

تحلیل مدل خودبازگشتی با عوامل ابداع همبسته و غیرگاوسی

صدیقه زمانی مهریان^{۱*} و آرزو حاجرجبی^۲

^۱ گروه آمار، دانشکده علوم پایه، دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره)، قزوین، ایران

^۲ گروه آمار، دانشکده علوم پایه، دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره)، قزوین، ایران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۰۹/۱۰

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۵/۰۶/۲۷

چکیده

اما در بعضی از پژوهش‌ها و مطالعات کاربردی این فرضیات باعث ایجاد محدودیت می‌شوند، به عبارت دیگر با مواردی مواجه می‌شویم که عوامل ابداع مستقل نیستند و یا از توزیع گاوسی پیروی نمی‌کنند. در این مقاله مدل خودبازگشتی با عوامل ابداع همبسته و غیرگاوسی در نظر گرفته شده است. همچنین فرض می‌شود که مدل درست مجهول است، بنابراین به منظور انتخاب مدل بهینه مدل‌های رقیب پیشنهاد می‌شوند. پارامترهای مجهول مدل‌های رقیب با استفاده از روش درستنمایی ماکسیمم تعدیل یافته برآورد شده است. در نهایت با استفاده از معیارهای اطلاع از جمله معیار اطلاع آکائیکه و آزمون‌های انتخاب مدل مانند آزمون وونگ به انتخاب مدل بهینه از بین مدل‌های رقیب پرداخته شده است. با استفاده از شبیه‌سازی، عملکرد روش درستنمایی ماکسیمم تعدیل یافته در برآورد پارامترهای مجهول مورد مطالعه قرار گرفته و همچنین نشان داده شده است که معیارها و آزمون‌های انتخاب مدل، نزدیک‌ترین مدل به مدل درست را به عنوان مدل بهینه انتخاب می‌کنند.

واژه‌های کلیدی: برآوردگر درستنمایی ماکسیمم تعدیل یافته، خانواده نمایی، خانواده وایبول، عوامل ابداع همبسته، مدل خودبازگشتی. **رده‌بندی ریاضی:** ۶۲J۰۷، ۶۲F۱۵.

جامع‌تری دست یابند.

۱ مقدمه

از فرضیات معمول در مدل‌های سری زمانی، فرض گاوسی بودن عوامل ابداع است. فرض گاوسی بودن سری باعث ایجاد محدودیت در کار کردن با سری زمانی می‌شود. در صورتی که عوامل ابداع گاوسی نباشند، دو دسته کلی از توزیع‌ها برای عوامل ابداع وجود دارند، توزیع‌های متقارن و نامتقارن که متغیر تصادفی مربوط به این دو دسته از توزیع‌ها، مقادیر خود را از R یا R^+ اختیار می‌کند. در سال‌های اخیر، مدل‌های سری زمانی با ساختار خودبازگشتی با عوامل ابداع غیرگاوسی مورد توجه پژوهشگران قرار گرفته است. از جمله این نوع مدل‌های سری زمانی می‌توان به مدل خودبازگشتی نمایی اشاره کرد که توسط گاور

هدف کلی از تحلیل داده‌های سری زمانی، توصیف، برازش مدل مناسب و پیش‌بینی است. برای این منظور، ابتدا مدل‌هایی برای برازش بر روی داده‌ها پیشنهاد و سپس براساس معیارها و آزمون‌ها، مدل مناسبی انتخاب می‌شود. در تعیین مدل سری زمانی برای برازش بر روی داده‌ها، شناخت مدل، انتخاب مرتبه‌ی مدل و توزیع عوامل ابداع از اهمیت فراوانی برخوردار است. در دهه‌های اخیر در بحث انتخاب مدل، آزمون‌ها، معیارها و روش‌های گوناگونی پیشنهاد و به کار گرفته شده است. در واقع ضعف‌ها و توانایی‌های این معیارها و آزمون‌ها، پژوهش‌گرهای این حوزه را بر آن داشته است که به ملاک و معیار

توزیع عوامل ابداع از دو خانواده نمایی و وایبول پیروی می‌کردند و پارامترهای مجهول مدل را با استفاده از روش درستمایی ماکسیم تعدیل‌یافته برآورد کردند. آن‌ها همچنین به انتخاب مدل بهینه با استفاده از روش‌های انتخاب مدل از جمله آزمون وونگ بر اساس روش درستمایی ماکسیم تعدیل‌یافته برای این نوع از مدل‌های سری زمانی پرداختند. در مدلی که زمانی و سیاره (۲۰۱۷) در نظر گرفتند هر چند که فرض گاوسی بودن عوامل ابداع نادیده گرفته شده اما همچنان فرض استقلال عوامل ابداع برقرار است.

در این مقاله مدل خودبازگشتی با عوامل ابداع همبسته و غیرگاوسی در نظر گرفته شده به‌گونه‌ای که دو فرض کلاسیک استقلال و گاوسی بودن عوامل ابداع به‌طور همزمان حذف شده‌اند. در بسیاری از پژوهش‌های پیشین تنها یکی از این دو فرض نقض شده است، در حالی که در این مقاله هر دو ویژگی به‌صورت همزمان در مدل لحاظ شده‌اند. از جمله مشکلات این نوع از مدل‌های سری زمانی، برآورد پارامترهای مجهول مدل است که در این مقاله برآوردهای درستمایی ماکسیم تعدیل‌یافته (MMLE) برای برآورد پارامترهای مدل‌های خودبازگشتی با عوامل ابداع همبسته و غیرگاوسی از خانواده‌های نمایی و وایبول پیشنهاد شده است. این روش موجب اجتناب از مشکلات روش‌های عددی کلاسیک و وابستگی شدید آن‌ها به مقادیر اولیه می‌شود. همچنین عملکرد معیارها و آزمون‌های انتخاب مدل، از جمله معیار اطلاع آکائیکه و آزمون وونگ، در انتخاب مدل بهینه در شرایطی که مدل‌ها بدتبیین شده‌اند و عوامل ابداع دارای ساختار همبستگی و توزیع غیرگاوسی هستند، بررسی و مقایسه شدند و کاربرد عملی مدل پیشنهادی در تحلیل داده‌های واقعی شاخص بورس $S\&P500$ نشان داده شده است که بیانگر توانایی مدل در تحلیل داده‌های مالی با رفتار غیرگاوسی و وابستگی زمانی است.

اگر چه مدل خودبازگشتی مرتبه اول با عوامل ابداع همبسته را می‌توان به‌صورت معادل به شکل یک مدل خودبازگشتی مرتبه دوم با عوامل ابداع مستقل بازنویسی کرد، با این حال در این مقاله تمرکز اصلی بر مدل‌سازی صریح ساختار وابستگی در عوامل ابداع و بررسی اثر همزمان همبستگی و غیرگاوسی بودن عوامل ابداع بر فرآیند برآورد و انتخاب مدل است. این نمایش امکان تفسیر مستقیم وابستگی موجود در ساختار خطاها را فراهم می‌کند و چارچوب مناسبی برای توسعه برآوردهای درستمایی ماکسیم تعدیل‌یافته ارائه می‌دهد.

مقاله به شرح زیر سازماندهی شده است: در بخش ۲، برآوردهای درستمایی ماکسیم تعدیل‌یافته مدل خودبازگشتی با عوامل ابداع همبسته و غیرگاوسی محاسبه شده است. در بخش ۳، با استفاده از

و لویس (۱۹۸۰) پیشنهاد شده است. از طرفی مدل خودبازگشتی مرتبه اول با عوامل ابداع گاما در بسیاری از پدیده‌های طبیعی مورد استفاده قرار گرفته است. مالر (۲۰۰۳) برآوردهای شبه درستمایی ماکسیم مدل‌های رگرسیون با عوامل ابداع همبسته در دو حالت مانایی و نامایی را مورد بررسی قرار داد. تیکو و همکاران (۲۰۰۷) مدل رگرسیون با عوامل ابداع همبسته با توزیع متقارن را مورد مطالعه قرار دادند و برآوردهایی با فرم بسته برای پارامترهای مجهول این مدل به‌دست آوردند. بایرکا و آکایا (۲۰۱۰) مدل‌های خودبازگشتی با عوامل ابداع غیرگاوسی را مطالعه کردند و با در نظر گرفتن سه نوع مختلف از توزیع‌های غیرگاوسی از جمله توزیع‌های متقارن دم‌کلفت، چوله لجستیک تعمیم‌یافته و متقارن دم‌نازک برآوردهای درستمایی ماکسیم این مدل‌ها را محاسبه کردند. بارتلت و مک‌کورمی (۲۰۱۲) مدل‌های خودبازگشتی مرتبه اول با پارامتر مکانی مجهول را مورد مطالعه قرار دادند و برآوردهای برای پارامترهای مجهول این مدل‌ها ارائه دادند. بورگوینگنو و واسکونسلو (۲۰۱۵) مدل خودبازگشتی نامنفی مرتبه اول با عوامل ابداع سری توانی را معرفی کردند و ویژگی‌هایی از این مدل مانند میانگین، واریانس، تابع خودهمبستگی، تابع درستمایی شرطی را مورد مطالعه قرار دادند و برآوردهای پارامترهای مجهول این مدل ارائه دادند. لی و تانگ (۲۰۲۰) ارتباط بین ساختار توزیع چوله-نرمال و یک فرآیند خودبازگشتی با فرآیند تصادفی با توزیع‌های چوله-کوشی و برخی توزیع‌های متقارن دیگر را مطالعه کردند.

