

مروری بر معیارهای وابستگی (قسمت اول): تاریخچه، مفاهیم و معیارهای کلاسیک

علی دولتی*

گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه یزد، یزد، ایران

تقدیم به روان پاک استاد فقید «دکتر جواد بهبودیان» که پیوند علم و اخلاق را در آمار

به زیباترین وجه به تصویر کشید و همواره چراغ راه شاگردان خود بود.

تاریخ دریافت: ۱۴۰۵/۰۲/۲۷

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۵/۰۵/۱۹

چکیده

توصیف رابطه بین دو یا چند متغیر تصادفی، یکی از مسائل اساسی در آمار و احتمال است. این مقاله در دو قسمت تدوین شده و به مرور تاریخی و ساختاری معیارهای اندازه‌گیری وابستگی از قرن هجدهم تا امروز می‌پردازد. قسمت اول به مفاهیم بنیادی اختصاص دارد: تعاریف نخستین از استقلال و وابستگی در آثار دموآر، بیز و لاپلاس، ظهور مفهوم همبستگی در کارهای گالتون و فرمول‌بندی ریاضی آن توسط پیرسون، محدودیت‌های ضریب همبستگی گشتاوری، و معرفی ضرایب ناپارامتری مبتنی بر رتبه. در ادامه، نقش نظریه مفصل و قضیه اسکالر در جداسازی ساختار وابستگی از توزیع‌های حاشیه‌ای تبیین می‌گردد. قسمت دوم به معیارهای جدیدتر و تعمیم معیارهای کلاسیک می‌پردازد: معیارهای شدت وابستگی، وابستگی غیریکنوا و معیارهای مدرن برای داده‌های با ابعاد بالا، خودهمبستگی و وابستگی سریالی، وابستگی دمی و چندکی، تعمیم‌های چندمتغیره و برداری، معیارهای وابستگی برای داده‌های گسسته و ترکیبی، کاربردها در نظریه احتمال، و پیاده‌سازی در نرم‌افزارهای آماری. این مقاله با ارائه مروری جامع بر معیارهای کلاسیک و مدرن، می‌تواند منبعی مفید برای پژوهشگران حوزه آمار، داده‌کاوی و یادگیری ماشین باشد.

واژه‌های کلیدی: همبستگی، مفصل، نظریه اطلاع، وابستگی یکنوا، وابستگی غیریکنوا.

رده‌بندی ریاضی: ۶۲J۰۷، ۶۲F۱۵.

۱ مقدمه

تسریع کند و نه مانع شود. او همچنین بیان کرد که احتمال رخ دادن چندین پیشامد مستقل، حاصل ضرب احتمال تک‌تک آنهاست و دو پیشامد وابسته هستند وقتی چنان به هم مرتبط باشند که احتمال رخ دادن یکی با رخ دادن دیگری تغییر کند. ژاکوب برنولی (۱۷۰۵-۱۶۵۴) نخستین کسی بود که اصطلاح آزمایش‌های مستقل را برای مشاهدات به دست آمده تحت شرایط یکسان به کار برد. این مفهوم بعدها توسط

توصیف رابطه بین دو یا چند متغیر تصادفی، یکی از مسائل مهم در آمار و احتمال است. نخستین گام در این مسیر، بررسی استقلال متغیرهاست. تعریف استقلال پیشامدها ریشه در نوشته‌های دموآر [۱۴] دارد. از نظر دموآر، دو پیشامد مستقل هستند اگر هیچ ارتباطی با یکدیگر نداشته باشند و رخ دادن یکی از آنها، رخ دادن دیگری را نه

شهودی از مفهوم استقلال بودند که راه را برای صورت‌بندی‌های دقیق‌تر بعدی از مفهوم استقلال در نظریه احتمال هموار نمودند. با ظهور نظریه اندازه و بیان اصل موضوعی اصول احتمال توسط کولموگروف [۴۰] در سال ۱۹۳۳، تعریف استقلال به صورت دقیق و مدرن خود ظاهر شد. بر این اساس، دو متغیر تصادفی X و Y مستقل نامیده می‌شوند اگر برای همه مجموعه‌های بورل $A, B \subseteq \mathbb{R}$ داشته باشیم [۹]

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B).$$

در تحلیل داده‌های چندمتغیره، پیش از هر تحلیلی لازم است استقلال متغیرها بررسی شود. اما مسئله اصلی آنگاه آغاز می‌شود که فرض استقلال رد شود. در این حالت، پژوهشگر نیاز دارد بداند «میزان» وابستگی میان متغیرها چقدر است. برای اندازه‌گیری میزان وابستگی، معیارهای متعددی معرفی شده‌اند که این مقاله به مرور سیر تاریخی و ساختاری آنها می‌پردازد.

