

روش های برآورد پارامترها در توزیع بیرنهام-ساندرز

زینب آقاباز^۱، محمدحسین علامت ساز^۲

چکیده:

برآورد پارامترها با توجه به ماهیت توزیع های آماری همیشه به سادگی میسر نیست. به ویژه برآورد پارامترهای توزیع بیرنهام-ساندرز با روش های متفاوت با مشکلاتی مواجه است. در این مقاله روش های مختلف برآورد پارامترهای توزیع بیرنهام-ساندرز^۳ معرفی می شود. برآورد پارامترهای این مدل عمر فرسودگی^۴ به چهار روش امکان پذیر است. روش اول روشی گرافیکی است که تکنیک نموداری ساده ای مبتنی بر نمودار احتمال است و برای برآورد پارامترها و بررسی نیکویی برازش زمان های شکست ناشی از فرسودگی به خوبی عمل می کند. در این مقاله همچنین برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی و برآوردگرهای گشتاوری اصلاح شده^۵ مورد مطالعه قرار گرفته است. روش دیگر، برآورد پارامترها به شیوه ای جک نایف است که برای اندازه نمونه کوچک مناسب تر است. در پایان کارایی این برآوردگرها به وسیله شبیه سازی مونت-کارلو مورد مطالعه و مقایسه قرار گرفته است.

واژه های کلیدی: برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی، برآوردگرهای گشتاوری اصلاح شده، برآوردگرهای جک نایف، شبیه سازی مونت-کارلو.

۱ مقدمه

کرد. سپس این تحقیقات توسط جانسون و همکاران^۶ (۱۹۹۵) و مارشال و الکین^۷ (۲۰۰۷) ادامه یافت. در دهه گذشته تعمیم های مختلفی از توزیع BS مطرح شده است. براساس ایده های دیازگارسیا و لیوا^۸ (۲۰۰۵)، ویلکا-لابرا و لیوا^۹ (۲۰۰۶) تعمیم بزرگتری از توزیع BS براساس توزیع های بیضوی و چوله بیضوی به دست آمده است. براساس این تعمیم ها، توزیع هایی با انعطاف پذیری زیاد از نظر کشیدگی و تقارن به دست آمد. دیگر صورت های توزیع BS براساس توزیع های

توزیع بیرنهام-ساندرز دو پارامتری (BS) به عنوان مدلی برای توصیف زمان شکست ناشی از فرسودگی معرفی شده است. در فرآیند فرسودگی، شکست بر اثر رشد و افزایش ترک های موجود در مواد رخ می دهد. دزمووند^{۱۰} (۱۹۸۶) نیز این مدل سازی را براساس مدل های بیولوژیکی کرامر به دست آورد. او همچنین فرضیات بیرنهام و ساندروز (۱۹۶۹) را بهبود بخشید و رابطه این توزیع با توزیع گوسین معکوس را بیان

^۱ کارشناس ارشد آمار، گروه آمار دانشگاه اصفهان

^۲ عضو هیئت علمی گروه آمار دانشگاه اصفهان

^۳ Birnbaum-Saunders distribution

^۴ Fatigue life

^۵ Modified moment estimator

^۶ Desmond

^۷ Johnson et al.

^۸ Marshall and Olkin

^۹ Diaz-Garcia and Leiva

^{۱۰} Vilca-Labra

برآورد می‌شود. آزمون نیکویی برازش نشان می‌دهد به چه میزان داده‌ها از خط راست پیروی می‌کنند. این روش برای داده‌های سانسور شده نیز کاربرد دارد. با استفاده از نتایج تحلیل‌های رگرسیونی می‌توان فواصل اطمینان تقریبی، شیب و عرض از مبدأ خط برازش داده شده را به‌دست آورد. حدود اطمینان به‌منظور ساختن فواصل اطمینان برای پارامترها به‌کار می‌رود. ابتدا لازم است نحوه یافتن نمودار احتمال توزیع BS شرح داده شود. این روش توسط چانگ و تانگ^{۱۲} (۱۹۹۴) ارائه شد. نمودار احتمال فواید زیادی در کاربردهای مختلف دارد و به‌سادگی قابل تفسیر است. چانگ و تانگ نمودار احتمال توزیع BS را به‌صورت زیر به‌دست آوردند. cdf توزیع BS که در معادله (۱) داده شده‌است را در نظر بگیرید. در این صورت داریم

$$t = \beta + \alpha \sqrt{\beta} \sqrt{t} \Phi^{(-1)}(F), \quad (2)$$

همان‌طورکه ملاحظه می‌کنید، یافتن تابعی خطی برحسب t که لازمه نمودار احتمال است، اگر غیرممکن نباشد بسیار دشوار است. این مشکل را با در نظر گرفتن معادله زیر رفع می‌کنیم

$$P = \sqrt{t} \Phi^{(-1)}(F), \quad (3)$$

و نتیجه آن تابعی خطی به‌فرم $y = ax + b$ است، که در آن t محور عمودی و P محور افقی است. یعنی به‌عبارتی داریم

$$t = \beta + \alpha \sqrt{\beta} P, \quad (4)$$

فرض کنید زمان n شکست را به‌صورت $t_1, \dots, t_n$ داشته‌باشیم. با رسم t_i در مقابل P_i و با در نظر گرفتن $P_i = \sqrt{t_i} \Phi(F(t_i))$ ، برآمد آن تقریباً خط راستی است که زمان‌های شکست دارای توزیع BS می‌باشد. پارامترهای α و β را می‌توان از روش حداقل مربعات به‌دست آورد. با برآورد عرض از مبدأ a و شیب b داریم

$$\hat{\beta} = \hat{a}, \quad \hat{\alpha} = \frac{\hat{b}}{\sqrt{\hat{a}}}, \quad (5)$$