معادلات درستمایی مدل‌های سری زمانی با عوامل ابداع غیرگاوسی دارای جواب صریحی نیستند، بنابراین برای محاسبه برآوردهای درستمایی ماکسیم از روش‌های عددی استفاده می‌شود که این روش‌ها به‌شدت تحت تأثیر مقادیر شروع هستند. یکی از روش‌های جایگزین برای برآورد پارامترهای مدل خودبازگشتی، با عوامل ابداع نامنفی خطی کردن معادلات درستمایی است که جواب صریحی ندارند. روش درستمایی ماکسیم تعدیل‌یافته توسط تیکو (۱۹۶۷) برای برآورد پارامترهای مجهولی پیشنهاد شد که معادلات درستمایی آن‌ها جواب صریح ندارند. این روش برپایه‌ی خطی کردن این معادلات بر اساس بسط تیلور است. برای مطالعه بیشتر در این زمینه می‌توان به مقالات آکایا و تیکو (۲۰۰۵، ۲۰۰۶، ۲۰۱۸) مراجعه کرد. سیاره (۲۰۱۲) معیارها و آزمون‌های انتخاب مدل از جمله آزمون وونگ، آزمون کاکس، معیار اطلاع آکائیکه و معیار اطلاع بیزی را مورد مطالعه قرار داد و توانایی این معیارها و آزمون‌ها را در انتخاب مدل در بین مدل‌های خطی غیرآشایی بررسی کرد. زمانی و سیاره (۲۰۱۷) مدل خودبازگشتی با عوامل ابداع غیرگاوسی را در مورد مطالعه قرار دادند که در آن

یکی از روش‌های برآورد در مدل‌های سری زمانی، روش درستنمایی ماکسیمم است. تابع لگاریتم درستنمایی $Y_1, \dots, Y_T$ به شرط $Y_1 = y_1, Y_2 = y_2$ به صورت

$$l(\eta, \phi, \rho) = \sum_{t=3}^T \sum_{i=1}^k \eta_i C_i(y_t - (\phi + \rho)y_{t-1} + \phi \rho y_{t-2}) - TA(\eta) + \sum_{t=3}^T \log h(y_t - (\phi + \rho)y_{t-1} + \phi \rho y_{t-2}),$$

قابل محاسبه است. برآوردگرهای درستنمایی ماکسیمم با حل معادلات درستنمایی

$$\begin{aligned} \frac{\partial l(\eta, \phi, \rho)}{\partial \eta_i} &= \sum_{t=3}^T C_i(u_t) - T \frac{\partial}{\partial \eta_i} A(\eta) = 0, \quad i = 1, \dots, k \\ \frac{\partial l(\eta, \phi, \rho)}{\partial \phi} &= \sum_{t=3}^T \eta' \frac{\partial}{\partial \phi} C(u_t) + \sum_{t=3}^T \frac{\partial}{\partial \phi} \log h(u_t) \\ &= \sum_{t=3}^T \eta' \frac{\partial}{\partial \phi} C(u_t^* + \mu_u) + \sum_{t=3}^T \frac{\partial}{\partial \phi} \log h(u_t^* + \mu_u) = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial l(\eta, \phi, \rho)}{\partial \rho} &= \sum_{t=3}^T \eta' \frac{\partial}{\partial \rho} C(u_t) + \sum_{t=3}^T \frac{\partial}{\partial \rho} \log h(u_t) \\ &= \sum_{t=3}^T \eta' \frac{\partial}{\partial \rho} C(u_t^* + \mu_u) + \sum_{t=3}^T \frac{\partial}{\partial \rho} \log h(u_t^* + \mu_u) = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

محاسبه می‌شوند که در آن $u_t^* = u_t - \mu_u$ برای $t = 3, \dots, T$ و $\mu_u = E(u_t)$ است. چون معادلات درستنمایی (۴) و (۵) جواب صریح ندارند، معمولاً روش‌های عددی برای محاسبه برآوردگرها استفاده می‌شوند اما روش‌های عددی به شدت تحت تأثیر مقادیر اولیه هستند. تیکو (۱۹۶۷) روش درستنمایی ماکسیمم تعدیل‌یافته را برای برآورد پارامترهای مدل وقتی که معادلات درستنمایی جواب صریحی نداشته باشند، پیشنهاد داد. در این روش با استفاده از بسط تیلور جملات غیرخطی، معادلات درستنمایی خطی می‌شوند. به منظور محاسبه برآوردگر درستنمایی ماکسیمم تعدیل‌یافته، تابع $M(u_t^*)$ را به صورت

$$M(u_t^*) = \eta' \frac{\partial}{\partial \phi} C(u_t^* + \mu_u) + \frac{\partial}{\partial \phi} \log h(u_t^* + \mu_u),$$

تعریف می‌کنیم و بسط تیلور آن تا جمله‌ی دوم حول $\bar{u}_d = \bar{u}_T - \mu_u$ را به صورت

$$M(u_t^*) = M(\bar{u}_d) + M'(\bar{u}_d)(u_t^* - \bar{u}_d) + o_p(|u_t^* - \bar{u}_d|). \quad (6)$$

می‌نویسیم. با جایگذاری معادله (۶) در معادله (۴) برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی تعدیل‌یافته با حل معادلات

$$\sum_{t=3}^T C_i(u_t) - T \frac{\partial}{\partial \eta_i} A(\eta) = 0,$$

شبیه‌سازی عملکرد برآوردگرهای به دست آمده با مقایسه میانگین مربع خطا مربوط به هر کدام از برآوردگرها مورد مطالعه قرار گرفته است. همچنین مدل خودبازگشتی بهینه با عوامل ابداع همبسته غیرگوسی با استفاده از روش‌های انتخاب مدل از جمله آزمون وونگ انتخاب می‌شود. آنالیز داده‌های واقعی شاخص بورس آمریکا بر اساس ارزش بازار ۵۰۰ شرکت بزرگ دارای سهام عام، $S\&P500$ ، در بخش ۴ ارائه شده است.

۲ مدل خودبازگشتی با عوامل ابداع همبسته و غیرگوسی

مدل خودبازگشتی مرتبه‌ی اول

$$Y_t = \phi Y_{t-1} + \epsilon_t, \quad (1)$$

را در نظر بگیرید که در آن ϕ ضریب خودبازگشتی و ϵ_t ها، عوامل ابداع هستند. معمولاً در مدل خودبازگشتی فرض می‌شود که عوامل ابداع مستقل و هم‌توزیع هستند که از توزیع گاوسی پیروی می‌کنند، به زمانی و سیاره (۲۰۱۷) مراجعه کنید. در این مقاله دو فرض استقلال و گاوسی بودن عوامل ابداع نادیده گرفته می‌شود. به عبارت دیگر، فرض می‌کنیم عوامل ابداع همبسته هستند و از مدل خودبازگشتی مرتبه اول

$$\epsilon_t = \rho \epsilon_{t-1} + u_t \quad (2)$$

و u_t از توزیع غیرگوسی پیروی می‌کند. با جایگذاری معادله (۲) در معادله (۱)، مدل را می‌توان به صورت

$$\begin{aligned} Y_t &= \phi Y_{t-1} + (\rho \epsilon_{t-1} + u_t), \\ &= (\phi + \rho) Y_{t-1} - \phi \rho Y_{t-2} + u_t, \end{aligned} \quad (3)$$

بازنویسی کرد که معادل یک مدل خودبازگشتی مرتبه دوم است. با این وجود، نمایش مدل بر حسب عوامل ابداع همبسته امکان مطالعه مستقیم وابستگی موجود در ساختار خطاها و بررسی اثر توزیع‌های غیرگوسی را فراهم می‌سازد. ابتدا فرض می‌کنیم که عوامل ابداع از خانواده‌ی توزیع نمایی با تابع چگالی احتمال

$$f^\eta(u_t) = \exp\{\eta' C(u_t) - A(\eta)\} h(u_t), \quad t = 3, \dots, T$$

پیروی می‌کنند که در آن $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_k)'$ پارامترهای کانونی، آماره‌ی $C(u_t) = (C_1(u_t), \dots, C_k(u_t))$ تابع $A(\eta)$ تابعی از پارامترهای کانونی و تابع $h(u_t)$ تابعی از عوامل ابداع هستند.

و

با توجه به این که معادله (۱۰) جواب صریح ندارد با جایگذاری بسط تیلور $N(u_t^*)$ حول $\bar{u}_d$ ،

$$N(u_t^*) \cong N(\bar{u}_d) + N'(\bar{u}_d)(u_t^* - \bar{u}_d),$$

در معادله (۱۰) برآوردگر ماکسیمم درستنمایی تعدیل یافته‌ی پارامترهای مجهول مدل به صورت زیر قابل محاسبه هستند:

$$\hat{\lambda}_T = T \left(\sum_{t=\tau}^T H(u_t; \xi) \right)^{-1}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial l(\lambda, \xi, \phi)}{\partial \xi} = -\lambda \sum_{t=\tau}^T \frac{\partial}{\partial \xi} H(u_t; \xi) + \sum_{t=\tau}^T \frac{\partial}{\partial \xi} \log h(u_t; \xi) = 0, \quad (12)$$

$$\hat{\phi}_T = \frac{\sum_{t=\tau}^T \left(N(\bar{u}_d) + N'(\bar{u}_d)((y_t - \mu_y) - \rho(y_{t-1} - \mu_y) - \bar{u}_d) \right)}{\sum_{t=\tau}^T \left(N'(\bar{u}_d)((y_{t-1} - \mu_y) - \rho(y_{t-2} - \mu_y)) \right)}. \quad (13)$$

به طور مشابه برای پارامتر ρ داریم:

$$\hat{\rho}_T = \frac{\sum_{t=\tau}^T \left(N(\bar{u}_d) + N'(\bar{u}_d)((y_t - \mu_y) - \phi(y_{t-1} - \mu_y) - \bar{u}_d) \right)}{\sum_{t=\tau}^T \left(N'(\bar{u}_d)((y_{t-1} - \mu_y) - \phi(y_{t-2} - \mu_y)) \right)}.$$

در ادامه، توزیع های گاما و لگ-نرمال از خانواده ی توزیع های نمایی و توزیع وایبول از خانواده ی توزیع های وایبول برای عوامل ابداع در نظر گرفته شده است. ابتدا شکل پارامتری توزیع های گاما، لگ-نرمال و وایبول بیان، ویژگی های اصلی هر توزیع شامل میانگین و واریانس محاسبه و سپس پارامترهای مجهول مدل با استفاده از روش درستنمایی ماکسیمم تعدیل یافته برآورد شده اند. برای توزیع گاما از پارامترسازی مبتنی بر پارامترهای شکل و مقیاس، $G(\alpha, \beta)$ ، استفاده شده است که در آن $E(U) = \alpha\beta^2$ ، $Var(U) = \alpha\beta^2$. برای توزیع لگ-نرمال، $LN(\mu, \sigma^2)$ ، فرض شده است که $\log(U) \sim N(\mu, \sigma^2)$ و بنابراین

$$E(U) = \exp \left(\mu + \frac{\sigma^2}{4} \right),$$

$$Var(U) = (\exp(\sigma^2) - 1) \exp(2\mu + \sigma^2).$$

همچنین برای توزیع وایبول، $W(k, \nu)$ ، از پارامترسازی مبتنی بر پارامتر شکل (k) و پارامتر مقیاس (ν) استفاده شده است که دارای میانگین و واریانس زیر است:

$$E(U) = \nu \Gamma \left(1 + \frac{1}{k} \right),$$

$$Var(U) = \nu^2 \left[\Gamma \left(1 + \frac{2}{k} \right) - \Gamma^2 \left(1 + \frac{1}{k} \right) \right].$$

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{t=\tau}^T M(u_t^*) = \sum_{t=\tau}^T \left(M(\bar{u}_d) + M'(\bar{u}_d)(u_t^* - \bar{u}_d) \right), \\ &= \sum_{t=\tau}^T \left(M(\bar{u}_d) + M'(\bar{u}_d)((y_t - \mu_y) - (\phi + \rho)(y_{t-1} - \mu_y) \right. \\ &\quad \left. + \phi\rho(y_{t-2} - \mu_y)) - \bar{u}_d \right), \end{aligned}$$

به دست می آیند؛ بنابراین

$$\frac{\partial A(\eta)}{\partial \eta_i} \Big|_{\eta=\hat{\eta}} = \frac{1}{T} \sum_{t=\tau}^T C_i(u_t). \quad (14)$$

$$\hat{\phi}_T = \frac{\sum_{t=\tau}^T \left(M(\bar{u}_d) + M'(\bar{u}_d)((y_t - \mu_y) - \rho(y_{t-1} - \mu_y) - \bar{u}_d) \right)}{\sum_{t=\tau}^T \left(M'(\bar{u}_d)((y_{t-1} - \mu_y) - \rho(y_{t-2} - \mu_y)) \right)}. \quad (15)$$

به طور مشابه برای پارامتر ρ داریم

$$\hat{\rho}_T = \frac{\sum_{t=\tau}^T \left(M(\bar{u}_d) + M'(\bar{u}_d)((y_t - \mu_y) - \phi(y_{t-1} - \mu_y) - \bar{u}_d) \right)}{\sum_{t=\tau}^T \left(M'(\bar{u}_d)((y_{t-1} - \mu_y) - \phi(y_{t-2} - \mu_y)) \right)}.$$

همچنین، با استفاده از روش درستنمایی ماکسیمم تعدیل یافته می توان پارامترهای مدل خودبازگشتی با عوامل ابداع همبسته از خانواده ی توزیع های وایبول را نیز برآورد کرد.

