*, \zeta_0^*)$ و $c^{D_1}(\zeta_0, \zeta_0) < c^{D_2}(\zeta_0^*, \zeta_0^*)$ یا $r_1(\zeta_0, \zeta_0) < r_2(\zeta_0^*, \zeta_0^*)$ و $c^{D_1}(\zeta_0, \zeta_0) > c^{D_2}(\zeta_0^*, \zeta_0^*)$ در مقایسه طرح D_1 در مقابل D_2 ، تحت شرایط معیار I ، فرض کنید \tilde{n}_1^+ و \tilde{n}_2^+ تعداد مواردی باشد که به ترتیب در شرایط الف، ب و ج با $\zeta^* = \zeta_0$ صدق می‌کنند. آنها براساس قواعد زیر در مورد مقایسه دو طرح عمل کردند:

اگر $\frac{1}{2}(\nu_2 - 1) > \nu_2 \times (\nu_2 - 1)\tilde{n}_1^+$ آنگاه براساس معیار I طرح D_1 بهتر از D_2 است.

اگر $\frac{1}{2}(\nu_2 - 1) > \nu_2 \times (\nu_2 - 1)\tilde{n}_2^-$ آنگاه براساس معیار I طرح D_2 بهتر از D_1 است.

حال تحت شرایط معیار II ، فرض کنید \tilde{n}_1^+ ، \tilde{n}_2^- و \tilde{n}_2^+ تعداد مواردی باشد که به ترتیب در شرایط الف، ب و ج با $\zeta^* = \zeta_0$ صدق می‌کنند.

این ماتریس را ماتریس احتمال کاوش، $SPM_i(\rho)$ ، می‌نامند. چون مدل درست M متفاوت از هر مدل رقیب M_i است، پس درایه‌های روی قطر اصلی بی معنی هستند. گوش و تچماچر (۲۰۰۲)، براساس ماتریس احتمال کاوش، سه معیار جهت مقایسه طرح‌های کاوش معرفی کردند، که در ادامه به صورت خلاصه به آنها اشاره می‌شود.

معیار I : های طرح D_1 و D_2 را در نظر بگیرید. برای مقایسه این دو طرح از تفاضل دو ماتریس احتمال کاوش متناظر آنها استفاده می‌کنیم. فرض کنید n_1^+ و n_2^- به ترتیب تعداد مقادیر مثبت و منفی درایه‌های ماتریس $(SPM_1(\rho) - SPM_2(\rho))$ به ازای مقدار ρ داده شده‌ای باشند. واضح است که $(\nu_2 - 1)n_1^- + n_1^+ \leq \nu_2(\nu_2 - 1)$ است هرگاه به ازای همه $> \rho$ ، $n_1^+ > \nu_2(\nu_2 - 1)/2$ بنا بر این می‌توان گفت که براساس معیار I طرح D_1 بهتر از طرح D_2 باشد.

معیار II : هر یک از ستون‌های ماتریس احتمال کاوش، متناظر با اثری است که غیر صفر فرض شده است. کمترین مقدار احتمال کاوش در هر ستون را در نظر بگیرید و بردار کمترین احتمال کاوش، $MSPV_i(\rho)$ ، را برای طرح i تشکیل دهید. برای طرح‌های D_1 ، D_2 ، فرض کنید n_1^+ و n_2^- به ترتیب تعداد مقادیر مثبت و منفی درایه‌های بردار $(MSPV_1(\rho) - MSPV_2(\rho))$ باشند. $\nu_2 \leq n_1^+ + n_2^-$ ، بنابراین می‌توان گفت که براساس معیار II طرح D_1 بهتر از طرح D_2 است هرگاه به ازای همه $> \rho$ ، $n_1^+ > \nu_2/2$ باشد.

معیار III : به منظور به حداقل رساندن تعداد مقایسه‌ها، می‌توان از کمینه مقدار احتمال کاوش، $GMSP_i(\rho)$ ، در ماتریس احتمال کاوش طرح D_i می‌توان استفاده کرد. براساس معیار III طرح D_1 بهتر از طرح D_2 است هرگاه به ازای همه $> \rho$ ، $GMSP_1(\rho) - GMSP_2(\rho) > 0$. همان معیار معرفی شده در (۵) است.

مثال ۳.۰۳. مجددًا طرح‌های کاوش D_1 و D_2 داده شده در جدول ۱ را در نظر بگیرید. D_1 و D_2 را براساس معیارهای $I - III$ در $\rho = 1$ مقایسه می‌کنیم. ماتریس‌های احتمال کاوش و بردارهای کمترین احتمال کاوش برای وقتی که ۶ شامل اثرات متقابل دو عاملی است در پیوست ارائه شده‌اند. با توجه به ماتریس‌های احتمال کاوش،

نکرده‌اند. مقایسه طرح‌ها به دلیل وجود متغیرهای غیر قابل کنترل در عمل، بدون در نظر گرفتن مقدار σ^2 حتی ممکن است بی معنی باشد. ممکن است متغیرهای غیر قابل کنترلی که در آزمایش در نظر گرفته نشده‌اند، اثر متفاوتی روی خطا داشته باشند و منجر به تولید واریانس متفاوت برای طرح‌های مختلفی تحت مدل یکسانی شوند. این مسأله، منجر به داشتن طرح‌های با میزان ρ متفاوتی برای اثر درست μ می‌شود. در نتیجه ممکن است مقایسه طرح‌ها در یک مقدار مشخص و یکسان ρ نادرست باشد. مقدار احتمال کاوش معرفی شده توسط شیراکورا و همکاران در این حالت کارا نیست. یک راه غلبه بر این مشکل ممکن است در نظر گرفتن ρ به عنوان یک متغیر تصادفی و میانگین گیری روی احتمال کاوش برای همه مقادیر ρ باشد. اما با توجه به ساختارتابع G در (۵)، انتگرال گیری روی آن ممکن است منجر به عبارتی صریح و قابل محاسبه نشود. در این بخش معیار احتمال کاوش وزنی معرفی شده توسط طالی و اسمعیل زاده (۲۰۱۱a) را بیان می‌کنیم.