نکته با اهمیت این است که، با استفاده از روش‌های رگرسیونی به‌آسانی و بدون برقراری فرض نرمال بودن می‌توان فواصل اطمینان برای a و b را به‌دست آورد. با استفاده از روش حداقل مربعات مشاهده می‌شود، تابعی صعودی از b و تابعی نزولی از a است. به‌علاوه برای هر مقدار ثابت a ، α به‌طور یکنوا برحسب b تعیین می‌شود. از طرفی می‌توان نوشت

$$\{a \leq a \leq \bar{a}, b \leq b \leq \bar{b}\} \implies \{\alpha \leq \alpha \leq \bar{\alpha}\}$$

چوله توسط لیوا و همکاران (۲۰۰۹) به‌دست آمد. گوی‌راد و همکاران^{۱۱} (۲۰۰۹) صورت غیرمرکزی توزیع BS را مطرح کردند. این توزیع در مدل‌سازی موقعیت‌هایی که رشد و گسترش ترک‌ها میانگین غیر ثابتی طی زمان دارد، به‌کار می‌رود. تابع توزیع تجمعی توزیع BS به‌صورت زیر است

$$F_T(t; \alpha, \beta) = \Phi\left(\frac{1}{\alpha}\left[\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}} - \left(\frac{\beta}{t}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right]\right); t > 0, \alpha, \beta > 0. \quad (1)$$

که در آن $\Phi(\cdot)$ تابع توزیع تجمعی (cdf) نرمال استاندارد و α و β به‌ترتیب پارامترهای شکل و مقیاس‌اند.

تابع چگالی این توزیع تک مدی است و نرخ خطر آن وانی شکل معکوس است. یعنی ابتدا تا نقطه تغییر نرخ خطر صعودی و سپس نزولی است.

برآوردگرهای ML این توزیع توسط بیرنهام و ساندروز (۱۹۶۹) و توزیع مجانبی آنها توسط انگل‌هارت و همکاران (۱۹۸۱) به‌دست آمد. اگرچه برآوردگرهای ML خواص بهینه دارند، اما برای یافتن آنها باید معادله‌ای غیرخطی برحسب β را حل کنیم. برای حل این معادله نیاز به روش‌های عددی است. به‌این ترتیب توزیع دقیق MLE ها قابل تعیین نیست و برای تعیین فواصل اطمینان پارامترهای مجهول لازم است از توزیع تقریبی آنها استفاده کنیم. برآوردگرهای گشتاوری این توزیع به‌سادگی به‌دست نمی‌آیند و ممکن است همیشه موجود نباشند و یا حتی اگر موجود باشند ممکن است یکتا نباشند. برآوردگرهای گشتاوری اصلاح شده توزیع BS توسط ان‌جی و همکاران (۲۰۰۳) معرفی شد. این برآوردگرها به‌سادگی قابل محاسبه‌اند، فرم صریحی براساس مشاهدات نمونه دارند و برخلاف برآوردگرهای گشتاوری به‌طور یکتا وجود دارند. توزیع مجانبی آنها برای به‌دست آوردن فاصله اطمینان پارامترهای مجهول به‌کار می‌رود. کارایی این برآوردگرها با شبیه‌سازی مونت-کارلو قابل ارزیابی است.

۲ برآورد پارامترها به‌روش گرافیکی

در این قسمت تکنیک گرافیکی ساده‌ای برای استنباط پارامترهای این توزیع ارائه می‌شود. این ایده در واقع همان نمودار احتمال است و پارامترها از طریق عرض از مبدأ و شیب خط برازش داده شده بر داده‌ها

¹¹ Guirad et al.

¹² Chang and Tang

بنابراین $r = k(\circ)$ است. MLE پارامتر β که با $\hat{\beta}$ نشان می‌دهیم از حل تنها ریشه مثبت معادله زیر به دست می‌آید

$$\beta^2 - \beta \left[\frac{2n}{\sum_{i=1}^n t_i^{-1}} + \frac{n}{\sum_{i=1}^n (\beta + t_i)^{-1}} + \frac{n}{\sum_{i=1}^n t_i^{-1}} \left[\frac{n}{\sum_{i=1}^n (\beta + t_i)^{-1}} + \frac{\sum_{i=1}^n t_i}{n} \right] \right] = 0,$$

با در نظر گرفتن روابط بیان شده داریم

$$\beta^2 - \beta[2r + k(\beta)] + r[s + k(\beta)] = 0, \quad (8)$$

برآورد ماکسیمم درست‌نمایی α نیز به سادگی به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\hat{\alpha} = \left[\frac{s}{\hat{\beta}} + \frac{\hat{\beta}}{r} - 2 \right]^{1/2},$$

انگل‌هارت (۱۹۸۱) نشان داد $\hat{\beta}$ و $\hat{\alpha}$ دارای توزیع مجانبی نرمال دومتغیره است و داریم

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix} \sim N \left[\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\alpha^2}{2n} & 0 \\ 0 & \frac{\beta^2}{n(2\beta + \alpha^{-1} + I(\alpha))} \end{pmatrix} \right], \quad (9)$$

که در آن

$$I(\alpha) = 2 \int_0^\infty \{ [1 + \xi^{-1}(\alpha z)]^{-1} - 0.5 \}^2 d\Phi(z),$$

برای اثبات این ادعا معادله زیر را در نظر بگیرید

$$\xi(t) = t^{1/2} - t^{-1/2}, \quad (10)$$

به این ترتیب تابع چگالی (۷) به صورت زیر خواهد بود

$$f(t; \alpha, \beta) = (\alpha\beta)^{-1} (2\pi)^{-1/2} \xi' \left(\frac{t}{\beta} \right) \exp \left[- (2\alpha^2)^{-1} \xi^2 \left(\frac{t}{\beta} \right) \right]. \quad (11)$$

با مشتق گرفتن از لگاریتم معادله (۱۱) نسبت به α و β داریم

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \ln f(t; \alpha, \beta) = \alpha^{-1} \{ \alpha^{-2} \left[\left(\frac{t}{\beta} \right) + \left(\frac{t}{\beta} \right)^{-1} - 2 \right] - 1 \}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \ln f(t; \alpha, \beta) = \beta^{-1} \{ -2^{-1} + 2^{-1} \alpha^{-2} \times \left[\left(\frac{t}{\beta} \right) + \left(\frac{t}{\beta} \right)^{-1} \right] + \left[\left(\frac{t}{\beta} \right) + 1 \right]^{-1} \}, \quad (13)$$