مدل (۳) با عوامل ابداع همبسته از خانواده ی وایبول با تابع چگالی

$$g^{(\lambda, \xi)}(u_t) = \lambda \exp \{ -\lambda H(u_t; \xi) \} h(u_t; \xi),$$

را در نظر بگیرید که در آن $H(u_t; \xi)$ تابعی صعودی و تابع $h(u_t; \xi)$ مشتق تابع $H(u_t; \xi)$ هستند. لگاریتم تابع درستنمایی $Y_\tau, \dots, Y_T$ به شرط $Y_1 = y_1, Y_\tau = y_\tau$ به صورت

$$l(\lambda, \xi, \phi, \rho) = T \log \lambda - \lambda \sum_{t=\tau}^T H(u_t; \xi) + \sum_{t=\tau}^T \log h(u_t; \xi),$$

است. برآوردگرهای درستنمایی ماکسیمم پارامترهای مجهول، با حل معادلات درستنمایی زیر به صورت

$$\begin{aligned} \frac{\partial l(\lambda, \xi, \phi, \rho)}{\partial \lambda} &= \frac{T}{\lambda} - \sum_{t=\tau}^T H(u_t; \xi) = 0, \\ \frac{\partial l(\lambda, \xi, \phi)}{\partial \xi} &= -\lambda \sum_{t=\tau}^T \frac{\partial}{\partial \xi} H(u_t; \xi) + \sum_{t=\tau}^T \frac{\partial}{\partial \xi} \log h(u_t; \xi) = 0, \\ \frac{\partial l(\lambda, \xi, \phi, \rho)}{\partial \phi} &= \sum_{t=\tau}^T N(u_t^*) = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

قابل محاسبه هستند که در آن

$$N(u_t^*) = -\lambda \frac{\partial}{\partial \phi} H(u_t^* + \mu_u; \xi) + \frac{\partial}{\partial \phi} \log h(u_t^* + \mu_u; \xi).$$

با جایگذاری معادلات (۱۵) و (۱۶) در معادله (۸) برآورد پارامتر مجهول ϕ_1 به صورت زیر به دست می آید:

$$\hat{\phi}_{T,1} = \frac{\left(\frac{(\bar{u}_d + \mu_u)^T}{\beta T(\hat{\alpha}_T - 1)} - (\bar{u}_d + \mu_u)\right) \sum_{t=2}^T ((y_{t-1} - \mu_y) - \hat{\rho}_{T,1}(y_{t-2} - \mu_y))}{\sum_{t=2}^T ((y_{t-1} - \mu_y) - \hat{\rho}_{T,1}(y_{t-2} - \mu_y))^2} + \frac{\sum_{t=2}^T ((y_{t-1} - \mu_y) - \hat{\rho}_{T,1}(y_{t-2} - \mu_y))((y_t - \mu_y) - \hat{\rho}_{T,1}(y_{t-1} - \mu_y) - \bar{u}_d)}{\sum_{t=2}^T ((y_{t-1} - \mu_y) - \hat{\rho}_{T,1}(y_{t-2} - \mu_y))^2} \quad (17)$$

به طور مشابه داریم:

$$\hat{\rho}_{T,1} = \frac{\left(\frac{(\bar{u}_d + \mu_u)^T}{\beta T(\hat{\alpha}_T - 1)} - (\bar{u}_d + \mu_u)\right) \sum_{t=2}^T ((y_{t-1} - \mu_y) - \hat{\phi}_{T,1}(y_{t-2} - \mu_y))}{\sum_{t=2}^T ((y_{t-1} - \mu_y) - \hat{\phi}_{T,1}(y_{t-2} - \mu_y))^2} + \frac{\sum_{t=2}^T ((y_{t-1} - \mu_y) - \hat{\phi}_{T,1}(y_{t-2} - \mu_y))((y_t - \mu_y) - \hat{\phi}_{T,1}(y_{t-1} - \mu_y) - \bar{u}_d)}{\sum_{t=2}^T ((y_{t-1} - \mu_y) - \hat{\phi}_{T,1}(y_{t-2} - \mu_y))^2} \quad (18)$$

۲.۲ مدل خودبازگشتی با عوامل ابداع همبسته و توزیع لگ-نرمال

مدل خودبازگشتی (۳) با عوامل ابداع از توزیع $LN(\mu, \sigma^2)$ با تابع چگالی احتمال زیر را در نظر بگیرید:

$$f_1^\theta(u_t) = \frac{1}{u_t \sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\log(u_t) - \mu)^2\right\} = \frac{1}{u_t \sqrt{2\pi}} \exp\{\eta_{11}(\log(u_t))^2 + \eta_{12} \log(u_t) - A(\eta_1)\},$$

که در آن $\eta_{12} = \frac{\mu}{\sigma^2}$, $\eta_{11} = -\frac{1}{\sigma^2}$, $\theta = (\mu, \sigma^2, \phi_2, \rho_2)$

$$h(u_t) = \frac{1}{(u_t) \sqrt{2\pi}},$$

$$u_t = (y_t - (\phi_2 + \rho_2)y_{t-1} + \phi_2 \rho_2 y_{t-2})$$

و

$$A(\eta_1) = \frac{\mu^2}{2\sigma^2} + \frac{1}{2} \log \sigma^2 = -\frac{\eta_{12}^2}{4\eta_{11}} + \frac{1}{2} \log\left(-\frac{1}{2\eta_{11}}\right).$$

با استفاده از معادلات (۷)-(۹) برآوردگر درستنمایی ماکسیم تعدیل یافته پارامترهای مجهول مدل به صورت زیر محاسبه می شوند:

$$\hat{\mu}_T = \frac{1}{T} \sum_{t=2}^T \log(y_t - (\hat{\phi}_{T,2} + \hat{\rho}_{T,2})y_{t-1} + \hat{\phi}_{T,2}\hat{\rho}_{T,2}y_{t-2}),$$

$$\hat{\sigma}_T^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=2}^T (\log(y_t - (\hat{\phi}_{T,2} + \hat{\rho}_{T,2})y_{t-1} + \hat{\phi}_{T,2}\hat{\rho}_{T,2}y_{t-2}) - \hat{\mu}_T)^2$$

$$\hat{\phi}_{T,2} = \frac{\left(\frac{\log(\bar{u}_d + \mu_u) - \hat{\mu}_T + \hat{\sigma}_T^2}{\hat{\sigma}_T^2(\bar{u}_d + \mu_u)}\right) \sum_{t=2}^T (y_{t-1} - \mu_y) - \hat{\rho}_{T,2}(y_{t-2} - \mu_y)}{\left(\frac{\log(\bar{u}_d + \mu_u) - \hat{\mu}_T + \hat{\sigma}_T^2}{\hat{\sigma}_T^2(\bar{u}_d + \mu_u)}\right) \sum_{t=2}^T ((y_{t-1} - \mu_y) - \hat{\rho}_{T,2}(y_{t-2} - \mu_y))^2} + \frac{\sum_{t=2}^T ((y_{t-1} - \mu_y) - \hat{\rho}_{T,2}(y_{t-2} - \mu_y))((y_t - \mu_y) - \hat{\rho}_{T,2}(y_{t-1} - \mu_y) - \bar{u}_d)}{\sum_{t=2}^T ((y_{t-1} - \mu_y) - \hat{\rho}_{T,2}(y_{t-2} - \mu_y))^2} \quad (19)$$

۱.۲ مدل خودبازگشتی با عوامل ابداع همبسته و توزیع گاما

مدل (۳) با عوامل ابداع همبسته و هم توزیع از توزیع $G(\alpha, \beta)$ با تابع چگالی احتمال زیر را در نظر بگیرید:

$$f_1^\theta(u_t) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} (u_t)^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{u_t}{\beta}\right) = \exp\{-\eta_{11}(y_t - (\phi_1 + \rho_1)y_{t-1} + \phi_1 \rho_1 y_{t-2}) + \eta_{12} \log(y_t - (\phi_1 + \rho_1)y_{t-1} + \phi_1 \rho_1 y_{t-2}) - A(\eta_1)\},$$

که در آن $\eta_{12} = \alpha - 1$, $\eta_{11} = -\frac{1}{\beta}$, $\theta = (\alpha, \beta, \phi_1, \rho_1)$ و

$$A(\eta_1) = \alpha \log \beta + \log \Gamma(\alpha) = (\eta_{12} + 1) \log\left(-\frac{1}{\eta_{11}}\right) + \log \Gamma(\eta_{12} + 1).$$

با استفاده از روابط (۷)، (۸) و (۹) برآورد پارامترهای مجهول مدل به صورت زیر قابل محاسبه هستند:

$$\Gamma_d = \frac{1}{T} \sum_{t=2}^T \log(u_t),$$

که در آن $\Gamma_d = \frac{\partial}{\partial \alpha} \log(\Gamma(\alpha))$ و

$$\hat{\beta}_T = \frac{1}{T \hat{\alpha}_T} \sum_{t=2}^T (y_t - (\hat{\phi}_{T,1} + \hat{\rho}_{T,1})y_{t-1} + \hat{\phi}_{T,1}\hat{\rho}_{T,1}y_{t-2}).$$