کمیت زیر را در نظر بگیرید

$$W_f(\zeta_0, \zeta) = \int_0^\infty G(\zeta_0, \zeta, \rho) f(\rho) d\rho. \quad (7)$$

مقدار $W_f(\zeta_0, \zeta)$ به طرح بستگی دارد، در حالی که وابسته به ρ نیست. در حقیقت $W(\zeta_0, \zeta)$ میانگین وزنی $G(\zeta_0, \zeta, \rho)$ با تابع وزن $f(\rho)$ است. مشابه رابطه (۶) معیار جدید زیر را معرفی می‌کنیم:

$$WSP = \min_{\zeta_0 \in \zeta_0} \min_{\zeta \in A(\zeta_0; \zeta)} W_f(\zeta_0, \zeta). \quad (8)$$

این معیار را احتمال کاوش وزنی می‌نامیم و با WSP نشان می‌دهیم. دقت کنید WSP فقط به ماتریس معلوم طرح بستگی دارد. برای یک طرح کاوش، مقادیر بزرگتر WSP مطلوب‌تر است و نشان دهنده توانایی بالاتر طرح در شناسایی اثر درست است. در نتیجه از WSP می‌توان برای مقایسه طرح‌های کاوش استفاده کرد. بدین منظور فرض کنید i احتمال کاوش وزنی متناظر با طرح کاوش T_i ، $i = 1, 2$ باشد. در این صورت تعریف زیر را داریم.

تعریف ۴.۰.۳. طرح T_1 در کاوش اثرات غیر صفر برتر از طرح T_2 است اگر $WSP_1 > WSP_2$.

۱۰.۳.۰۳ انتخاب تابع وزن

احتمال کاوش وزنی به تابع وزن $f(\rho)$ بستگی دارد. در مقایسه طرح‌های کاوش، آزمایشگر ممکن است علاقمند به طرحی باشد که احتمال کاوش

اگر $\nu_2/2 < \tilde{n}_2^+$ باشد آنگاه بر اساس معیار II طرح D_1 بهتر از D_2 است.

اگر $\nu_2/2 < \tilde{n}_2^-$ باشد آنگاه بر اساس معیار II طرح D_2 بهتر از D_1 است.

مثال ۳۰.۳ (ادامه): مقادیر (ζ_0, ζ) ، $c^{D_1}(\zeta_0, \zeta)$ و $c^{D_2}(\zeta_0, \zeta)$ در ماتریس‌های D_1 ، D_2 و D_3 در پیوست C_1 و C_2 و C_3 داده شده‌اند. همچنین مقادیر (r_1, r_2, r_3) و (ζ_0, ζ_0) در نتیجه ممکن است مقایسه طرح‌ها در یک مقدار مشخص و یکسان ρ نادرست باشد. مقدار احتمال کاوش معرفی شده توسط شیراکورا و همکاران در این حالت کارا نیست. یک راه غلبه بر این مشکل ممکن است در نظر گرفتن ρ به عنوان یک متغیر تصادفی و میانگین گیری روی احتمال کاوش برای همه مقادیر ρ باشد. اما با توجه به مقادیر جدول ۳، هیچ یک از مقادیر \tilde{n}_1^+ و \tilde{n}_2^- بزرگتر از $45 = \frac{10 \times 9}{2}$ نیستند، پس براساس معیار I نمی‌توان در مورد طرح‌های D_1 و D_2 اظهار نظر کرد. همچنین هیچ کدام از مقادیر \tilde{n}_1^+ و \tilde{n}_2^- بزرگتر از $5 = \frac{10}{2}$ نیستند، پس براساس معیار II نیز نمی‌توان تصمیمی گرفت.

در مقایسه D_1 در مقابل D_2 ، از جدول ۳ مقدار $48 = \tilde{n}_1^-$ که بزرگتر از $45 = \frac{\nu_2(\nu_2-1)}{2}$ است. پس براساس معیار I طرح D_2 بهتر از D_1 است. اما هیچ‌کدام از مقادیر \tilde{n}_1^+ و \tilde{n}_2^- بزرگتر از $5 = \frac{\nu_2}{2}$ نیستند، پس براساس معیار II نمی‌توان تصمیمی گرفت. در مقایسه D_2 در مقابل D_3 ، $47 > 45 = \tilde{n}_1^+$ است. طرح D_2 بهتر از D_3 است.

۳۰.۳ احتمال کاوش وزنی

در بخش‌های قبل، معیار احتمال کاوش معرفی شده توسط شیراکورا و همکاران (۱۹۹۶) و معیارهای $I - III$ گوش و تچماچر (۲۰۰۲) برای انتخاب طرح کاوش بهینه بررسی شدند. همانطور که مشاهده شد کمیت (۶) به پارامتر مجھول ρ بستگی دارد و به منظور ارائه نتایج درست، مقایسه‌ها بایستی برای همه مقادیر $\rho > 0$ انجام گیرد. در مثال‌های ۱ و ۲ مشاهده شد که این کار مستلزم محاسبات حجمی و تقریباً در عمل کاری غیر ممکن است. حتی در حالاتی که بتوان نمودار احتمال کاوش را رسم کرد، با توجه به شکل ۱ تصمیم گیری براساس معیار (۶) ممکن است بی نتیجه باشد. اگرچه مقایسه‌ها براساس معیارهای $I - III$ به مقادیر ρ بستگی ندارد، اما در بعضی حالات مانند مقایسه طرح‌های D_1 و D_2 در مثال ۳.۳، ممکن است تصمیم گیری براساس این معیارها بی نتیجه باشد.علاوه بر این، گوش و تچماچر (۲۰۰۲) با حذف ρ ، از اطلاعات موجود در مقدار پارامتر درست و σ^2 استفاده

و مدل‌های رقیب $S_i = S - \{M_i\}$ ، $M_i \in S$ ، ارائه می‌کنیم. این معیار برخلاف معیارهای مبتنی بر احتمال کاوش برای همه $k \geq 1$ قابل استفاده است.