برای سادگی معادلات (۱۲) و (۱۳) را به ترتیب به صورت $G_2(t; \alpha, \beta)$ و $G_1(t; \alpha, \beta)$ نشان می‌دهیم. همچنین می‌توان نتیجه

گرفت اگر t دارای تابع چگالی (۱۱) باشد، آنگاه $z = t = \alpha^{-1} \xi(t/\beta)$ دارای توزیع نرمال استاندارد است. به عبارت دیگر $t = \alpha^{-1} \xi(t/\beta)$ که در آن ξ معکوس تابع ξ است. در این صورت

با استفاده از خواص مجموعه‌ها داریم

$$\begin{aligned} P[\underline{\alpha} \leq \alpha \leq \bar{\alpha}] &\geq P[\underline{a} \leq a \leq \bar{a}, \underline{b} \leq b \leq \bar{b}] \\ &\geq 1 - P[\{\underline{a} \leq a \leq \bar{a}\}^c] - P[\{\underline{b} \leq b \leq \bar{b}\}^c] \\ &= (1 - \gamma_1 - \gamma_2) \end{aligned}$$

بنابراین فاصله اطمینان تقریبی در سطح $100(1 - \gamma_1 - \gamma_2)\%$ برای پارامتر α به صورت زیر است

$$[\underline{\alpha}, \bar{\alpha}] = \left[\frac{b}{\sqrt{\bar{a}}}, \frac{\bar{b}}{\underline{a}} \right] \quad (6)$$

با استفاده از شیوه‌های رگرسیونی $[\underline{a}, \bar{a}]$ و $[\underline{b}, \bar{b}]$ فواصل اطمینان تقریبی به ترتیب در سطح‌های $100(1 - \gamma_1)\%$ و $100(1 - \gamma_2)\%$ برای a و b هستند. در ادامه مثالی برای بررسی نحوه این عملکرد این روش بیان می‌شود.

۳ برآوردهای ماکسیمم درست‌نمایی

برآوردهای ماکسیمم درست‌نمایی پارامترهای توزیع BS به وسیله بیرناب و ساندروز و توزیع مجانبی آن‌ها توسط انگل‌هارت (۱۹۸۱) به دست آمد. اگرچه MLE ها دارای خواص بهینه‌اند، اما برای یافتن آن‌ها باید معادله غیر خطی برحسب r حل کنیم. بیرناب و ساندروز چندین راهکار مفید برای حل این معادله ارائه دادند. به دلیل پیچیدگی این معادله توزیع دقیق MLE ها قابل تعیین نیست. بنابراین برای به دست آوردن فاصله اطمینان پارامترهای مجهول لازم است توزیع تقریبی آن‌ها را بدانیم.

رفتار این فواصل اطمینان تقریبی برای اندازه نمونه کوچک معلوم نیست و نیاز به بررسی‌های بیشتر دارد. فرض کنید $t_1, \dots, t_n$ نمونه‌ای تصادفی به حجم n از توزیع BS با تابع چگالی احتمال (pdf) زیر باشد

$$f_T(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(- \frac{1}{2\alpha^2} \left[\frac{t}{\beta} + \frac{\beta}{t} - 2 \right] \frac{t^{-1/2} [t + \beta]}{2\alpha\sqrt{\beta}} \right), \quad (7)$$

می‌دانیم میانگین‌های حسابی و هارمونیک به صورت زیر محاسبه می‌شوند

$$s = 1/n \sum_{i=1}^n t_i, \quad r = \left[1/n \sum_{i=1}^n t_i^{-1} \right]^{-1}$$

فرض کنید تابع میانگین هارمونیک k را به صورت زیر تعریف کنیم

$$k(x) = \left[1/n \sum_{i=1}^n (x + t_i)^{-1} \right]^{-1}; x > 0$$

(MME) اولین پیشنهاد برای برآورد α و β هستند. آن‌ها به راحتی قابل محاسبه‌اند و فرم صریحی برحسب مشاهدات نمونه دارند. برخلاف برآوردگرهای گشتاوری، برآوردگرهای گشتاوری اصلاح شده به طور یکتا وجود دارند. این برآوردگرها توسط ان‌جی و همکاران (۲۰۰۳) معرفی شد. توزیع مجانبی MME ها برای ساختن فواصل اطمینان برای پارامترهای مجهول به کار می‌روند. برای به دست آوردن برآوردگرهای گشتاوری معمول به‌ویژه در حالت دوپارامتری، گشتاورهای اول و دوم جامعه را متناظر با گشتاورهای نمونه‌ای قرار می‌دهیم. این برآوردگرها با حل معادلاتی برحسب α و β به دست می‌آیند. می‌توان نشان داد اگر ضریب تغییرات نمونه بیشتر از $\sqrt{5}$ باشد، برآوردگرهای گشتاوری وجود ندارد و اگر ضریب تغییرات نمونه از $\sqrt{5}$ کوچکتر باشد، برآوردگرهای گشتاوری وجود دارد، اگرچه ممکن است برآوردگرهای گشتاوری β یکتا نباشد. فرض کنید $T \sim BS(\alpha, \beta)$ و تبدیل یکنوای زیر را در نظر بگیرد

$$X = \frac{1}{\beta} \left[\left(\frac{T}{\beta} \right)^{1/2} - \left(\frac{T}{\beta} \right)^{-1/2} \right] \quad (17)$$

و نیز داریم

$$T = \beta(1 + 2X^2 + 2X(1 + X^2)^{1/2}).$$

تابع توزیع متغیر تصادفی T را به صورت زیر در نظر بگیرید

$$F_T(t; \alpha, \beta) = \Phi\left(\frac{1}{\alpha} \left[\left(\frac{t}{\beta} \right)^{1/2} - \left(\frac{\beta}{t} \right)^{1/2} \right]\right); \quad t > 0, \alpha, \beta > 0. \quad (18)$$