برای برآورد پارامتر مجهول ϕ_1 تابع $M(u_t^*)$

$$M(u_t^*) = -\frac{1}{\hat{\beta}_T} \frac{\partial}{\partial \phi_1} (u_t^* + \mu_u) + (\hat{\alpha}_T - 1) \frac{\partial}{\partial \phi_1} \log(u_t^* + \mu_u) = \frac{1}{\hat{\beta}_T} ((y_{t-1} - \mu_y) - \hat{\rho}_{T,1}(y_{t-2} - \mu_y)) - (\hat{\alpha}_T - 1) \frac{((y_{t-1} - \mu_y) - \hat{\rho}_{T,1}(y_{t-2} - \mu_y))}{(u_t^* + \mu_u)}.$$

را تعریف می کنیم. مشتق مرتبه اول تابع $M(u_t^*)$ به صورت

$$M'(u_t^*) = (\hat{\alpha}_T - 1) \frac{(y_{t-1} - \mu_y) - \hat{\rho}_{T,1}(y_{t-2} - \mu_y)}{(u_t^* + \mu_u)^2},$$

است؛ بنابراین داریم:

$$M(\bar{u}_d) = \frac{1}{\hat{\beta}_T} ((y_{t-1} - \mu_y) - \hat{\rho}_{T,1}(y_{t-2} - \mu_y)) \quad (14)$$

$$- (\hat{\alpha}_T - 1) \frac{((y_{t-1} - \mu_y) - \hat{\rho}_{T,1}(y_{t-2} - \mu_y))}{(\bar{u}_d + \mu_u)}, \quad (15)$$

$$M'(\bar{u}_d) = (\hat{\alpha}_T - 1) \frac{(y_{t-1} - \mu_y) - \hat{\rho}_{T,1}(y_{t-2} - \mu_y)}{(\bar{u}_d + \mu_u)^2}. \quad (16)$$

و

برای برآورد پارامتر مجهول ϕ_r توابع $N(\bar{u}_d)$ و $N'(\bar{u}_d)$ به صورت

$$N(\bar{u}_d) = \left(\frac{\hat{k}_T}{\hat{\nu}^{\hat{k}_T}} (\bar{u}_d + \mu_u)^{\hat{k}_T - 1} - \frac{(\hat{k}_T - 1)}{(\bar{u}_d + \mu_u)} \right) \times \left((y_{t-1} - \mu_y) - \hat{\rho}_{T,r}(y_{t-2} - \mu_y) \right), \quad (21)$$

$$N'(\bar{u}_d) = \left(\frac{-\hat{k}_T(\hat{k}_T - 1)(\bar{u}_d + \mu_u)^{\hat{k}_T - 2}}{\hat{\nu}^{\hat{k}_T}} + \frac{(\hat{k}_T - 1)}{(\bar{u}_d + \mu_u)^2} \right) \times \left((y_{t-1} - \mu_y) - \hat{\rho}_{T,r}(y_{t-2} - \mu_y) \right). \quad (22)$$

قابل محاسبه هستند. با جایگذاری معادلات (۲۱) و (۲۲) در رابطه‌ی (۱۳) برآورد پارامتر مجهول ϕ_r به صورت

$$\hat{\phi}_{T,r} = \frac{(\bar{u}_d + \mu_u) \left(\frac{\hat{k}_T}{\hat{\nu}^{\hat{k}_T}} (\bar{u}_d + \mu_u) - (\hat{k}_T - 1) \right) \sum_{t=r}^T ((y_{t-1} - \mu_y) - \hat{\rho}_{T,r}(y_{t-2} - \mu_y))}{\left(\left(\frac{\hat{k}_T}{\hat{\nu}^{\hat{k}_T}} (\hat{k}_T - 1) (\bar{u}_d + \mu_u)^{\hat{k}_T} + (\hat{k}_T - 1) \right) \sum_{t=r}^T ((y_{t-1} - \mu_y) - \hat{\rho}_{T,r}(y_{t-2} - \mu_y))^2 \right.} \\ \left. + \frac{\sum_{t=r}^T ((y_{t-1} - \mu_y) - \hat{\rho}_{T,r}(y_{t-2} - \mu_y)) ((y_t - \mu_y) - \hat{\rho}_{T,r}(y_{t-1} - \mu_y) - \bar{u}_d)}{\sum_{t=r}^T ((y_{t-1} - \mu_y) - \hat{\rho}_{T,r}(y_{t-2} - \mu_y))^2} \right) \quad (23)$$

به دست می‌آید. همچنین، می‌توان با انجام تمام مراحل مربوط به برآورد پارامتر مجهول ϕ_r برای پارامتر مجهول ρ_r ، برآورد این پارامتر را نیز به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\hat{\rho}_{T,r} = \frac{(\bar{u}_d + \mu_u) \left(\frac{\hat{k}_T}{\hat{\nu}^{\hat{k}_T}} (\bar{u}_d + \mu_u) - (\hat{k}_T - 1) \right) \sum_{t=r}^T ((y_{t-1} - \mu_y) - \hat{\phi}_{T,r}(y_{t-2} - \mu_y))}{\left(\left(\frac{\hat{k}_T}{\hat{\nu}^{\hat{k}_T}} (\hat{k}_T - 1) (\bar{u}_d + \mu_u)^{\hat{k}_T} + (\hat{k}_T - 1) \right) \sum_{t=r}^T ((y_{t-1} - \mu_y) - \hat{\phi}_{T,r}(y_{t-2} - \mu_y))^2 \right.} \\ \left. + \frac{\sum_{t=r}^T ((y_{t-1} - \mu_y) - \hat{\phi}_{T,r}(y_{t-2} - \mu_y)) ((y_t - \mu_y) - \hat{\phi}_{T,r}(y_{t-1} - \mu_y) - \bar{u}_d)}{\sum_{t=r}^T ((y_{t-1} - \mu_y) - \hat{\phi}_{T,r}(y_{t-2} - \mu_y))^2} \right). \quad (24)$$

$$\hat{\rho}_{T,r} = \frac{\left(\frac{\log(\bar{u}_d + \mu_u) - \hat{\mu}_T + \hat{\sigma}_T^2}{\hat{\sigma}_T^2 (\bar{u}_d + \mu_u)} \right) \sum_{t=r}^T (y_{t-1} - \mu_y) - \hat{\phi}_{T,r}(y_{t-2} - \mu_y)}{\left(\frac{\log(\bar{u}_d + \mu_u) - \hat{\mu}_T + \hat{\sigma}_T^2}{\hat{\sigma}_T^2 (\bar{u}_d + \mu_u)} \right) \sum_{t=r}^T ((y_{t-1} - \mu_y) - \hat{\phi}_{T,r}(y_{t-2} - \mu_y))^2} \\ + \frac{\sum_{t=r}^T ((y_{t-1} - \mu_y) - \hat{\phi}_{T,r}(y_{t-2} - \mu_y)) ((y_t - \mu_y) - \hat{\phi}_{T,r}(y_{t-1} - \mu_y) - \bar{u}_d)}{\sum_{t=r}^T ((y_{t-1} - \mu_y) - \hat{\phi}_{T,r}(y_{t-2} - \mu_y))^2} \quad (20)$$

۳.۲ مدل خودبازگشتی با عوامل ابداع همبسته و توزیع وایبول

به طور مشابه، برآوردهای ماکسیم درستنمایی تعدیل یافته پارامترهای مجهول مدل خودبازگشتی با عوامل ابداع از خانواده‌ی توزیع‌های وایبول را نیز می‌توان با استفاده از روابط (۱۱) - (۱۳) به دست آورد. مدل خود بازگشتی (۳) با عوامل ابداع از توزیع $W(k, \nu)$ با تابع چگالی احتمال زیر را در نظر بگیرید:

$$f_r^\theta(u_t) = \frac{k}{\nu^k} \left(y_t - (\phi_r + \rho_r)y_{t-1} + \phi_r \rho_r y_{t-2} \right)^{k-1} \times \exp \left(- \left(\frac{y_t - (\phi_r + \rho_r)y_{t-1} + \phi_r \rho_r y_{t-2}}{\nu} \right)^k \right),$$

که در آن $H(u_t; \xi) = u_t^k$ و $\lambda = (1/\nu)^k$ ، $\theta = (k, \nu, \phi_r, \rho_r)$ هستند. با استفاده از معادلات (۱۱) - (۱۳) داریم:

۳ مطالعه‌ی شبیه‌سازی

در این بخش به مطالعه‌ی عملکرد برآوردگر درستنمایی ماکسیم تعدیل یافته برای مدل خودبازگشتی با عوامل ابداع همبسته غیرگاوسی با استفاده از شبیه‌سازی پرداخته شده است. این شبیه‌سازی شامل دو مرحله است. در مرحله اول، مدل خودبازگشتی مرتبه اول، مدل (۱)، با ضریب خود همبستگی $\phi = 0.2$ به عنوان مدل درست در نظر گرفته شده که در آن عوامل ابداع همبسته هستند و از مدل (۲) پیروی می‌کنند، $\rho = 0.1$ و u_t از توزیع $G(3, 2)$ ، $G(3, 2)$ و $LN(3, 2)$ پیروی می‌کند. در این مقاله، اندازه‌های نمونه ۱۰۰، ۲۰۰، ۳۰۰، ۴۰۰، ۵۰۰ با هدف بررسی رفتار برآوردهای پیشنهادی در نمونه‌های کوچک، متوسط و نسبتاً بزرگ انتخاب شده‌اند. هدف اصلی این انتخاب، مطالعه‌ی پایداری و سازگاری برآوردهای درستنمایی ماکسیم تعدیل یافته، $MMLE$ ، و همچنین ارزیابی عملکرد معیارهای انتخاب مدل با افزایش حجم نمونه بوده است. به طور مشخص، نمونه‌های کوچک‌تر

$$\hat{\lambda}_T = T \left(\sum_{t=r}^T u_t^{\hat{k}_T} \right)^{-1} = \frac{T}{\sum_{t=r}^T (y_t - (\hat{\phi}_{T,r} + \hat{\rho}_{T,r})y_{t-1} + \hat{\phi}_{T,r}\hat{\rho}_{T,r}y_{t-2})^{\hat{k}_T}}.$$

با توجه به رابطه $\hat{\nu}_T = (\hat{\lambda}_T)^{-\frac{1}{\hat{k}_T}}$ ، برآوردگر $\hat{\nu}_T$ به صورت

$$\hat{\nu}_T = \left(\frac{T}{\sum_{t=r}^T (y_t - (\hat{\phi}_{T,r} + \hat{\rho}_{T,r})y_{t-1} + \hat{\phi}_{T,r}\hat{\rho}_{T,r}y_{t-2})^{\hat{k}_T}} \right)^{-\frac{1}{\hat{k}_T}} = \left(\frac{1}{T} \sum_{t=r}^T (y_t - (\hat{\phi}_{T,r} + \hat{\rho}_{T,r})y_{t-1} + \hat{\phi}_{T,r}\hat{\rho}_{T,r}y_{t-2})^{\hat{k}_T} \right)^{\frac{1}{\hat{k}_T}},$$

قابل محاسبه است. همچنین

$$\frac{\partial l(k, \nu, \phi_r, \rho_r)}{\partial k} = -\frac{1}{\nu^k} \sum_{t=r}^T \frac{\partial}{\partial k} (u_t)^k + \sum_{t=r}^T \log(k(u_t)^{k-1}) = \frac{T}{k} + \sum_{t=r}^T \log(u_t) - \frac{1}{\nu^k} \sum_{t=r}^T (u_t)^k \log(u_t) = 0.$$

نمونه مقدار برآوردگر به دست آمده به مقدار درست پارامتر نزدیک تر می شود. همچنین، مقادیر میانگین توان های دوم خطا مربوط به برآورد پارامترها که میانگین توان دو تفاضل مقادیر درست پارامترها و مقادیر برآورد شده ی آن هاست، داخل پراکنش پایین هر سطر جدول نوشته شده است، این نتیجه را تأیید می کند زیرا با افزایش اندازه ی نمونه این مقادیر نیز کاهش می یابد.