۱۰.۴ معیار کاوش کولبک-لیبلر

فرض کنید $(f_0, f_1, y, A_{20}, \xi_{20}, \sigma)$ به ترتیب توابع چگالی مشاهدات تحت مدل درست M_0 و مدل رقیب M_1 باشند. فاصله کولبک-لیبلر براساس بردار مشاهدات $(y_1, \dots, y_N) = y'$ با مؤلفه‌های مستقل بصورت زیر است:

$$I_i(f_0, f_1) = \int f_0(y, A_{20}, \xi_{20}, \sigma) \log \left\{ \frac{f_0(y, A_{20}, \xi_{20}, \sigma)}{f_1(y, A_{2i}, \xi_{2i}, \sigma)} \right\} dy, \quad (12)$$

که $dy = dy_1 \dots dy_N$. حال فرض کنید بردار خطای e دارای توزیع نرمال با مؤلفه‌های مستقل $N(0, \sigma^2)$ باشد، یعنی $\mu_i = E(y_i) = A_{1i} + A_{2i}\xi_{2i}$

$$\begin{aligned} I_i(f_0, f_2) &= \frac{1}{2\sigma^2} [E_{f_0} \{(y - \mu_i)'(y - \mu_i)\} \\ &\quad - E_{f_2} \{(y - \mu_0)'(y - \mu_0)\}] \\ &= \frac{1}{2\sigma^2} (A_{20}\xi_{20} - A_{2i}\xi_{2i})'(A_{20}\xi_{20} - A_{2i}\xi_{2i}), \end{aligned} \quad (13)$$

که در آن E_{f_0} امید ریاضی تحت مدل M_0 را نشان می‌دهد. یعنی فاصله کولبک-لیبلر در این حالت، فاصله بین میانگین‌های مدل M_0 و M_1 است. حالتی را در نظر بگیرید که در آن حداقل فاصله بین M_0 و M_1 وجود داشته باشد، یعنی وقتی که (۱۳) روی همه بردارهای ξ_{2i} حداقل شده باشد. در این صورت حداقل مقدار (۱۳) در $A_{20}\xi_{20} - A_{2i}\xi_{2i} = 0$ اتفاق می‌افتد و برابر است با:

$$\begin{aligned} I_i(\rho, A_{20}) &= \min_{\xi_{2i}} I_i(f_0, f_2) \\ &= \frac{1}{2} \rho' A_{20}' (I - H_i) A_{20} \rho, \end{aligned} \quad (14)$$

که $H_i = A_{2i}(A_{2i}' A_{2i})^{-1} A_{2i}'$ و $\rho = \frac{1}{\sigma} \xi_{20}$. حال معیار زیر را براساس فاصله KL در نظر می‌گیریم:

$$KL_T(\rho) = \min_S \min_{S_i} I_i(\rho, A_{20}). \quad (15)$$

تابع KL_T تابعی حقیقی از ρ است و از طریق A_{20} و A_{2i} به طرح T بستگی دارد. مقادیر بزرگتر معیار KL_T نشان دهنده توانایی بالاتر طرح

بالاتری را به اثرات غیر صفر کوچک تر اختصاص می‌دهد. با توجه به این که (ρ, ζ, G) تابعی صعودی از ρ است، پس با افزایش مقدار مقدار G و در نتیجه مقدار احتمال کاوش بدون توجه به طرح، به یک نزدیک می‌شود. این مسئله به این مفهوم است که هر طرح کاوش با احتمال بالایی قادر به شناسایی اثرات غیر صفر با مقدار بزرگ است. یعنی در حقیقت رقابت طرح‌ها برای مقادیر کوچک ρ است. از این نکته در انتخاب تابع وزن $f(\rho)$ استفاده می‌کنیم. $f(\rho)$ را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که وزن بیشتری را به مقادیر کوچک ρ اختصاص دهد. با توجه به این مطالب، تابع‌های وزن چوله به راست گزینه مناسبی به نظر می‌رسند. در اینجا فرض می‌کنیم $f(\omega) = \rho^2$ ، تابع چگالی احتمال گاما با پارامترهای مناسب v و λ است. یعنی $\rho = \omega = \text{Gamma}(v, \lambda)$ با میانگین $\frac{v}{\lambda}$ است. با انتخاب تابع وزن گاما انتگرال (۷) به شکل ساده و قابل محاسبه زیر تقلیل داده می‌شود: (طلایی و اسمعیلزاده، ۲۰۱۱a)

$$W_f(\zeta_0, \zeta) = 1 - \mathcal{T} \left(c_1 \left(\frac{v}{\lambda} \right)^{1/2} \right) - \mathcal{T} \left(c_2 \left(\frac{v}{\lambda} \right)^{1/2} \right) + 2 \mathcal{T} \left(c_1 \left(\frac{v}{\lambda} \right)^{1/2} \right) \mathcal{T} \left(c_2 \left(\frac{v}{\lambda} \right)^{1/2} \right), \quad (9)$$

که $\mathcal{T}(\cdot)$ تابع توزیع تجمعی t با درجه آزادی است.

۴ استفاده از اطلاع کولبک-لیبلر برای ارزیابی طرح‌های کاوش

تمامی معیارهای ارزیابی طرح‌های کاوش مبتنی بر احتمال کاوش که در بخش ۳ بیان شدند، فقط برای حالت $1 = k$ قابل استفاده هستند. در این بخش، براساس اطلاع کولبک-لیبلر معیاری جهت ارزیابی طرح‌های کاوش برای حالت $1 \geq k$ معرفی می‌کنیم. در مباحث طرح‌های بهینه معیارهایی برای تمیز مدل ارائه شده است. لپز ۳ و همکاران (۲۰۰۷) برای مدل غیر نرمال با درنظر گرفتن آزمون فرض

$$H_0 : M = M_0 \quad v.s. \quad H_1 : M = M_1, \quad (10)$$

معیاری را بر اساس فاصله کولبک-لیبلر برای تمیز مدل M_1 از مدل M_0 ارائه کردند. براساس فاصله کولبک-لیبلر معیاری جهت

ارزیابی توانایی طرح‌های کاوش در تمیز مدل درست

$$M_0 : y = A_{1\xi_1} + A_{20}\xi_{20} + e, \quad (11)$$

Lopez^۳

برابرند. در مدل (۱)، فرض کنید δ_i میانگین عمومی و تمامی اثرات اصلی، ϵ_i اثرات متقابل ۲ - و ۳ - عاملی باشد. مقادیر (۱) و $(1) \frac{1}{N} KL_{D_i}$ در جدول ۴ آورده شده‌اند. نتایج نشان می‌دهد که $D_1 > KL_{D_4} > KL_{D_3} > KL_{D_2}$ ، یعنی طرح ۴ بهتر از طرح‌های D_1 و D_2 و طرح D_1 بهتر از طرح D_2 است.