حال از (۱۷) و (۱۸) می‌توان نتیجه گرفت که X دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس $\frac{1}{4}\alpha^2$ است. با به کارگیری این تبدیل، امید ریاضی و واریانس به راحتی به دست می‌آید

$$E(T) = \beta(1 + \frac{1}{4}\alpha^2) \quad (19)$$

$$Var(T) = (\alpha\beta)^2(1 + \frac{5}{4}\alpha^2), \quad (20)$$

به علاوه اگر T دارای توزیع BS با پارامترهای α و β باشد، آنگاه T^{-1} نیز دارای توزیع BS با پارامترهای α و β^{-1} است. این مطلب با اعمال تبدیل مناسب و با استفاده از (۱۸) به سادگی اثبات می‌شود. با توجه به این ویژگی توزیع BS با استفاده از (۱۹) و (۲۰) داریم

$$E(T^{-1}) = \beta^{-1}(1 + \frac{1}{4}\alpha^2) \quad (21)$$

$G_1(t; \alpha, \beta)$ و $G_2(t; \alpha, \beta)$ به ترتیب به صورت $G_1(\xi^{-1}(\alpha z); \alpha, 1)$ و $G_2(\xi^{-1}(\alpha z); \alpha, 1)$ خواهد بود.

حال برای به دست آوردن ماتریس اطلاعات فشر فرض کنید $j = 1, 2$ و $i = 1, 2$, $B_{ij}(\alpha, \beta) = E[G_i(t; \alpha, \beta)G_j(t; \alpha, \beta)]$ به سادگی می‌توان نشان داد شرایط نظم برای تابع چگالی (۱۱) برقرار است و به این ترتیب $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ دارای توزیع مجانبی نرمال با میانگین‌های α و β ماتریس کواریانس مجانبی $\|nB_{ij}(\alpha, \beta)\|^{-1}$ است و داریم

$$B_{11}(\alpha, \beta) = \alpha^{-2}E(Z^2 - 1)^2 = 2\alpha^{-2}. \quad (14)$$

به علاوه برای هر α و β ثابت معادله زیر تابع فردی از z است.

$$G_1(t; \alpha, \beta)G_2(t; \alpha, \beta) = \beta^{-1}G_1(\xi^{-1}(\alpha z); \alpha, 1)G_2(\xi^{-1}(\alpha z); \alpha, 1)$$

و از آنجایی که توزیعی حول صفر متقارن است داریم

$$B_{12}(\alpha, \beta) = B_{21}(\alpha, \beta) = 0. \quad (15)$$

حال عضو دیگر ماتریس کواریانس به صورت زیر به دست می‌آید

$$B_{22}(\alpha, \beta) = \int_0^\infty G_2^2(t; \alpha, \beta)f(t; \alpha, \beta)dt$$

که با ساده کردن به صورت زیر در می‌آید

$$B_{22}(\alpha, \beta) = \beta^{-2}[1/4 + \alpha^{-2} + I(\alpha)] \quad (16)$$

که در آن

$$I(\alpha) = 2 \int_0^\infty \{[1 + \xi^{-1}(\alpha z)]^{-1} - 0.5\}^2 d\Phi(z)$$

و ماتریس واریانس-کواریانس به صورت زیر به دست می‌آید

$$\|nB_{ij}(\alpha, \beta)\|^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha^2}{4n} & 0 \\ 0 & \frac{\beta^2}{n(0.75 + \alpha^{-2} + I(\alpha))} \end{pmatrix}$$

به این ترتیب رابطه (۹) برقرار است. نکته دیگر در اینجا استقلال مجانبی $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ است. فاصله اطمینان مجانبی برای α به سادگی از (۹) به دست می‌آید. به علاوه فاصله اطمینان مجانبی β به ازای مقادیر α مفروض از (۹) قابل محاسبه است.

۴ برآوردگرهای گشتاوری تعدیل یافته

برآوردگرهای گشتاوری به سادگی قابل محاسبه نیستند و ممکن است همیشه وجود نداشته باشند یا حتی اگر موجود باشند، ممکن است یکتا نباشند. برای حل این مشکل برآوردگرهای گشتاوری اصلاح شده^{۱۳})

¹³Modified Moment estimator

که در آن

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{11} = \text{Var}(T) = (\alpha\beta)^2(1 + \frac{5}{4}\alpha^2),$$

$$\begin{aligned} \sigma_{12} = \sigma_{21} &= \text{Cov}(T, T^{-1}) \\ &= E(1) - E(T)E(T^{-1}) = 1 - (1 + \frac{1}{4}\alpha^2)^2 \end{aligned}$$

$$\sigma_{22} = \text{Var}(T^{-1}) = \alpha^2\beta^{-2}(1 + \frac{5}{4}\alpha^2),$$

حال لازم است توزیع توأم مجانبی زیر را به دست آوریم

$$\begin{pmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\beta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(S, R) \\ f_2(S, R) \end{bmatrix}$$

که در آن

$$f_1(x, y) = \{2[(\frac{x}{y})^{1/2} - 1]\}^{1/2}, \quad f_2(x, y) = (xy)^{1/2}$$

با استفاده از قضیه کرامر داریم

$$\sqrt{n} \begin{pmatrix} \tilde{\alpha} - \alpha \\ \tilde{\beta} - \beta \end{pmatrix} \sim N \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tilde{\Sigma} \right]$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} \Sigma \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} \bigg|_{x=E(T), y=E(T^{-1})} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha^2/2 & 0 \\ 0 & (\alpha\beta)^2 \left(\frac{1+\alpha^2/4}{(1+\frac{1}{4}\alpha^2)^2} \right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