جدول ۱. مقادیر برآوردگر درست نمایی ماکسیمم تعدیل یافته.

درست مدل	T	$\hat{\phi}$	$\hat{\rho}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$
$y_t = 0.2y_{t-1} + \epsilon_t$	۱۰۰	۰/۱۸۵۹۸	۰/۹۷۷۳	۲/۸۳۴۰۰	۱/۸۸۱۱۰
$\epsilon_t = 0.1\epsilon_{t-1} + u_t$		(۰/۹۰۶۰۱)	(۰/۹۰۶۳۳)	(۰/۹۰۶۳۸)	(۰/۹۰۶۷۲)
$u_t \sim N(0, 2)$	۲۰۰	۰/۱۹۵۱۶	۰/۱۰۶۲۹	۲/۸۷۱۱۶	۱/۹۹۰۱۲
		(۰/۹۰۳۰۳)	(۰/۹۰۳۲۲)	(۰/۹۰۳۶۲)	(۰/۹۰۳۵۰)
	۳۰۰	۰/۱۹۶۲۴	۰/۱۰۶۹۲	۲/۸۸۰۱۶	۱/۹۹۱۲۷
		(۰/۹۰۴۰۰)	(۰/۹۰۴۱۳)	(۰/۹۰۴۳۷)	(۰/۹۰۴۷۷)
	۴۰۰	۰/۱۹۶۶۰	۰/۱۰۷۰۵	۲/۸۸۷۰۳	۱/۹۹۳۳۵
		(۰/۹۰۱۲۹)	(۰/۹۰۱۳۴)	(۰/۹۰۱۹۹)	(۰/۹۰۲۵۰)
	۵۰۰	۰/۱۹۷۷۱	۰/۱۰۷۹۷	۲/۸۸۷۸۲	۱/۹۹۷۹۶
		(۰/۹۰۱۱۸)	(۰/۹۰۱۲۶)	(۰/۹۰۱۶۷)	(۰/۹۰۲۰۱)
درست مدل	T	$\hat{\phi}$	$\hat{\rho}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$
$y_t = 0.2y_{t-1} + \epsilon_t$	۱۰۰	۰/۱۹۳۹۳	۰/۱۰۶۷۹	۲/۸۹۲۰۳	۲/۰۳۱۱۸
$\epsilon_t = 0.1\epsilon_{t-1} + u_t$		(۰/۹۰۹۴۱)	(۰/۹۰۹۶۶)	(۰/۹۰۲۴۳)	(۰/۹۰۵۱۱)
$u_t \sim G(2, 2)$	۲۰۰	۰/۱۹۵۹۶	۰/۱۰۷۲۰	۲/۸۳۱۱۰	۲/۰۲۴۰۰
		(۰/۹۰۴۴۸)	(۰/۹۰۴۵۵)	(۰/۹۰۱۶۲)	(۰/۹۰۲۹۶)
	۳۰۰	۰/۱۹۷۳۵	۰/۱۰۸۲۹	۲/۸۴۸۴۳	۲/۰۱۹۵۸
		(۰/۹۰۳۳۷)	(۰/۹۰۳۵۵)	(۰/۹۰۳۲۹)	(۰/۹۰۱۸۴)
	۴۰۰	۰/۱۹۸۵۹	۰/۱۰۹۳۹	۲/۸۵۵۹۴	۲/۰۱۷۴۷
		(۰/۹۰۲۱۸)	(۰/۹۰۲۶۷)	(۰/۹۰۳۶۷)	(۰/۹۰۱۵۷)
	۵۰۰	۰/۱۹۸۷۴	۰/۱۰۹۵۲	۲/۸۶۲۷۷	۲/۰۱۶۳۱
		(۰/۹۰۱۸۷)	(۰/۹۰۱۹۴)	(۰/۹۰۳۵۹)	(۰/۹۰۱۲۹)
درست مدل	T	$\hat{\phi}$	$\hat{\rho}$	$\hat{k}$	$\hat{\lambda}$
$y_t = 0.2y_{t-1} + \epsilon_t$	۱۰۰	۰/۱۸۲۷۱	۰/۹۵۱۵	۲/۸۰۵۸۳	۱/۸۷۵۱۷
$\epsilon_t = 0.1\epsilon_{t-1} + u_t$		(۰/۹۰۱۰۶)	(۰/۹۰۱۰۸)	(۰/۹۰۲۳۵)	(۰/۹۰۴۶۲)
$u_t \sim W(2, 2)$	۲۰۰	۰/۱۸۷۹۹	۰/۹۹۱۰	۲/۸۳۲۹۶	۱/۸۸۷۳۳
		(۰/۹۰۴۹۸)	(۰/۹۰۵۰۸)	(۰/۹۰۱۲۷۸)	(۰/۹۰۲۲۲)
	۳۰۰	۰/۱۹۱۶۴	۰/۱۰۱۲۲	۲/۸۴۹۵۲	۱/۸۹۰۰۱
		(۰/۹۰۳۰۱)	(۰/۹۰۳۰۹)	(۰/۹۰۷۶۲)	(۰/۹۰۱۳۵)
	۴۰۰	۰/۱۹۳۳۷	۰/۱۰۵۰۶	۲/۸۵۵۷۹	۱/۸۹۱۲۶
		(۰/۹۰۲۵۱)	(۰/۹۰۲۵۳)	(۰/۹۰۵۷۸)	(۰/۹۰۱۱۳)
	۵۰۰	۰/۱۹۵۸۴	۰/۱۰۵۵۱	۲/۸۵۷۶۴	۱/۸۹۳۸۳
		(۰/۹۰۱۸۶)	(۰/۹۰۱۹۲)	(۰/۹۰۵۱۶)	(۰/۹۰۰۸۱)

نتایج ارائه شده در جدول ۱ برآوردگرهای درست نمایی ماکسیمم تعدیل یافته ی پارامترهای مجهول مدل های خوش تبیین را نشان می دهد. در ادامه، عملکرد برآوردگرهای درست نمایی ماکسیمم تعدیل یافته برای مدل های بدتبیین مورد مطالعه قرار گرفته و با استفاده از مطالعات شبیه سازی نشان داده می شود که معیار اطلاع آکائیکه، معیار مناسبی برای انتخاب مدل بهینه در مدل های خودبازگشتی با عوامل ابداع همبسته و غیرگاوسی است.

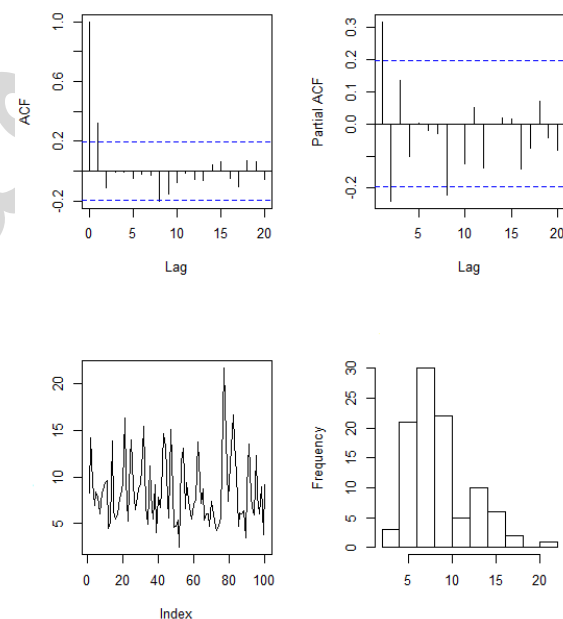
فرض کنید داده های $y = \{y_1, \dots, y_T\}$ از مدل درست خودبازگشتی

$$y_t = 0.2y_{t-1} + \epsilon_t$$

$$\epsilon_t = 0.1\epsilon_{t-1} + u_t$$

مانند ۱۰۰ و ۲۰۰ برای بررسی عملکرد روش پیشنهادی در شرایط محدود داده و نمونه های بزرگ تر مانند ۴۰۰ و ۵۰۰ برای تحلیل رفتار مجانبی برآوردگرها و بررسی کاهش خطای برآورد در نظر گرفته شده اند.

در شکل ۱ نمودارهای همبستگی (ACF) ^۱، همبستگی جزئی $(PACF)$ ^۲، سری زمانی و بافت نگار مربوط به مدل خودبازگشتی با عوامل ابداع همبسته و توزیع گاما برای اندازه ی نمونه $T = 100$ نشان داده شده است. با توجه به نمودار همبستگی جزئی، می توان دریافت که داده ها از مدل خودبازگشتی مرتبه ی ۲ پیروی می کنند زیرا همه ی مقادیر نمودار از تأخیر دوم به بعد داخل کران های اطمینان قرار دارند. همچنین از نمودار سری زمانی، مانایی در میانگین مشاهده می شود که این نشان می دهد می توان از این مدل برای پیش بینی آینده ی سری داده ها استفاده کرد. از نمودار بافت نگار نیز غیرگاوسی بودن داده ها به وضوح مشخص است.



شکل ۱. نمودار ACF ، $PACF$ ، نمودار سری زمانی و نمودار بافت نگار مدل خودبازگشتی با عوامل ابداع گاما.

به منظور بررسی کارایی برآوردگرهای به دست آمده فرض شده است که مدل درست معلوم و هدف تنها برآورد پارامترهای مجهول مدل است. برآورد پارامترهای مجهول مدل های خودبازگشتی با استفاده از روش شبیه سازی مونت کارلو و با تعداد ۱۰۰۰ بار تکرار محاسبه شده اند و میانگین این ۱۰۰۰ مقدار محاسبه شده به عنوان مقدار برآورد هر پارامتر برای اندازه ی نمونه های ۱۰۰، ۲۰۰، ۳۰۰، ۴۰۰، ۵۰۰ در جدول ۱ ارائه شده است. نتایج جدول ۱ نشان می دهد که برای مدل های خودبازگشتی با عوامل ابداع همبسته و غیرگاوسی با افزایش اندازه ی

شده است.