۲۰۲۰۴ حالت ۲

همانطور که ذکر شد، معیارهای مبتنی بر احتمال کاوش فقط برای حالت $k = 1$ قابل استفاده هستند. در حالی که معیار KL دارای این محدودیت نیست. از $KL_T(\rho)$ برای مقایسه طرح‌های D_5 و D_6 استفاده می‌کنیم. D_5 یک آرایه متوازن است که در گوش و تچماجر (۲۰۰۲) ارائه شده است و D_6 تصویر طرح پلاکت - برمبنای ۱۲ اجرا روی هر چهار ستون است. طالی و اسمعیل زاده (۲۰۱۱a) نشان دادند که تصویر طرح پلاکت - برمبنای هر چهار ستون یک طرح کاوش است. طرح D_6 یک آرایه متعامد توان ۲ است. این دو طرح، طرح‌های کاوش هستند وقتی که $k = 2$ و $i = 1, 2, 3, 4$ ، مشابه بخش قبل در نظر گرفته می‌شوند. مقادیر $KL_T(\rho)$ برای چند مقدار $(\rho_1, \rho_2) = \rho'$ در جدول ۵ داده شده‌اند. نتایج نشان دهنده برتری طرح D_5 است.

۳۰۴ معیار کولبک-لیبلر مورد انتظار

اگر چه ارزیابی طرح‌های کاوش براساس معیار KL در حالت $1 = k$ ، بدون نیاز به مقدار پارامتر ρ قابل انجام است، ولی همانطور که در بخش قبلی مشاهده شد، این معیار برای $2 \geq k$ به مقدار مجھول پارامتر ρ بستگی دارد و به منظور انجام مقایسه‌های با معنی این کار بایستی برای همه مقادیر ρ انجام گیرد. بدیهی است این کار بسیار خسته کننده و حتی غیر ممکن است. به منظور غلبه بر مشکل با میانگین گیری از تابع (۱۴) روی مقادیر ρ ، طالی و اسمعیل زاده (۲۰۱۱b) معیاری را ارایه کردند که به مقدار خاص ρ بستگی ندارد. در این بخش به معرفی این معیار می‌پردازیم.

فرض کنید ρ یک بردار تصادفی $1 \times k$ با تابع چگالی احتمال چند متغیره $f(\rho)$ باشد. کمیت زیر را در نظر بگیرید:

$$EKL_i(A_{20}) = \int I_i(\rho, A_{20}) f(\rho) d\rho. \quad (16)$$

دقت کنید $EKL_i(A_{20})$ از طریق A_{20} و H_i در (۱۴) به طرح بستگی

T در تمیز بین مدل درست و مدل‌های رقیب است. پس می‌توان از آن برای مقایسه طرح‌های کاوش استفاده کرد. تعریف زیر شرایط را برای رتبه بندی طرح‌های کاوش براساس معیار KL فراهم می‌کند.

تعریف ۱۰۴. طرح‌های کاوش T_1 و T_2 با N تیمار را در نظر بگیرید. گوییم طرح T_1 در تشخیص مدل درست برتر از طرح T_2 است هرگاه به ازای همه $\rho > 0$ داشته باشد:

$$KL_{T_1}(\rho) > KL_{T_2}(\rho), \quad \forall \rho > 0.$$

۲۰۴ کاربرد

در این بخش از معیار KL در (۱۵)، برای مقایسه طرح‌های کاوش جداول ۱ و ۲ استفاده می‌کنیم.

۱۰۲۰۴ حالت ۱

طرح کاوشی با N اجرا را در نظر بگیرید و فرض کنید $1 = k$ باشد. واضح است که $I_i(\rho, A_{20}) = I_i(-\rho, A_{20})$. یعنی تابع $I_i(\rho, A_{20})$ تابعی متقارن بر حسب ρ است. همچنین داریم $I_i(\rho, A_{20}) \leq N\rho^2$ پس می‌توان گزاره زیر را بیان کرد:

گزاره ۲۰۴. طرح کاوش T با N اجرا را در نظر بگیرید. اگر $1 = k$ باشد آنگاه نتایج زیر برای $KL_T(\rho)$ برقرار است:

$$KL_T(\rho) = KL_T(-\rho), \quad \forall \rho \in \mathbb{R}.$$

$$2. \text{ برای } 1 = k, \rho = 1, \quad 0 \leq \frac{1}{N} KL_T(1) \leq 1.$$

قسمت ۱ گزاره بیان می‌کند که مقایسه طرح‌ها کافی است برای $\rho > 0$ انجام گیرد. برای $1 = k$ رابطه (۱۴) یک اسکالر است که ρ به صورت یک مضرب ظاهر خواهد شد. در نتیجه در مقایسه طرح‌ها با استفاده از تعریف ۱۰۴ کمیت ρ از طرفین نامساوی حذف شده و تاثیری روی مقایسه نخواهد داشت. بنابراین با توجه به قسمت ۲، بدون از دادن کلیت مسئله کافی است مقایسه در $1 = \rho$ انجام شود.

حال براساس گزاره ۲۰۴، از (۱۵) برای اندازه‌گیری قابلیت کاوش طرح‌های D_1 و D_2 در جدول ۱ و طرح D_4 در جدول ۲ استفاده می‌کنیم. طرح D_4 تصویر طرح پلاکت - برمبنای ۱۲ اجرایی روی ۵ ستون است. دقیقاً این طرح یک طرح متوازن و متعامد است. به این مفهوم که تمام ستون‌ها به تعداد یکسان علامت + و - دارند. همچنین برای هر دو ستون دلخواه تعداد ترکیب‌های $(+, +)$, $(-, +)$, $(+, -)$ و $(-, -)$

می یابد. پس EKL_T در (۱۹) به

$$EKL_T = \min_S \min_{S_0} \text{Trace}(H_i(A_{20})), \quad (21)$$

کاوش می یابد. واضح است که $EKL_T \leq kN$ است. در اینجا مجدداً طرح های D_5 و D_6 را با استفاده (۲۱) مقایسه می کنیم. مقدار EKL برای D_5 و D_6 به ترتیب برابر ۱۰.۰۵۷۱ و ۹.۳۳۳۳ است. پس طرح D_5 براساس تعریف ۳.۴ در شناسایی مدل درست تواناتر است.