که با محاسبه مشتقات زیر به دست می آید

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} \bigg|_{x=E(T), y=E(T^{-1})} = \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}},$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} \bigg|_{x=E(T), y=E(T^{-1})} = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}},$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} \bigg|_{x=E(T), y=E(T^{-1})} = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}},$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} \bigg|_{x=E(T), y=E(T^{-1})} = -\frac{\beta^2}{\sqrt{1+\alpha^2}},$$

$$\text{Var}(T^{-1}) = \alpha^2\beta^{-2}(1 + \frac{5}{4}\alpha^2), \quad (22)$$

برای به دست آوردن برآوردگرهای گشتاوری اصلاح شده به جای استفاده از معادلات (۱۹) و (۲۰) از معادلات (۲۱) و (۲۲) استفاده می کنیم و آن ها را با برآوردهای نمونه ای متناظر معادل قرار می دهیم. در این صورت دو معادله گشتاوری به صورت زیر خواهیم داشت

$$s = \beta(1 + \frac{1}{4}\alpha^2) \quad (23)$$

$$r^{-1} = \beta^{-1}(1 + \frac{1}{4}\alpha^2) \quad (24)$$

با حل این معادلات برحسب α و β برآوردگرهای گشتاوری اصلاح شده که با نماد $\tilde{\alpha}$ و $\tilde{\beta}$ نشان می دهیم، به صورت زیر خواهد بود

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha} &= \{2[(\frac{s}{r})^{1/2} - 1]\}^{1/2} \\ \tilde{\beta} &= (sr)^{1/2}. \end{aligned}$$

نشان می دهیم توزیع مجانبی $\tilde{\alpha}$ و $\tilde{\beta}$ نرمال دومتغیره است. یعنی داریم

$$\begin{pmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\beta} \end{pmatrix} \sim N \left[\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\alpha^2}{n} & 0 \\ 0 & \frac{(\alpha\beta)^2}{n} \left(\frac{1+\alpha^2/4}{(1+\frac{1}{4}\alpha^2)^2} \right) \end{pmatrix} \right], \quad (25)$$

همان طور که مشاهده می شود $\tilde{\alpha}$ و $\tilde{\beta}$ همانند برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی به طور مجانبی از یکدیگر مستقل اند. حال به اثبات رابطه (۲۵) می پردازیم. فرض کنید $T_n, \dots, T_1, T$ متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع BS با چگالی (۷) باشند. متغیرهای تصادفی S و R را به صورت زیر در نظر بگیریم

$$S = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i, \quad R = [\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i^{-1}]^{-1},$$

با استفاده از قانون قوی اعداد بزرگ S و R^{-1} به طور قریب به یقین به ترتیب به $E(T)$ و $E(T^{-1})$ همگرا هستند. همچنین طبق قضیه حد مرکزی S و R^{-1} دارای توزیع مجانبی نرمال اند. به این ترتیب هر ترکیب خطی از آن ها نیز دارای توزیع مجانبی نرمال است. به عبارتی

$$aS + bR^{-1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [aT_i + bT_i^{-1}],$$

برای هر مقدار a و b دارای توزیع مجانبی نرمال است. بنابراین $(S \ R^{-1})'$ نیز دارای توزیع مجانبی نرمال دومتغیره است. به ویژه

$$\sqrt{n} \begin{pmatrix} S - E(T) \\ R^{-1} - E(T^{-1}) \end{pmatrix} \sim N \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \Sigma \right]$$

۵ برآوردگرهای جک‌نایف

اساس برآوردگرهای جک‌نایف^{۱۴} حذف دنباله‌ای نقاط از نمونه و محاسبه MLE و MME ها با نمونه‌ای به اندازه $n - 1$ است. با خارج کردن نقطه t_j از نمونه و محاسبه دوباره مقادیر r و s و تابع k داریم

$$s(j) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1, i \neq j}^n t_j = \frac{ns - t_j}{n-1},$$

$$r(j) = \left[\frac{1}{n-1} \sum_{i=1, i \neq j}^n t_j^{-1} \right]^{-1} = \frac{nr - t_j^{-1}}{n-1},$$

$$k(j)(x) = \left[\frac{1}{n-1} \sum_{i=1, i \neq j}^n (x + t_j)^{-1} \right]^{-1} = \frac{nk(x) - (x + t_j)^{-1}}{n-1},$$

پس $\hat{\beta}_j$ با محاسبه ریشه یکتای معادله زیر به دست می‌آید

$$\beta^2 - \beta[2r(j) + k(j)(\beta)] + r(j)[s(j) + k(j)(\beta)] = 0,$$

و

$$\hat{\alpha}_{(j)} = \left[\frac{s(j)}{\hat{\beta}_j} + \frac{\hat{\beta}_j}{r(j)} - 2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

و نیز به‌طور مشابه داریم

$$\tilde{\alpha}_{(j)} = \left\{ 2 \left[\frac{s(j)}{r(j)} \right]^{\frac{1}{2}} - 1 \right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$\tilde{\beta}_{(j)} = (s(j)r(j))^{\frac{1}{2}}$$

و با در نظر گرفتن تعاریف زیر برآوردگرهای جک‌نایف به دست می‌آید

$$\hat{\beta}_{(.)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \hat{\beta}_{(j)}, \quad \hat{\alpha}_{(.)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \hat{\alpha}_{(j)},$$

$$\tilde{\beta}_{(.)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \tilde{\beta}_{(j)}, \quad \tilde{\alpha}_{(.)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \tilde{\alpha}_{(j)},$$

همچنین برآوردگرهای ماکسیمم درستمایی اریبی تصحیح شده جک‌نایف که با نماد JMLE نشان می‌دهیم به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\hat{\alpha}_J = n\hat{\alpha} - (n-1)\hat{\alpha}_{(.)}, \quad \hat{\beta}_J = n\hat{\beta} - (n-1)\hat{\beta}_{(.)},$$

برای جزئیات بیشتر به افرون^{۱۵} (۱۹۸۲) مراجعه کنید. JMME های

پارامترهای α و β نیز به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\tilde{\alpha}_J = n\tilde{\alpha} - (n-1)\tilde{\alpha}_{(.)}, \quad \tilde{\beta}_J = n\tilde{\beta} - (n-1)\tilde{\beta}_{(.)},$$