جدول ۲. مقادیر برآوردگر درستنمایی ماکسیم تعدیل یافته‌ی پارامترهای مدل خودبازگشتی با عوامل ابداع همبسته.

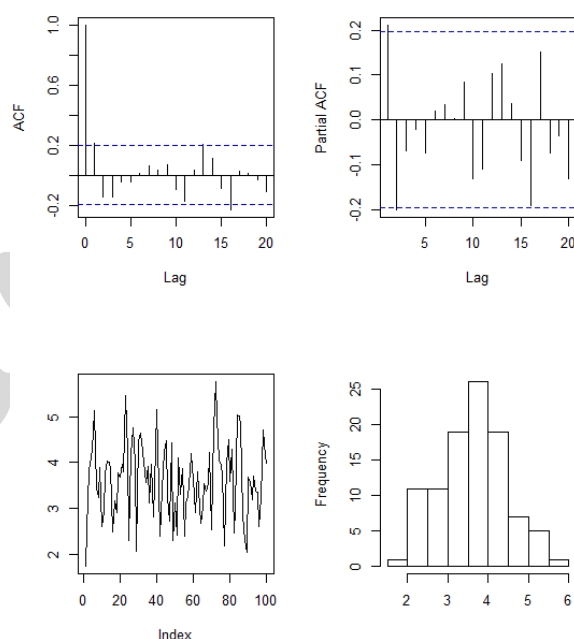
$T = 500$	$T = 1000$	$T = 1500$	$T = 2000$	$T = 3000$	$T = 5000$
ϕ (2WAR)	ϕ (2WAR)	ϕ (2WAR)	ϕ (2WAR)	ϕ (2WAR)	ϕ (2WAR)
۰/۱۹۵۳۱	۰/۱۹۴۱۲	۰/۱۹۴۸۷	۰/۱۹۴۳۳	۰/۱۹۴۱۷	۰/۱۹۴۱۷
۰/۱۰۵۹۵	۰/۱۰۴۶۴	۰/۱۰۵۵۲	۰/۱۰۱۸۵	۰/۰۸۶۷۴	۰/۰۸۶۷۴
۲/۹۹۴۱۵	۲/۹۹۲۲۵	۲/۹۹۰۴۱	۲/۹۸۱۵۶	۲/۹۸۸۸۲	۲/۹۸۸۸۲
۳/۹۱۷۶۱	۳/۹۱۷۳۰۸	۳/۹۱۶۲۱۳	۳/۹۱۸۹۶	۳/۸۸۵۸۴	۳/۸۸۵۸۴
ϕ (2LNAR)	ϕ (2LNAR)	ϕ (2LNAR)	ϕ (2LNAR)	ϕ (2LNAR)	ϕ (2LNAR)
۰/۱۶۹۶۲	۰/۱۵۸۷۶	۰/۱۵۱۰۵	۰/۱۲۳۷۱	۰/۱۲۵۱۳	۰/۱۲۵۱۳
۰/۰۸۱۳۸	۰/۰۷۰۰۵	۰/۰۶۲۱۸	۰/۰۳۷۹۸	۰/۰۵۵۷۲	۰/۰۵۵۷۲
۰/۸۹۸۳۱	۰/۸۸۰۱۸	۰/۸۵۴۷۹	۰/۷۹۵۸۵	۰/۶۵۹۷۷	۰/۶۵۹۷۷
۰/۳۶۹۲۴	۰/۳۸۲۴۷	۰/۴۱۲۹۱	۰/۴۷۶۸۰	۰/۶۴۲۷۵	۰/۶۴۲۷۵
ϕ (2GAR)	ϕ (2GAR)	ϕ (2GAR)	ϕ (2GAR)	ϕ (2GAR)	ϕ (2GAR)
۰/۲۰۴۹۸	۰/۲۰۶۷۴	۰/۲۱۱۶۹	۰/۲۱۶۱۸	۰/۲۲۸۱۵	۰/۲۲۸۱۵
۰/۱۱۵۹۹	۰/۱۱۷۶۱	۰/۱۲۲۷۸	۰/۱۲۸۲۲	۰/۱۴۲۰۵	۰/۱۴۲۰۵
۱/۷۶۲۳۵	۱/۷۶۱۸۸	۱/۷۶۰۰۰	۱/۷۵۳۸۵	۱/۷۴۴۳۵	۱/۷۴۴۳۵
۱/۵۳۶۰۶	۱/۵۳۵۵۱	۱/۵۳۴۹۰	۱/۵۳۳۸۸	۱/۵۳۲۸۱۲	۱/۵۳۲۸۱۲

نتایج جدول ۳ نشان می‌دهد که با افزایش اندازه نمونه، مقدار معیار اطلاع آکائیکه نیز افزایش می‌یابد و همچنین مدل برآورد شده‌ی خودبازگشتی مرتبه‌ی دوم با عوامل ابداع و ایبول، مدل نزدیک‌تر به مدل درست داده‌ها است زیرا مقادیر معیار اطلاع آکائیکه این مدل برای اندازه‌ی نمونه‌های مختلف نسبت به دیگر مدل‌های رقیب پیشنهاد شده کمتر است. همچنین اگر دو مدل خودبازگشتی با عوامل ابداع لگ-نرمال و گاما به‌عنوان مدل‌های رقیب در نظر گرفته شوند، مدل خودبازگشتی با عوامل ابداع گاما برای برازش بر روی داده‌ها مناسب‌تر است زیرا دارای مقادیر معیار اطلاع آکائیکه کمتری نسبت به مدل خودبازگشتی با عوامل ابداع لگ-نرمال است.

لازم به ذکر است که افزایش مقدار مطلق معیار AIC با افزایش حجم نمونه ناشی از وابستگی تابع درستنمایی به تعداد مشاهدات است؛ بنابراین مقایسه AIC تنها بین مدل‌های رقیب برای یک حجم نمونه مشخص انجام می‌شود.

همچنین جدول ۳ مقادیر میانگین توان‌های دوم خطای پیش‌بینی را برای مدل‌های خودبازگشتی پیشنهاد شده برای اندازه‌ی نمونه‌های مختلف نشان می‌دهد. بررسی نتایج شبیه‌سازی نشان داد که در تعداد بسیار محدودی از تکرارها، به دلیل ناپایداری عددی و حساسیت مدل لگ-نرمال، مقادیر پرت در خطای پیش‌بینی ایجاد شده است. از آنجا که معیار MSE نسبت به مقادیر پرت بسیار حساس است، نتایج پس از کنترل مقادیر پرت گزارش شده‌اند. نتایج ارائه شده در جدول ۳ نشان می‌دهد که مدل خودبازگشتی مرتبه‌ی دوم با عوامل ابداع و ایبول برای برازش بر روی داده‌ها مناسب‌تر است زیرا مقادیر میانگین توان‌های دوم خطای پیش‌بینی برای این مدل نسبت به دیگر مدل‌های رقیب کمتر است. همچنین، اگر دو مدل خودبازگشتی با عوامل ابداع لگ-نرمال و گاما به‌عنوان دو مدل رقیب پیشنهاد شوند، مدل خودبازگشتی

با عوامل ابداع $W(4,3)$ ، تولید شده باشند. نمودار همبستگی، همبستگی جزئی، سری زمانی و نمودار بافت‌نگار مربوط به این داده‌ها برای اندازه‌ی نمونه $T = 1000$ در شکل ۲ نشان داده شده است. با توجه به نمودار همبستگی جزئی، می‌توان دریافت که داده‌ها از مدل خودبازگشتی مرتبه‌ی ۲ پیروی می‌کنند زیرا همه مقادیر نمودار از تأخیر دوم به بعد داخل کران‌های اطمینان قرار دارند. همچنین از نمودار سری زمانی، مانایی در میانگین مشاهده می‌شود که این نشان می‌دهد می‌توان از این مدل برای پیش‌بینی آینده‌ی سری داده‌ها استفاده کرد. از نمودار بافت‌نگار نیز غیرگوسی بودن داده‌ها به‌وضوح مشخص است.



شکل ۲. نمودار ACF ، $PACF$ ، نمودار سری زمانی و نمودار بافت‌نگار مربوط به y .

بنابراین مدل خودبازگشتی مرتبه‌ی دوم با عوامل ابداع گاما، $GAR(2)$ ، مدل خودبازگشتی مرتبه‌ی دوم با عوامل ابداع و ایبول، $WAR(2)$ و مدل خودبازگشتی مرتبه‌ی دوم با عوامل ابداع لگ-نرمال، $LNAR(2)$ به‌عنوان مدل‌های رقیب در نظر گرفته شده است. پارامترهای مجهول مدل‌های رقیب با استفاده از برآوردگرهای درستنمایی ماکسیم تعدیل یافته و روش شبیه‌سازی مونت کارلو با ۱۰۰۰ بار تکرار برآورد شده‌اند. میانگین این مقادیر به‌عنوان مقادیر برآورد هر پارامتر در جدول ۲ ارائه شده است. با استفاده از داده‌های موجود، مدل‌های رقیب پیشنهاد شده برای اندازه‌ی نمونه‌های مختلف برآورد و مقادیر معیار اطلاع آکائیکه و میانگین توان‌های دوم خطای پیش‌بینی MSE با ۱۰۰۰ بار تکرار محاسبه شده‌اند و میانگین این مقادیر در جدول ۳ ارائه

با عوامل ابداع گاما برای برازش بر روی داده‌ها مناسب‌تر است.