۵ نتیجه گیری

احتمال کاوش به عنوان معیاری برای اندازه گیری توانایی طرح در کاوش اثرات غیر صفر توسط شیراکورا و همکاران (۱۹۹۶) معرفی شد. در صورت وجود طرح های کاوش متفاوت تحت مدل خطی یکسان، مسئله مقایسه توانایی کاوش این طرح ها مطرح می شود. شیراکورا و همکاران (۱۹۹۶) از احتمال کاوش جهت مقایسه طرح ها استفاده کردند. این معیار به مقادیر پارامتر نامعلوم ρ ، نسبت مقدار درست پارامتر به اغتشاش، بستگی دارد که در مقایسه بعضی طرح ها تصمیم گیری بدون نتیجه خواهد بود. معیار احتمال کاوش وزنی معرفی شده است که به مقادیر ρ بستگی ندارد و به نظر می رسد توسط این معیار مقایسه طرح ها با دقت بیشتری انجام می گیرد. این معیار با میانگین گیری وزنی نسبت به ρ تحت تابع وزن $f(\rho)$ مقدار مجھول ρ را از محاسبات حذف می کند. جهت انتخاب تابع وزن پیشنهاد می شود از تابع چگالی استفاده شود که وزن بیشتری به مقادیر کوچکتر ρ اختصاص می دهد. به نظر می رسد تابع چگالی چوله به راست مناسب باشد.

در این مقاله طرح های D_1 ، D_2 و D_3 براساس احتمال کاوش مقایسه شدند. براساس این معیار طرح D_2 طرح برتر است، در حالی که مقایسه بین طرح های D_1 و D_2 بی نتیجه است. براساس معیار های I و II گوش و تچماچر نیز مقایسه طرح D_1 و D_2 بی نتیجه است. طرح D_3 براساس معیار I بهتر از طرح D_1 ولی مقایسه D_2 و D_3 بی نتیجه است. طرح D_2 براساس هر دو معیار برتر از D_3 است. این در حالی است که طرح D_2 براساس معیار احتمال کاوش نسبت به D_2 ارجح تر بود. یعنی معیار های متفاوت قضاؤت یکسانی در مورد انتخاب طرح برتر ندارند.

معیار های مبتنی بر احتمال کاوش فقط برای حالت $1 = k$ قابل محاسبه هستند و در عمل قادر به مقایسه طرح ها برای $2 \geq k$ براساس این

دارد در حالی که به ρ وابسته نیست. به منظور ساده کردن (۱۶)، فرم درجه دوم $I_i(\rho, A_{20})$ را بصورت زیر می نویسیم:

$$I_i(\rho, A_{20}) = \sum_{i=1}^k \rho_i^{\chi} h_{ii} + \sum_{i \neq j} \rho_i \rho_j h_{ij}, \quad (17)$$

که $(i, j) = 1, 2, \dots, k$ ، h_{ij} امین عنصر ماتریس A_{20} است. برای $i = 1, \dots, k$ ، $\rho_i = H_i(A_{20}) = A'_{20}(I - H_i)A_{20}$ مستقل و همتوزیع $EKL_i(A_{20})$ بصورت شکل صریح زیر در می آید:

$$\begin{aligned} EKL_i(A_{20}) &= \text{Trace}(H_i(A_{20})) \text{var}(\rho_i) \\ &+ \sum_i \sum_j h_{ij} E^{\chi}(\rho_i), \end{aligned} \quad (18)$$

که $E(\rho_i)$ و $\text{var}(\rho_i)$ به ترتیب امید ریاضی و واریانس مشترک ρ_i ها است. برای طرح کاوش T معیار اصلاح شده کولبک-لیبلر مورد انتظار (EKL) را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$EKL_T = \min_S \min_{S_0} EKL_i(A_{20}). \quad (19)$$

مقادیر بزرگتر EKL دلیل بر توانایی بالاتر طرح T در تمیز بین مدل درست و مدل های رقیب است. از این معیار نیز می توان برای مقایسه طرح های کاوش براساس تعریف زیر استفاده کرد.

تعویض ۳.۴. طرح های کاوش T_1 و T_2 با N تیمار را در نظر بگیرید. گوییم طرح T_1 در تشخیص مدل درست برتر از طرح T_2 است هرگاه $EKL_{T_1} > EKL_{T_2}$.

تابع $f(\rho)$ را طوری انتخاب می کنیم که وزن بیشتر را به مقادیر کوچک ρ تخصیص دهد. زیرا برای مقادیر بزرگ ρ ، همه طرح های کاوش قدرت بالایی در شناسایی مدل درست دارند. به نظر می رسد تابع وزن زیر مناسب باشد:

$$f_i(\rho_i) = \begin{cases} \frac{1}{4}g(-\rho_i) & \text{if } \rho_i < 0 \\ \frac{1}{4}g(\rho_i) & \text{if } \rho_i > 0 \end{cases} \quad (20)$$

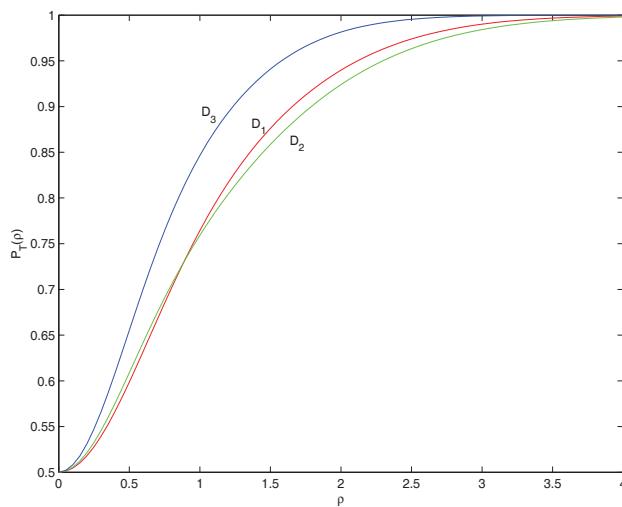
که تابع $g(\rho_i)$ تابع چگالی گاما با میانگین $v\lambda$ است. برای تابع وزن (۲۰) کمیت (۱۸) بصورت زیر ساده می شود:

$$EKL_i(A_{20}) = (v\lambda^2 + v^2\lambda^2)\text{Trace}(H_i(A_{20})).$$

در مقایسه بین دو طرح در استفاده از تعریف ۳.۴ عبارت $v\lambda^2 + v^2\lambda^2$ از محاسبه حذف می شود و ارزیابی به مقایسه $\text{Trace}(H_i(A_{20}))$ تقلیل

مقایسه طرح های D_1 و D_2 براساس معیار کولبک-لیبلر اولی ارجح تر از دومی است و طرح D_4 از هر دو ارجح تر است. برای $k = 2$ آرایه متوازن D_5 برتر از آرایه متعامد D_6 است.