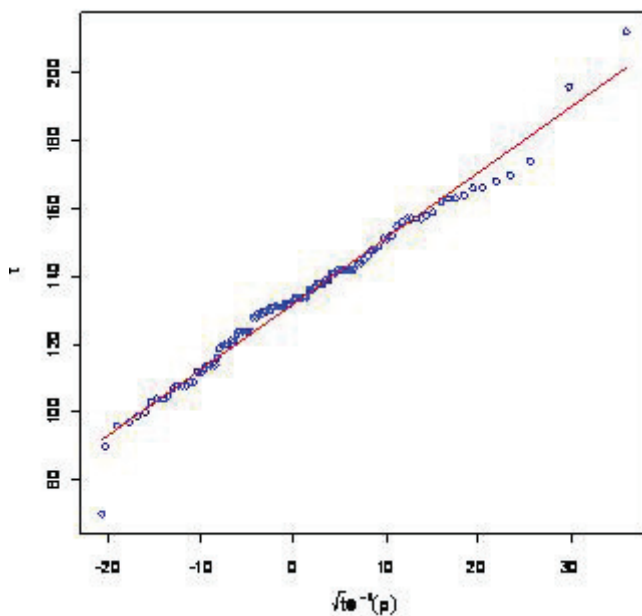
۶ بررسی دقت برآوردگرها

ابتدا مثالی عددی برای چگونگی عملکرد برآوردگرها به شیوه گرافیکی بیان می‌شود. بسته bs در نرم‌افزار R قابلیت اجرای فرمان‌های توزیع

BS را دارد. فرمان $gmbS()$ در نرم‌افزار R برای برآورد پارامترهای α و β به روش گرافیکی به کار می‌رود. برآورد این پارامترها برای داده‌های فرسودگی ورق‌های آلومینیومی که به وسیله بیرنهام و ساندروز ارائه شده، به دست آمده است. این داده‌ها شامل $n = 101$ مشاهده است که تحت بیشترین میزان استرس یعنی 31000 psi در 18 سیکل نوسانی به دست آمده است. این داده‌ها به صورت پیش فرض در بسته bs نرم‌افزار R به نام $psi31$ موجود است. برآورد α و β و نمودار احتمال به روش گرافیکی برای این داده‌ها به دست آمده است که در جدول ۱ و شکل ۱ ارائه شده است.

جدول ۱: برآورد α و β به روش گرافیکی

$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	R^2
۰.۱۶۸۶	۱۳۱.۹۲۲۴	۰.۹۷۷۲



شکل ۱: نمودار احتمال توزیع BS برای داده‌های $psi31$

همان‌طور که مشاهده می‌شود $R^2 = 0.977$ است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت داده‌ها دارای توزیع BS می‌باشند. این آماره که R^2 شاپیرو-ویلک نامیده می‌شود، روشی برای آزمون دوری از فرض‌های توزیعی است. در حقیقت معیاری برای درستی نمودار احتمال است و مقادیر کوچک آن نشان‌دهنده انحراف از توزیع می‌باشد. با استفاده از روش حداقل مربعات شیب و عرض از مبدأ و فواصل اطمینان برای پارامترها با استفاده از معادله (۵) به دست می‌آید. همچنین در کنار نتایج حاصل از داده‌های

¹⁵Efron

جدول ۲ خلاصه شده است. در ادامه برآوردهای حاصل از این روش را با برآوردهای ماکسیمم درستنمایی مقایسه می‌کنیم.

کامل نتایج مشابه با داده‌های سانسور شده از راست به‌دست آمده است که در آن از ۲۱ داده از داده‌های کامل صرف نظر شده است. برای هر دو دسته از داده‌ها R^2 به‌دست آمده مقدار مشابهی دارد. نتایج حاصل در

جدول ۲: برآوردهای حداقل مربعات و فواصل اطمینان ۹۰٪

داده‌ها	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$[\underline{\alpha}, \bar{\alpha}]$	$[\underline{\beta}, \bar{\beta}]$	R^2
داده‌های کامل	۰.۱۶۸۶	۱۳۱.۹	[۰.۱۶۳، ۰.۱۷۴]	[۱۳۱.۳، ۱۳۲.۵]	۰.۹۷۷
سانسور شده نوع II	۰.۱۷۵۰	۱۳۲.۵	[۰.۱۶۸، ۰.۱۸۲]	[۱۳۲.۰، ۱۳۳.۰]	۰.۹۶۵

که در آن $h_2(x) = \frac{1+3/4x^2}{(1+1/2x^2)^2}$ است.

از آنجایی که برخی از برآوردها نا اریب هستند برای بررسی نحوه عملکرد آنها از معیار MSE استفاده شده است. از نتایج شبیه‌سازی واضح است که برای مقادیر مختلف نمونه و برای α های نه‌چندان بزرگ MLE ها و MME ها عملکرد تقریباً یکسانی دارند. در محاسبات جداگانه که در مقاله نیامده است مشاهده شد که برآوردهای متوسط MLE ها و MME ها و انحراف استاندارد آن‌ها به ازای α های کمتر از ۰/۵، تا چهار رقم اعشار برهم منطبق‌اند. در نتیجه MSE این برآوردها نیز به ازای α های کمتر از ۰/۵ تا چهار رقم اعشار برهم منطبق‌اند. همچنین مشاهده شد برای n های کوچک و α های بزرگ میزان اریبی زیاد است. با توجه به جدول ۳ واضح است MME ها و MML ها برای مقادیر کوچک α تقریباً عملکرد یکسانی دارند و نیز مشاهده می‌کنیم با افزایش n میزان MSE کاهش میابد به‌طوری‌که به ازای $n = 50, 100$ و مقادیر α کوچک تقریباً برابر صفر است. همچنین واضح است این برآوردها برای مقادیر کمتر α عملکرد بهتری دارد ولی به‌طور کلی مقادیر میانگین توان دوم خطا برای مقادیر α و β مفروض کم است و این نشان دهنده عملکرد نسبتاً خوب این برآوردها است.

تقدیر و تشکر

نویسندگان مقاله از پیشنهاد های اصلاحی داوران محترم مقاله که باعث بهبود ارائه شد کمال تشکر و قدردانی را دارند.