پاییز فیه شاره

جدول ۳. مقادیر معیار اطلاع آکائیکه و میانگین توان دوم خطای پیش‌بینی مدل‌های رقیب

$$y_t = (\phi + \rho)y_{t-1} - (\phi \times \rho)y_{t-2} + u_t, \quad u_t \sim W(2, 3)$$

ϕ	ρ	T	(LNAR)	(GAR)	(WAR)
۰/۲	۰/۱۱	۱۰۰	۱۵۶۶/۳۱۶۰	۳۴۶/۱۰۰۰	۳۳۶/۴۱۳۰
۰/۲	۰/۱۱	۲۰۰	۳۲۷۶/۳۸۸۰	۶۸۷/۱۳۵۰	۵۵۱/۲۱۸۰
۰/۲	۰/۱۱	۳۰۰	۵۵۴۶/۱۹۱۰	۱۰۳۸/۷۷۱۰	۷۷۱/۸۶۳۰
۰/۲	۰/۱۱	۴۰۰	۷۹۶۵/۵۹۹۰	۱۳۷۳/۸۹۳۰	۹۹۴/۸۲۴۰
۰/۲	۰/۱۱	۵۰۰	۱۰۵۷۳/۱۲۵۰	۱۷۱۹/۵۵۶۰	۱۲۴۴/۸۰۱۰
ϕ	ρ	T	(LNAR)	(GAR)	(WAR)
۰/۲	۰/۱۱	۱۰۰	۳۲۱۷/۲۲۶۱	۲/۱۷۴۰	۱/۵۲۲۹
۰/۲	۰/۱۱	۲۰۰	۳۵۲/۲۸۲۸	۱/۲۷۱۶	۱/۰۹۰۲
۰/۲	۰/۱۱	۳۰۰	۱۷۲۹/۷۳	۱/۰۰۲۹	۰/۹۳۵
۰/۲	۰/۱۱	۴۰۰	۰/۸۸۲۱	۰/۸۴۷۳	۰/۸۲۰۸
۰/۲	۰/۱۱	۵۰۰	۰/۹۱۱۸	۰/۸۳۸۱	۰/۸۱۵۴

در نظر بگیرید. این مجموعه داده به صورت روزانه طی سال‌های ۱۹۵۰ تا ۲۰۱۲ در پایگاه *Yahoo Financ*،

<http://nance.yahoo.com/quote/GSPC/components?p=GSPC>

موجود است. با تعریف تابع

$$\left(\sum_{i=1}^m (r_{t,i} - \mu_t)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

مجموعه داده‌های روزانه *S&P۵۰۰* تبدیل به داده‌های ماهانه می‌شوند که در آن m تعداد روزها هر ماه و μ_t میانگین ماهها است. بنابراین، سری حاصل در واقع معیاری از نوسان‌پذیری ماهانه بازار را نشان می‌دهد. این شاخص به دلیل اهمیت گسترده در مطالعات مالی، حجم بالای داده‌ها، وجود نوسانات خوشه‌ای، چولگی، دم‌های سنگین و رفتار غیرگاوسی، یکی از مجموعه داده‌های استاندارد و مناسب برای ارزیابی مدل‌های سری زمانی غیرگاوسی محسوب می‌شود.

این مجموعه داده‌ها را با نماد x نمایش می‌دهیم. آماره‌های توصیفی سری در جدول ۵ ارائه شده است. از جدول ۵ مشاهده می‌شود که سری دارای میانگین غیرشرطی، $\bar{x} = ۱۰/۳۸۴۰$ ، است که تفاوت معناداری با صفر دارد. همچنین سری دارای چولگی مثبت با دم‌های سنگین است. چون p -مقدار آزمون شاپیرو کوچک‌تر از $۵/۰$ است، بنابراین فرضیه نرمال بودن سری رد می‌شود. با استفاده از نمودار سری زمانی، شکل ۳، مشاهده می‌شود که سری مانا است.

برای بررسی نتایج نظری می‌توان از آزمون وونگ، وونگ (۱۹۸۹)، نیز استفاده کرد. آماره آزمون وونگ را برای مقایسه‌ی مدل‌های مختلف محاسبه و با $z_{۰.۹۷۵}$ مقایسه می‌کنیم. میانگین نتایج ۱۰۰۰ بار تکرار به دست آمده و در جدول ۴ ارائه شده است. نتایج جدول ۴ نشان می‌دهد که اگر دو مدل خودبازگشتی مرتبه‌ی دوم با عوامل ابداع وایبول و لگ-نرمال به عنوان مدل‌های رقیب در نظر گرفته شوند، مدل خودبازگشتی با عوامل ابداع وایبول بهتر است زیرا مقدار آماره‌ی آزمون وونگ برای اندازه‌ی نمونه‌های مختلف از مقدار ۱۹۶ بیشتر است. همچنین اگر دو مدل خودبازگشتی مرتبه‌ی دوم با عوامل ابداع وایبول و گاما برای برازش بر روی داده‌ها در نظر گرفته شوند، مدل خودبازگشتی با عوامل ابداع وایبول از مدل خودبازگشتی با عوامل ابداع گاما مناسب‌تر است زیرا مقدار آماره‌ی آزمون وونگ برای اندازه‌ی نمونه‌های مختلف از مقدار ۱۹۶ بیشتر است. با استفاده از مقادیر آماره‌ی آزمون وونگ ارائه شده در ستون آخر جدول نیز می‌توان نتیجه گرفت که از بین دو مدل خودبازگشتی پیشنهاد شده با عوامل ابداع گاما و لگ-نرمال نیز، مدل خودبازگشتی با عوامل ابداع گاما برای برازش بر روی داده‌ها مناسب‌تر است زیرا مقادیر آماره‌ی آزمون وونگ برای نمونه‌های مختلف از مقدار ۱۹۶، بزرگتر هستند.

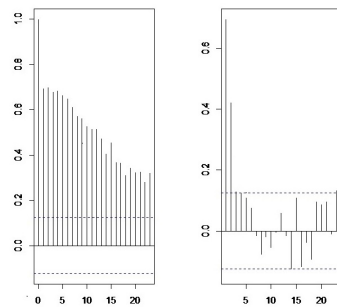
جدول ۴. مقادیر آماره‌ی آزمون وونگ برای مدل‌های رقیب.

$y_t = (\phi + \rho)y_{t-1} - (\phi \times \rho)y_{t-2} + u_t, \quad u_t \sim W(2, 3)$					
$H_f : GAR(2)$	$H_f : WAR(2)$	$H_f : LNAR(2)$	T	ρ	ϕ
۱۸۸۸۱۷	۲/۱۰۳۹	۲/۰۰۳۵۱	۱۰۰	۰/۱۱	۰/۲
۲۱۰۴۳۲	۲/۵۷۲۶۵	۲/۱۹۶۱۶	۲۰۰	۰/۱۱	۰/۲
۲۵۴۱۵۸	۳/۱۴۶۱۸	۳/۳۴۰۳۵	۳۰۰	۰/۱۱	۰/۲
۳۵۹۰۲۸	۳/۸۱۶۵۴	۴/۷۶۱۶۵	۴۰۰	۰/۱۱	۰/۲
۴۴۱۶۱۸	۳/۸۲۰۶۹	۵/۹۵۳۹۰	۵۰۰	۰/۱۱	۰/۲

۴ آنالیز داده‌های حقیقی

مجموعه داده‌های شاخص بورس آمریکا بر اساس ارزش بازار ۵۰۰ شرکت بزرگ دارای سهام عام فهرست شده در NYSE یا *S&P۵۰۰* را

P - مقدار آزمون کولموگروف - اسمیرنوف مدل برآورد شده خودبازگشتی مرتبه دوم با عوامل ابداع لگ - نرمال بزرگتر از ۵٪ است.



شکل ۴. نمودارهای همبستگی و همبستگی جزئی سری x .

جدول ۶. مقادیر برآوردگر درستنمایی ماکسیمم تعدیل یافته و معیار اطلاع آکائیکه.

K.S.	AIC	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\phi}$	
1.1281×10^{-12}	۱۹۰۹۶۰۱	۱۱۲۵۶۹	۳۲۰۹۱	۰.۶۹۳۸	(1)NAR(
۰.۱۹۳۹	۱۲۴۷۴۰۵	۰.۸۴۰	۰.۲۸۲۱	۰.۶۸۲۸	(1)GAR(
۰.۶۰۰۵	۱۲۰۵۵۳۸	۱.۷۶۵۴	۰.۴۳۱۱	۰.۶۲۵۱	(1)LNAR(
7.8114×10^{-12}	۱۸۵۳۵۷۵	۱.۰۲۰۷۴	۱.۹۳۴۵	$\begin{pmatrix} ۰.۳۹۵۹ \\ ۰.۴۲۶۱ \end{pmatrix}$	(2)NAR(
۰.۱۹۰۱	۱۱۲۶۴۷۲	۰.۸۸۵	۰.۲۳۷۵	$\begin{pmatrix} ۰.۳۶۱۲ \\ ۰.۳۳۵۷ \end{pmatrix}$	(2)GAR(
۰.۶۸۶۵	۱۱۱۴۵۳۴	۱.۷۱۷۰	۰.۲۸۴۴	$\begin{pmatrix} ۰.۳۳۷۵ \\ ۰.۴۰۷۲ \end{pmatrix}$	(2)LNAR(

۱: $\hat{\alpha}_1$ نشان دهنده پارامتر اول و $\hat{\alpha}_2$ نشان دهنده پارامتر دوم توزیع عوامل ابداع است.

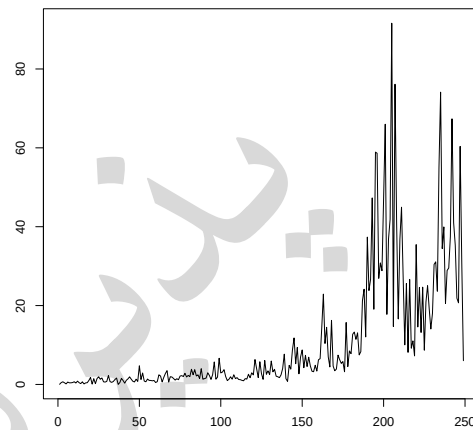
نتایج آزمون وونگ در جدول ۷ ارائه شده است. نتایج جدول ۷ نشان می‌دهد که مدل برآورد شده خودبازگشتی مرتبه دوم با عوامل ابداع لگ - نرمال بهتر از مدل‌های برآورد شده خودبازگشتی مرتبه دوم با عوامل ابداع گاما و نرمال است. همچنین مدل برآورد شده خودبازگشتی مرتبه دوم با عوامل ابداع گاما بهتر از مدل برآورد شده خودبازگشتی مرتبه دوم با عوامل ابداع نرمال است. بنابراین با استفاده از آزمون وونگ مدل برآورد شده خودبازگشتی مرتبه دوم با عوامل ابداع لگ - نرمال به عنوان مدل بهینه انتخاب می‌شود. نمودار سری زمانی داده‌های و مدل‌های رقیب برازش داده شده در شکل ۵ نمایش داده شده است.

جدول ۵. آماره‌های توصیفی سری X .

series	n	$\bar{x}$	σ	S	K	P
x	۲۴۹	۳۸۴۰/۱۰	۶۵۴۴/۱۵	۳۶۱۱/۲	۹۸۷۸/۵	۱۶۵-۲/۲

۱. n نشان دهنده تعداد مشاهدات، $\bar{x}$ نشان دهنده میانگین نمونه‌ای، σ نشان دهنده انحراف معیار نمونه‌ای، S نشان دهنده ضریب چولگی نمونه‌ای و K نشان دهنده ضریب برچسگی است.