معیار نیستیم. معیار معرفی شده براساس فاصله کولبک-لیبلر محدودیت ذکر شده را ندارد و مقایسه طرح ها برای $k \geq 2$ را امکان پذیر می کند. معیار کولبک-لیبلر مورد انتظار معرفی شده به تابع وزن f بستگی دارد که در حالت $k \geq 2$ انتخاب این تابع موضوع قابل تحقیقی است. در



شکل ۱. نمودار احتمال کاوش D_1 ، D_2 و D_3

۶ پیوست

جدول ۱: طرح های کاوش D_1 ، D_2 و D_3 با ۱۲ اجرا و ۵ عامل

| D_1 | | | | | | D_2 | | | | | | D_3 | | | | | |
|-------|---|---|---|---|---|-------|---|---|---|---|---|-------|---|---|---|---|---|
| + | - | - | - | - | - | + | + | + | + | + | + | + | + | + | + | + | + |
| - | + | - | - | - | - | + | - | - | - | - | + | - | - | - | - | - | - |
| - | - | + | - | - | - | - | + | - | - | - | - | + | - | - | - | - | - |
| - | - | - | - | + | - | - | - | + | - | - | - | - | - | + | - | - | - |
| - | - | - | - | - | + | - | - | - | + | - | - | - | - | - | + | - | - |
| + | - | + | + | + | + | - | - | - | - | + | - | - | - | - | - | - | + |
| - | + | + | + | - | - | - | + | - | + | + | - | - | - | + | - | - | + |
| + | + | + | - | - | - | + | - | + | + | + | + | + | - | + | + | + | + |
| + | + | - | - | + | - | - | + | + | + | + | - | - | + | + | + | + | - |
| + | - | - | + | - | - | + | + | + | - | - | + | + | + | - | - | - | - |
| - | - | + | - | + | - | + | + | - | - | + | + | + | - | - | - | - | + |
| - | + | - | + | + | - | + | - | - | + | - | + | - | - | - | + | - | - |

جدول ۲: طرح های D_5 و D_4

| D_5 | | | | | D_4 | | | | |
|-------|---|---|---|---|-------|---|---|---|---|
| + | + | + | + | + | + | + | + | + | + |
| - | - | - | - | - | - | + | - | - | - |
| + | - | - | - | - | + | - | - | - | + |
| - | + | - | - | - | - | - | - | + | + |
| - | - | + | - | - | - | - | + | + | + |
| - | - | - | + | - | - | + | + | + | - |
| + | + | - | - | - | + | + | + | - | + |
| + | - | + | - | - | + | + | - | + | - |
| + | - | - | + | - | + | - | + | - | - |
| - | + | + | - | - | - | + | - | - | + |
| - | + | - | + | - | + | - | - | + | - |
| - | - | + | + | - | - | - | + | - | - |

ماتریس های احتمال کاوش و بردارهای کمترین احتمال کاوش برای طرح های D_1 ، D_2 و D_3 در مثال های ۱ و ۲

$$SPM_1(1) = \begin{bmatrix} - & 0/9477 & 0/9771 & 0/9477 & 0/9477 & 0/9109 & 0/9771 & 0/9477 & 0/9462 & 0/9109 \\ 0/9757 & - & 0/9757 & 0/9236 & 0/9236 & 0/9236 & 0/9757 & 0/9367 & 0/9757 & 0/9236 \\ 0/9771 & 0/9477 & - & 0/9109 & 0/9477 & 0/9477 & 0/9462 & 0/9477 & 0/9771 & 0/9109 \\ 0/9757 & 0/9236 & 0/9457 & - & 0/9367 & 0/9236 & 0/9757 & 0/9236 & 0/9457 & 0/9367 \\ 0/9757 & 0/9236 & 0/9757 & 0/9367 & - & 0/9367 & 0/9457 & 0/9236 & 0/9457 & 0/9236 \\ 0/9457 & 0/9236 & 0/9757 & 0/9236 & 0/9367 & - & 0/9457 & 0/9236 & 0/9757 & 0/9367 \\ 0/9771 & 0/9477 & 0/9462 & 0/9477 & 0/9109 & 0/9109 & - & 0/9477 & 0/9771 & 0/9477 \\ 0/9757 & 0/9367 & 0/9757 & 0/9236 & 0/9236 & 0/9236 & 0/9757 & - & 0/9757 & 0/9236 \\ 0/9462 & 0/9477 & 0/9771 & 0/9109 & 0/9109 & 0/9477 & 0/9771 & 0/9477 & - & 0/9477 \\ 0/9457 & 0/9236 & 0/9457 & 0/9367 & 0/9236 & 0/9367 & 0/9757 & 0/9236 & 0/9757 & - \end{bmatrix}$$

$$SPM_2(1) = \begin{bmatrix} - & 0/8884 & 0/9646 & 0/9646 & 0/9646 & 0/9439 & 0/9646 & 0/9646 & 0/9439 & 0/9439 \\ 0/9318 & - & 0/9318 & 0/9653 & 0/9653 & 0/9653 & 0/9318 & 0/9221 & 0/9318 & 0/9653 \\ 0/9646 & 0/8884 & - & 0/9439 & 0/9646 & 0/9646 & 0/9439 & 0/9646 & 0/9646 & 0/9439 \\ 0/9646 & 0/9273 & 0/9439 & - & 0/9439 & 0/9646 & 0/9646 & 0/9646 & 0/9439 & 0/9439 \\ 0/9646 & 0/9273 & 0/9646 & 0/9646 & 0/9439 & - & 0/9439 & 0/9439 & 0/9646 & 0/9439 \\ 0/9439 & 0/9273 & 0/9646 & 0/9646 & 0/9439 & 0/9439 & - & 0/9439 & 0/9646 & 0/9439 \\ 0/9646 & 0/8884 & 0/9439 & 0/9646 & 0/9439 & 0/9439 & - & 0/9646 & 0/9646 & 0/9646 \\ 0/9646 & 0/8779 & 0/9646 & 0/9646 & 0/9646 & 0/9646 & 0/9646 & - & 0/9646 & 0/9646 \\ 0/9439 & 0/8884 & 0/9646 & 0/9239 & 0/9439 & 0/9646 & 0/9646 & 0/9646 & - & 0/9646 \\ 0/9439 & 0/9273 & 0/9439 & 0/9646 & 0/9439 & 0/9439 & 0/9646 & 0/9646 & 0/9646 & - \end{bmatrix}$$