نتایج شبیه‌سازی مونت کارلو

برای مقایسه برآوردهای مذکور مطالعات شبیه سازی را برای اندازه‌های نمونه مختلف و مقادیر مختلف پارامترها انجام داده‌ایم. برای برآورد پارامترها به روش ML، MM، و گرافیکی با شبیه‌سازی فرمان‌هایی در بسته bs نرم افزار R وجود دارد. اندازه نمونه را به‌صورت $\alpha = 5, 10, 20, 50, 100$ و $n = 5, 10, 25, 50, 100$ اختیار می‌کنیم. از آنجایی که β پارامتر مقیاس است، مقدار ثابت β را بدون برهم خوردن کلیت مسأله برابر ۱ اختیار می‌کنیم. همه نتایج براساس ۱۰۰۰۰ دوره به‌دست آمده و در جدول ۳ خلاصه شده‌است. با توجه به توزیع مجانبی برآوردهای ماکسیمم درستنمایی و گشتاوری اصلاح شده، فواصل اطمینان $(1-\gamma)\%$ برای α و β به‌ترتیب به‌صورت زیر خواهد بود

$$\left(\hat{\alpha} \left[\frac{z_{\gamma/2}}{\sqrt{\hat{\alpha}}} + 1 \right]^{-1}, \hat{\alpha} \left[\frac{z_{1-\gamma/2}}{\sqrt{\hat{\alpha}}} + 1 \right]^{-1} \right),$$

$$\left(\hat{\beta} \left[\frac{z_{\gamma/2}}{\sqrt{n h_1(\hat{\alpha})}} + 1 \right]^{-1}, \hat{\beta} \left[\frac{z_{1-\gamma/2}}{\sqrt{n h_1(\hat{\alpha})}} + 1 \right]^{-1} \right),$$

که در آن $h_1(x) = 0.25 + x^{-2} + I(x)$ ، z_P -امین صدک توزیع نرمال استاندارد است. به‌طور مشابه فواصل اطمینان $(1-\gamma)\%$ برای α و β براساس MME ها به‌صورت زیر است

$$\left(\tilde{\alpha} \left[\frac{z_{\gamma/2}}{\sqrt{\tilde{\alpha}}} + 1 \right]^{-1}, \tilde{\alpha} \left[\frac{z_{1-\gamma/2}}{\sqrt{\tilde{\alpha}}} + 1 \right]^{-1} \right),$$

$$\left(\tilde{\beta} \left[\frac{z_{\gamma/2}}{\sqrt{n h_2(\tilde{\alpha})}} + 1 \right]^{-1}, \tilde{\beta} \left[\frac{z_{1-\gamma/2}}{\sqrt{n h_2(\tilde{\alpha})}} + 1 \right]^{-1} \right),$$

جدول ۳: میانگین توان دوم خطا (MSE) برآوردها براساس شبیه‌سازی مونت کارلو ($\beta = 1/0$)