۲. P نشان دهنده p - مقدار آزمون شاپیرو است.



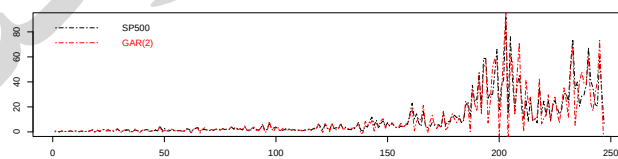
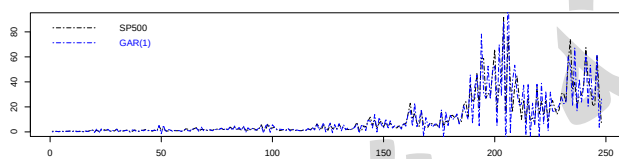
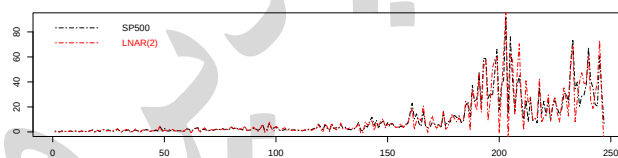
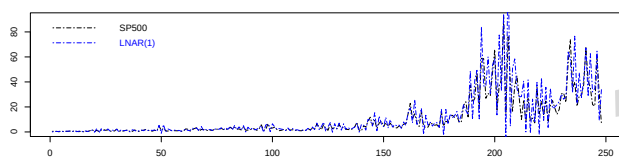
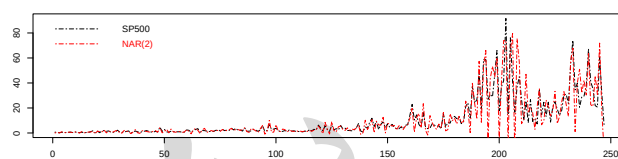
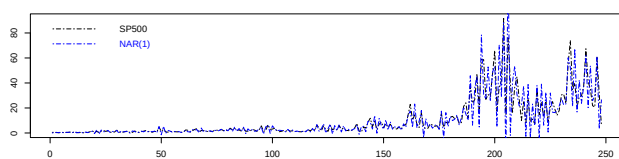
شکل ۳. نمودار سری زمانی x .

با توجه به نمودارهای همبستگی و همبستگی جزئی، شکل ۴، می‌توان دریافت که داده‌ها از مدل خودبازگشتی مرتبه ۲ پیروی می‌کنند. از آنجایی که همه‌ی مشاهدات غیرمنفی هستند، بنابراین، مدل‌های برازش شده را می‌توان معادل مدل‌های $AR(2)$ با عوامل ابداع غیرگاوسی نیز تفسیر کرد و مدل‌های بحث شده در بخش ۲ را به عنوان مدل‌های رقیب در نظر می‌گیریم، به عبارت دیگر مدل خودبازگشتی با عوامل ابداع گاما، GAR ، لگ - نرمال، $LNAR$ ، و نرمال، NAR ، را به عنوان مدل‌های رقیب در نظر می‌گیریم.

مدل نرمال صرفاً به عنوان مدل مرجع مقایسه‌ای در کنار مدل‌های غیرگاوسی مورد استفاده قرار گرفته است. به منظور بررسی بیشتر داده‌ها، مرتبه‌های یک و دو را برای مدل‌های خودبازگشتی رقیب در نظر می‌گیریم. مقدار برآورد پارامترها، مقدار اطلاع آکائیکه، AIC ، و p - مقدار آزمون کولموگروف - اسمیرنوف در جدول ۶ ارائه شده است. از آنجایی که مدل برآورد شده خودبازگشتی مرتبه دوم با عوامل ابداع لگ - نرمال دارای کمترین مقدار اطلاع آکائیکه است، بنابراین مدل برآورد شده خودبازگشتی مرتبه دوم با عوامل ابداع لگ - نرمال را به عنوان مدل بهینه بر اساس معیار اطلاع آکائیکه انتخاب می‌کنیم. نتایج به دست آمده از آزمون کولموگروف - اسمیرنوف نیز این نتیجه را تأیید می‌کند.

جدول ۷. مقادیر آماره آزمون وونگ برای مدل‌های رقیب.

آزمون	نتیجه	مقدار آماره آزمون
$H_f : L NAR(2)$ $H_g : GAR(2)$	مدل $L NAR(2)$ بهتر از مدل $GAR(2)$ است.	۰.۱۸۷/۲
$H_f : L NAR(2)$ $H_g : NAR(2)$	مدل $L NAR(2)$ بهتر از مدل $NAR(2)$ است.	۵۱۲۴/۵
$H_f : GAR(2)$ $H_g : NAR(2)$	مدل $GAR(2)$ بهتر از مدل $NAR(2)$ است.	۷۸۵۱/۳



شکل ۵. مودار سری زمانی مشاهدات و مدل‌های رقیب برازش داده شده.

بحث و نتیجه‌گیری

تعدیل یافته مورد استفاده قرار گرفت. مطالعات شبیه‌سازی به منظور بررسی عملکرد روش درستنمایی ماکسیمم تعدیل یافته در برآورد پارامتر و روش‌های مختلف انتخاب مدل مانند معیار اطلاع آکائیکه، میانگین توان‌های دوم خطای پیش‌بینی و همچنین آزمون وونگ برای انتخاب مدل بهینه از بین مدل‌های رقیب پیشنهاد شده، انجام شده است. نتایج این مطالعات نشان می‌دهد که برای مدل‌های خودبازگشتی با عوامل ابداع همبسته و غیرگاوسی روش درستنمایی ماکسیمم تعدیل یافته عملکرد مناسبی دارد و همچنین هر سه روش انتخاب مدل به‌طور مشترک مدل بهینه را انتخاب کردند.

در مطالعه مدل‌های سری زمانی، معمولاً فرض بر این است که عوامل ابداع مستقل و گاوسی هستند. گاهی اوقات این فرضیات برای عوامل ابداع برقرار نیست و ممکن است که عوامل ابداع یکی یا هر دوی این ویژگی‌ها را نداشته باشند. در صورتی که عوامل ابداع گاوسی نباشند دو دسته کلی از توزیع‌ها (توزیع‌های متقارن و نامتقارن) برای عوامل ابداع وجود دارد. به جهت اهمیت چنین مدل‌هایی در مطالعه مدل‌های سری زمانی و از آنجایی که کار کردن با چنین مدل‌هایی زمینه‌ی کار بر روی هر نوع مدل دیگر را فراهم می‌آورد در این مقاله مدل‌های خودبازگشتی که در آن عوامل ابداع همبسته و غیرگاوسی هستند، بررسی شد. یکی از مشکلاتی که در این حالت وجود داشت برآورد پارامترهای مجهول مدل با استفاده از روش‌های معمول برآوردیابی از جمله روش درستنمایی ماکسیمم بود؛ بنابراین برای رفع این مشکل روش ماکسیمم درستنمایی

مراجع

- Stationary and nonstationary Residuals, *Stochastic Processes and Their Applications*, **105**, 33-67.
- [10] Sayyareh, A. (2012). Inference after Separated Hypotheses Testing: an Empirical Investigation for Linear Models, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **82** (9), 1275-1286.
- [11] Tiku, M. L. (1967), Estimating the Mean and Standard Deviation from a Censored Normal Sample, *Biometrika*, **54**, 155-165.
- [12] Tiku, m., Wong, W.K. and Bian, G. (2007), Estimating Parameters in Autoregressive Models in Non-normal Situations: Symmetric Innovations, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **28**(2). 315-341 <https://doi.org/10.1080/03610929908832300>.
- [13] Vuong, Q.H. (1989), Likelihood Ratio Tests for Model Selection and Non-nested Hypotheses, *Econometrica*, **57**(2), 307-333.
- [14] Zamani, S. and Sayyareh, A. (2017). Separated Hypotheses Testing for Autoregressive Models with Non-negative Residuals, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **87** (4), 689-711.
- [1] Akkaya, A.D. and Tiku, M.L. (2001a), Estimating Parameters in Autoregressive Models in Non-normal Situations: Asymmetric Innovations, *Communications in Statistics, Theory and Methods*, **30**, 517-536.
- [2] Akkaya, A.D., and Tiku, M.L. (2001b), Corrigendum: Time Series Models with Asymmetric Innovations. *Communications in Statistics, Theory and Methods*, **30**(10), 2227-2230.
- [3] Akkaya, A.D. and Tiku, M.L. (2005), Time Series AR(1) Model for Short Tail Distribution, *Statistics*, **39**(2), 117-132.
- [4] Bartlett, A. and McCormick, W. (2012), Estimation for Non-negative First-order Autoregressive Processes with an Unknown Location Parameter, *Applied Mathematics*, **3**, 2133-2147.
- [5] Bayrak, O.T. and Akkaya, A. (2010), Estimating Parameters of a Multiple Autoregressive Model by the Modified Maximum Likelihood Method, *Computational and Applied Mathematics*, **233**, 1763-1772.
- [6] Bourguignon, M. and Vasconcellos, K. (2015), First Order Non-negative Integer Valued Autoregressive Processes with Power Series Innovations, *Brazilian Journal of Probability and Statistics*, **29**(1), 71-93.
- [7] Gaver, D.P. and Lewis, P.A. (1980), First-order Autoregressive Gamma Sequences and Point Processes, *Advances in Applied Probability*, **2**, 727-745.
- [8] Li, D. and Tong, H. (2020), On an Absolute Autoregressive Model and Skew Symmetric Distributions, *Statistica*, **80**(2), 177-198. <https://doi.org/10.6092/issn.1973-2201/10420>.
- [9] Maller, R.A. (2003), Asymptotics of Regressions with

Keywords: Autoregressive model, Dependent innovations, Exponential family, Modified maximum likelihood estimation, Weibull family.

Mathematics Subject Classification: 62M10, 62F10.

Analysis of Autoregressive Models with Dependent and non-Gaussian Innovations

Sedigheh Zamani Mehreyan^{1*}, Arezo Hajrajabi²

¹ *Department of Statistics, Imam Khomeini International University, Qazvin, Iran*

² *Department of Statistics, Imam Khomeini International University, Qazvin, Iran*

Received: 2025/12/01

Accepted: 2026/09/18

Abstract

The assumption of independence and normality of innovations are usual assumptions in the study of time series models. But in some researches and studies, these assumptions cause limitations, in other words, we encounter cases where the innovations are not independent or do not follow the Gaussian distribution. In this Paper, we consider autoregressive model with dependent and non-Gaussian innovations. It also is assumed that the true model is unknown, so we propose some competing models. The unknown parameters of competing models are estimated using the modified maximum likelihood method. Finally, by using information criteria, such as Akaike's information criteria and model selection tests such as Vuong's test, the optimal model has been selected. Using simulation, the performance of the modified maximum likelihood method has been studied and it has also been shown that the model selection criteria and tests select the closest model to the true model as the optimal model.

*Corresponding author, zamani@ikiu.ac.ir