$$MSPV_1(1) = [0/9457 \quad 0/9236 \quad 0/9457 \quad 0/9109 \quad 0/9109 \quad 0/9109 \quad 0/9457 \quad 0/9236 \quad 0/9457 \quad 0/9109]$$

$$MSPV_2(1) = [0/9318 \quad 0/8779 \quad 0/9318 \quad 0/9439 \quad 0/9439 \quad 0/9439 \quad 0/9318 \quad 0/9221 \quad 0/9318 \quad 0/9439]$$

| | | | | | | | | | | |
|---------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $C_1 =$ | - | 1/8284 | 2/2237 | 1/8284 | 1/8284 | 1/3940 | 2/2237 | 1/8284 | 1/8330 | 1/3940 |
| | 2/1351 | - | 2/1351 | 1/4905 | 1/4905 | 1/4905 | 2/1351 | 1/8330 | 2/1351 | 1/4905 |
| | 2/2237 | 1/8284 | - | 1/3940 | 1/8284 | 1/8284 | 1/8330 | 1/8284 | 2/2237 | 1/3940 |
| | 2/1351 | 1/4905 | 1/6279 | - | 1/6330 | 1/4905 | 2/1351 | 1/4905 | 1/6279 | 1/6330 |
| | 2/1351 | 1/4905 | 2/1351 | 1/6330 | - | 1/6330 | 1/6279 | 1/4905 | 1/6279 | 1/4905 |
| | 1/6279 | 1/4905 | 2/1351 | 1/4905 | 1/6330 | - | 1/6279 | 1/4905 | 2/1351 | 1/6330 |
| | 2/2237 | 1/8284 | 1/6330 | 1/8284 | 1/3940 | 1/3940 | - | 1/8284 | 2/2237 | 1/8284 |
| | 2/1351 | 1/6330 | 2/1351 | 1/4905 | 1/4905 | 1/4905 | 2/1351 | - | 2/1351 | 1/4905 |
| | 1/6330 | 1/8284 | 2/2237 | 1/3940 | 1/3940 | 1/8284 | 2/2237 | 1/8284 | - | 1/8284 |
| | 1/6279 | 1/4905 | 1/6279 | 1/6330 | 1/4905 | 1/6330 | 2/1351 | 1/4905 | 2/1351 | - |

$$r_1 = \begin{bmatrix} 10/3226 & 7/5699 & 10/3226 & 7/5699 & 7/5699 & 7/5699 & 10/3226 & 7/5699 & 10/3226 & 7/5699 \end{bmatrix}$$

| | | | | | | | | | | |
|---------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $C_1 =$ | - | 1/2787 | 1/9518 | 1/9518 | 1/9518 | 1/9518 | 1/9518 | 1/9518 | 1/9518 | 1/9518 |
| | 1/5193 | 0/0000 | 1/5193 | 1/9729 | 1/9729 | 1/9729 | 1/5193 | 1/4429 | 1/5193 | 1/9729 |
| | 1/9518 | 1/2787 | - | 1/8330 | 1/9518 | 1/9518 | 1/9518 | 1/9518 | 1/9518 | 1/8330 |
| | 1/9518 | 1/6605 | 1/8330 | - | 1/8330 | 1/9518 | 1/9518 | 1/9518 | 1/8330 | 1/8330 |
| | 1/9518 | 1/6605 | 1/9518 | 1/8330 | - | 1/8330 | 1/9518 | 1/9518 | 1/8330 | 1/9518 |
| | 1/8330 | 1/6605 | 1/9518 | 1/9518 | 1/8330 | - | 1/8330 | 1/9518 | 1/9518 | 1/8330 |
| | 1/9518 | 1/2787 | 1/8330 | 1/9518 | 1/8330 | 1/8330 | - | 1/9518 | 1/9518 | 1/9518 |
| | 1/9518 | 1/2144 | 1/9518 | 1/9518 | 1/9518 | 1/9518 | 1/9518 | - | 1/9518 | 1/9518 |
| | 1/8330 | 1/2787 | 1/9518 | 1/8330 | 1/8330 | 1/9518 | 1/9518 | 1/9518 | - | 1/9518 |
| | 1/8330 | 1/6605 | 1/8330 | 1/8330 | 1/9518 | 1/8330 | 1/9518 | 1/9518 | 1/9518 | - |

| | | | | | | | | | | |
|---------|----------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $C_T =$ | - | $1/4926$ | $1/3333$ | $2/0\cdot367$ | $2/0\cdot367$ | $1/7805$ | $1/3333$ | $1/4926$ | $1/4378$ | $1/7805$ |
| | $1/3819$ | - | $1/8805$ | $1/9626$ | $1/9626$ | $1/7213$ | $1/8805$ | $1/6330$ | $2/0\cdot798$ | $1/7213$ |
| | $1/3333$ | $2/0\cdot367$ | - | $1/7805$ | $1/4926$ | $2/0\cdot367$ | $1/6330$ | $2/0\cdot367$ | $2/0\cdot94$ | $1/1260$ |
| | $1/8805$ | $1/9626$ | $1/8031$ | - | $1/6330$ | $1/9626$ | $1/3819$ | $1/9626$ | $1/8214$ | $1/3333$ |
| | $1/8805$ | $1/9626$ | $1/3819$ | $1/6330$ | - | $1/3333$ | $1/8031$ | $1/9626$ | $1/8214$ | $1/9626$ |
| | $1/8031$ | $1/7213$ | $1/8805$ | $1/9626$ | $1/3333$ | - | $1/0\cdot424$ | $1/7213$ | $2/0\cdot798$ | $1/6330$ |
| | $1/3333$ | $2/0\cdot367$ | $1/6330$ | $1/4926$ | $1/7805$ | $1/1260$ | - | $2/0\cdot367$ | $2/0\cdot94$ | $2/0\cdot367$ |
| | $1/3819$ | $1/6330$ | $1/8805$ | $1/9626$ | $1/9626$ | $1/7213$ | $1/8805$ | - | $2/0\cdot798$ | $1/7213$ |
| | $1/1740$ | $1/8242$ | $1/8805$ | $1/8031$ | $1/8031$ | $1/8342$ | $1/8805$ | $1/8242$ | - | $1/8242$ |
| | $1/8031$ | $1/7213$ | $1/0\cdot424$ | $1/3333$ | $1/9626$ | $1/6330$ | $1/8805$ | $1/7213$ | $2/0\cdot798$ | - |

$$r_2 = \begin{bmatrix} \gamma/1111 & \lambda/2953 & \gamma/1111 & \lambda/2953 & \lambda/2953 & \lambda/2953 & \gamma/1111 & \lambda/2953 & \lambda/2953 & \lambda/2953 & 10/6657 & \lambda/2953 \end{bmatrix}$$