N	α	برآورد α				برآورد β			
		MLE	MME	JMLE	JMME	MLE	MME	JMLE	JMME
۵	۰.۱۰	۰.۰۰۱۲	۰.۰۰۱۲	۰.۰۰۱۴	۰.۰۰۹۸	۰.۰۰۲۰	۰.۰۰۲۰	۰.۰۰۲۰	۰.۰۰۲۰
	۰.۲۵	۰.۰۰۷۴	۰.۰۰۷۴	۰.۰۰۸۸	۰.۰۰۸۸	۰.۰۱۲۷	۰.۰۱۲۷	۰.۰۱۲۵	۰.۰۱۲۵
	۰.۵۰	۰.۰۲۹۹	۰.۰۲۹۹	۰.۰۳۵۵	۰.۰۳۵۵	۰.۰۵۱۷	۰.۰۵۱۷	۰.۰۴۹۵	۰.۰۴۹۴
	۱.۰۰	۰.۱۲۲۱	۰.۱۲۲۰	۰.۱۴۹۰	۰.۱۴۸۴	۰.۲۱۷۰	۰.۲۱۷۰	۰.۱۹۹۳	۰.۱۹۲۱
	۲.۰۰	۰.۵۲۹۱	۰.۵۲۴۲	۰.۶۹۲۷	۰.۶۶۶۸	۰.۹۶۸۳	۰.۹۷۶۳	۱.۱۱۱۸	۰.۸۸۹۵
۱۰	۰.۱۰	۰.۰۰۰۵	۰.۰۰۰۵	۰.۰۰۰۶	۰.۰۰۰۶	۰.۰۰۱۰	۰.۰۰۱۰	۰.۰۰۱۰	۰.۰۰۱۰
	۰.۲۵	۰.۰۰۳۴	۰.۰۰۳۴	۰.۰۰۳۶	۰.۰۰۳۶	۰.۰۰۶۱	۰.۰۰۶۱	۰.۰۰۶۱	۰.۰۰۶۱
	۰.۵۰	۰.۰۱۳۴	۰.۰۱۳۴	۰.۰۱۴۴	۰.۰۱۴۴	۰.۰۲۴۱	۰.۰۲۴۱	۰.۰۲۳۵	۰.۰۲۳۵
	۱.۰۰	۰.۰۵۴۷	۰.۰۵۴۶	۰.۰۵۹۳	۰.۰۵۹۳	۰.۰۹۰۲	۰.۰۹۰۲	۰.۰۸۴۴	۰.۰۸۳۱
	۲.۰۰	۰.۲۳۰۷	۰.۲۲۹۱	۰.۲۵۶۲	۰.۲۵۳۷	۰.۲۸۲۲	۰.۲۸۷۴	۰.۲۶۸۷	۰.۲۳۸۲
۲۰	۰.۱۰	۰.۰۰۰۳	۰.۰۰۰۳	۰.۰۰۰۳	۰.۰۰۰۳	۰.۰۰۰۵	۰.۰۰۰۵	۰.۰۰۰۵	۰.۰۰۰۵
	۰.۲۵	۰.۰۰۱۶	۰.۰۰۱۶	۰.۰۰۱۶	۰.۰۰۱۶	۰.۰۰۳۱	۰.۰۰۳۱	۰.۰۰۳۱	۰.۰۰۳۱
	۰.۵۰	۰.۰۰۶۴	۰.۰۰۶۴	۰.۰۰۶۶	۰.۰۰۶۶	۰.۰۱۲۲	۰.۰۱۲۲	۰.۰۱۲۰	۰.۰۱۲۰
	۱.۰۰	۰.۰۲۵۸	۰.۰۲۵۸	۰.۰۲۶۷	۰.۰۲۶۷	۰.۰۴۲۵	۰.۰۴۲۶	۰.۰۴۰۸	۰.۰۴۰۶
	۲.۰۰	۰.۱۰۶۲	۰.۱۰۵۸	۰.۱۱۰۵	۰.۱۱۰۳	۰.۱۰۹۸	۰.۱۱۳۹	۰.۱۰۱۳	۰.۰۹۹۶
۵۰	۰.۱۰	۰.۰۰۰۱	۰.۰۰۰۱	۰.۰۰۰۱	۰.۰۰۰۱	۰.۰۰۰۲	۰.۰۰۰۲	۰.۰۰۰۲	۰.۰۰۰۲
	۰.۲۵	۰.۰۰۰۶	۰.۰۰۰۶	۰.۰۰۰۶	۰.۰۰۰۶	۰.۰۰۱۳	۰.۰۰۱۳	۰.۰۰۹۳۲	۰.۰۰۱۲
	۰.۵۰	۰.۰۰۲۵	۰.۰۰۲۵	۰.۰۰۲۶	۰.۰۰۲۶	۰.۰۰۴۸	۰.۰۰۴۸	۰.۰۰۴۸	۰.۰۰۴۸
	۱.۰۰	۰.۰۱۰۲	۰.۰۱۰۲	۰.۰۱۰۳	۰.۰۱۰۳	۰.۰۱۶۲	۰.۰۱۶۳	۰.۰۱۶۰	۰.۰۱۶۰
	۲.۰۰	۰.۰۴۱۴	۰.۰۴۱۳	۰.۰۴۱۵	۰.۰۴۱۵	۰.۰۳۳۷	۰.۰۳۹۴	۰.۰۳۶۱	۰.۰۳۷۳
۱۰۰	۰.۱۰	۰.۰۰۰۰	۰.۰۰۰۰	۰.۰۰۰۱	۰.۰۰۰۱	۰.۰۰۰۱	۰.۰۰۰۱	۰.۰۰۰۱	۰.۰۰۰۱
	۰.۲۵	۰.۰۰۰۳	۰.۰۰۰۳	۰.۰۰۰۳	۰.۰۰۰۳	۰.۰۰۰۶	۰.۰۰۰۶	۰.۰۰۰۶	۰.۰۰۰۶
	۰.۵۰	۰.۰۰۱۳	۰.۰۰۱۳	۰.۰۰۱۳	۰.۰۰۱۳	۰.۰۰۲۴	۰.۰۰۲۴	۰.۰۰۲۴	۰.۰۰۲۴
	۱.۰۰	۰.۰۰۵۰	۰.۰۰۵۰	۰.۰۰۵۰	۰.۰۰۵۰	۰.۰۶۵۴۵	۰.۰۰۷۹	۰.۰۰۷۹	۰.۰۰۷۹
	۲.۰۰	۰.۰۲۰۲	۰.۰۲۰۲	۰.۰۲۰۲	۰.۰۲۰۲	۰.۰۱۸۰	۰.۰۱۸۷	۰.۰۱۷۷	۰.۰۱۸۲

مراجع

- [1] Birnbaum, Z. W. and Saunders, S. C. (1969a). A New Family of Life Distributions. *Journal of Applied Probability*, vol. **6**, pp. 319-327.
- [2] Birnbaum, Z. W. and Saunders, S. C. (1969b). Estimation for a Family of Life Distributions With Applications to Fatigue. *Journal of Applied Probability*, vol. **6**, pp. 328-347.
- [3] Cramer, H. (1946). *Mathematical Methods of Statistics*. Princeton University Press, Princeton, USA.
- [4] Desmond, A. (1985). Stochastic Models of Failure in Random Environments. *Canadian Journal of Statistics*, vol. **13**, pp. 171-183.
- [5] Desmond, A. F. (1986). On the Relationship Between Two Fatigue-Life Models. *IEEE Transaction on Reliability*, vol. **R-35**, pp. 167-169.
- [6] Diaz-Garcia, J. A. and Leiva, V. (2005). A New Family of Life Distributions Based on Elliptically Contoured Distributions. *Journal of Statistical Planning and Inference*, vol. **128**, pp. 445-457.
- [7] Engelhardt, M.; Bain, L. J. and Wright, F. T. (1981). Inferences on the Parameters of the Birnbaum-Saunders Fatigue Life Distribution Based on Maximum Likelihood Estimation. *Technometrics* **23**, 251-255.
- [8] Guiraud, P.; Leiva, V. and Fierro, R. (2009). A Non-Central Version of The Birnbaum-Saunders Distribution for Reliability Analysis. *IEEE Transactions on Reliability*, vol. **58**, 152-160.
- [9] Leiva, V.; Sanhueza, A. and Angulo, J. M. (2009). A Length-Biased Version of the Birnbaum-Saunders Distribution With Application in Water Quality. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, vol. **23**, 299-307.
- [10] Marshall, A. W. and Olkin, I. (2007). *Life Distributions-Structure of Non-parametric, Semiparametric, and Parametric Families*. Springer, New York.
- [11] Ng, H. K.; Kundu, D. and Balakrishnan, N. (2003). Modified Moment Estimation for the Two-Parameter Birnbaum-Saunders Distribution. *Computational Statistics and Data Analysis*, vol. **43**, pp. 283-298.
- [12] Vilca-Labra, F. and Leiva, V. (2006). A New Fatigue Life Model Based on the Family of Skew-Elliptical Distributions. *Communications in Statistics Theory and Methods*, vol. **35**, pp. 229-244.