جدول ۳: مقایسه طرح های $D_۱$ ، $D_۲$ و $D_۳$ بر اساس معیارهای $I - III$

| | \tilde{n}_γ^+ | \tilde{n}_γ^- | \tilde{n}_γ^+ | \tilde{n}_γ^+ | \tilde{n}_γ^- | \tilde{n}_γ^+ |
|-------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| $D_\gamma v.s.D_\gamma$ | 1 | 4 | 5 | 13 | 44 | 33 |
| $D_\gamma v.s.D_\gamma$ | 7 | 0 | 3 | 19 | 48 | 23 |
| $D_\gamma v.s.D_\gamma$ | 0 | 2 | 8 | 26 | 17 | 47 |

جدول ۴: مقایسه طرح‌های D_1 , D_2 و D_4

| D_2 | D_1 | D_4 | |
|--------|--------|--------|--------------------------|
| ۶/۶۶۶۷ | ۹/۰۰۰۰ | ۱۰/۶۶۷ | $KL_{D_i}(1)$ |
| ۰/۵۵۵۶ | ۰/۷۵۰۰ | ۰/۸۸۸۹ | $\frac{1}{N}KL_{D_i}(1)$ |

جدول ۵: مقایسه طرح‌های D_4 و D_5

| ۲ | ۱/۵ | ۱ | ۰/۵ | -۰/۵ | -۱ | -۱/۵ | -۲ | ρ_1 |
|--------|--------|--------|-------|-------|--------|--------|--------|----------|
| D_4 | | | | | | | | ρ_1 |
| ۴۰/۲۲۸ | ۲۲/۶۲۸ | ۱۰/۰۵۷ | ۲/۵۱۴ | ۲/۵۱۴ | ۱۰/۰۵۷ | ۲۲/۶۲۸ | ۴۰/۲۲۸ | -۲ |
| ۲۲/۶۲۸ | ۲۲/۶۲۸ | ۱۰/۰۵۷ | ۲/۵۱۴ | ۲/۵۱۴ | ۱۰/۰۵۷ | ۲۲/۶۲۸ | ۲۲/۶۲۸ | -۱/۵ |
| ۱۰/۰۵۷ | ۱۰/۰۵۷ | ۱۰/۰۵۷ | ۲/۵۱۴ | ۲/۵۱۴ | ۱۰/۰۵۷ | ۱۰/۰۵۷ | ۱۰/۰۵۷ | -۱ |
| ۲/۵۱۴ | ۲/۵۱۴ | ۲/۵۱۴ | ۲/۵۱۴ | ۲/۵۱۴ | ۲/۵۱۴ | ۲/۵۱۴ | ۲/۵۱۴ | -۰/۵ |
| D_5 | | | | | | | | |
| ۳۷/۳۳۳ | ۲۱ | ۹/۳۳۳ | ۲/۳۳۳ | ۲/۳۳۳ | ۹/۳۳۳ | ۲۱ | ۳۷/۳۳۳ | -۲ |
| ۲۱ | ۲۱ | ۹/۳۳۳ | ۲/۳۳۳ | ۲/۳۳۳ | ۹/۳۳۳ | ۲۱ | ۲۱ | -۱/۵ |
| ۹/۳۳۳ | ۹/۳۳۳ | ۹/۳۳۳ | ۲/۳۳۳ | ۲/۳۳۳ | ۹/۳۳۳ | ۹/۳۳۳ | ۹/۳۳۳ | -۱ |
| ۲/۳۳۳ | ۲/۳۳۳ | ۲/۳۳۳ | ۲/۳۳۳ | ۲/۳۳۳ | ۲/۳۳۳ | ۲/۳۳۳ | ۲/۳۳۳ | -۰/۵ |

مراجع

- [1] Esmailzadeh, N., Talebi, H., Momihara, k. and Jimbo, M. (2011). A new series of small size search designs for 2^m factorial experiments. *J. Statist. plann. Inference*, **141**, 1567-1574.
- [2] Ghosh, S. and Talebi, H. (1993). Main effect plans with additional search property for factorial experiments. *J. Statist. Plann. Inference*, **36**, 367-384.
- [3] Ghosh, S. and Teschmacher, L. (2002). Comparisons of search designs using search probabilities, *J. Statist. Plann. Inference*, **104**, 439-458.
- [4] Ghosh, S., Shirakura, T. and Srivastava, J. N. (2007). Model identification using search linear models and search designs. Entropy, search, complexity, 85-112, Bolyai Soc. Math. Stud., 16, Springer, Berlin.
- [5] Lopez-Fidalgo, J., Tommasi, C. and Trandafir, P. C. (2007). An optimal experimental design criterion for discrimination between non-normal models. *J. R. Statist. Soc. B*, **69**, 231-242.
- [6] Shirakura, T., Takahashi, T. and Srivastava, J. N. (1996). Searching probabilities for nonzero effects in search designs for the noisy case. *Ann. Statist.*, **24**, 6, 2560-2568.
- [7] Srivastava, J. N. (1975). Designs for searching non-negligible effects. In: Srivastava, J.N. (Ed.), A Survey of Statistical Design and Linear Models. North-Holland, Elsevier, Amsterdam, pp. 507-519.

- [8] Srivastava, J. N. (1977). Optimal search designs or designs optimal under bias free optimality criteria. In: S. S. Gupta and Moore, D. S. eds., Statistical Decision Theory and Related Topics, Vol.2, 375-409.
- [9] Talebi, H. and Esmailzadeh, N. (2011a). Weighted searching probability for classes of equivalent search designs comparison. *Comm. Statist. Theory Methods*, **40**, 4, 635-647.
- [10] Talebi, H. and Esmailzadeh, N. (2011b). Using Kullback-Leibler distance for performance evaluation of search designs. *Bulletin Iranian Math. Soc.* **37**, 4, 269-279.