ساختار مقاله به صورت زیر است: بخش ۲ به کشف همبستگی توسط گالتون و فرمول‌بندی ریاضی آن توسط پیرسون می‌پردازد. در بخش ۳، محدودیت‌های ضریب همبستگی گشتاوری با مثال‌های متعدد بررسی می‌شود. بخش ۴ به تمایز انواع معیارهای وابستگی (یکنوا در برابر غیریکنوا) می‌پردازد. بخش ۵ به معیارهای وابستگی یکنوا برای اندازه‌گیری شدت و جهت وابستگی اختصاص دارد. بخش ۶ به ضرایب هماهنگی و توابع مفصل می‌پردازد. در هر مرحله، محدودیت‌ها و حوزه کاربرد هر معیار با نگاهی تاریخی و انتقادی بررسی می‌شود.

۲ گالتون و همبستگی

فرانسیس گالتون (۱۸۲۲-۱۹۱۱)، پسرعموی چارلز داروین، تحت تأثیر کتاب «منشأ گونه‌ها» به مطالعه قوانین وراثت و اصلاح نژاد علاقه‌مند شد. اگرچه گالتون مفهوم همبستگی را در سال ۱۸۸۵ به کار برد، اما استیگلر [۶۱] معتقد است که این مفهوم حدود ۳۰ سال پیش از آن توسط داروین استفاده شده بود. داروین در سال ۱۸۶۸ نوشت: «تمام اعضای یک موجود زنده تا حد زیادی به هم مرتبط یا همبسته هستند». خود اصطلاح «همبستگی»^۳ پیش از گالتون نیز به کار می‌رفت. ویلیام استنلی جونز در کتاب «اصول علم» (۱۸۷۴) از این اصطلاح در معنایی نزدیک به «هم‌آیی» (همزمانی و همراهی کیفی، نه همبستگی آماری)

دیگر ریاضیدانان بسط داده شد. توماس بیز [۱] مفهوم استقلال را این گونه تعریف کرد: پیشامدها از هم مستقل هستند اگر رخ دادن هر کدام از آنها، احتمال رخ دادن بقیه را افزایش یا کاهش ندهد. سویچ [۱۱] به این تعریف ایراد گرفت، زیرا تعریف بیز تفاوتی میان استقلال توأم و استقلال دو به دوی پیشامدها قائل نمی‌شد. ریچارد پرایس [۵۴]، دوست نزدیک بیز، دو پیشامد را مستقل می‌دانست اگر رخ دادن یکی از آنها تأثیری روی رخ دادن دیگری نداشته باشد. امرسون [۲۱] نیز تعریف مشابهی ارائه داد. از نظر او، یک پیشامد وابسته است اگر رخ دادن آن با رخ دادن پیشامدهای دیگر تغییر کند. جورج بول [۵] دو تعریف متفاوت برای استقلال پیشامدها ارائه داد. در تعریف نخست، او استقلال را به‌گونه‌ای شرطی تعریف کرد: دو پیشامد هنگامی مستقل هستند که احتمال رخ دادن هر یک از آنها تحت تأثیر انتظار ما از وقوع یا رخ ندادن دیگری نباشد. در تعریف دوم، رویکردی قیاسی اتخاذ کرد و چنین بیان داشت که باید پیشامدها را مستقل بدانیم مگر اینکه به ما گفته شود آنها باید رخ بدهند یا نمی‌توانند رخ بدهند. جان مینارد کینز [۴۱] در نقد این تعاریف، به ناسازگاری درونی این دو رویکرد اشاره کرد و آن را موجب ایجاد پارادوکس در نظریه احتمال دانست. وی همچنین نخستین کسی بود که میان «استقلال منطقی»^۱ و «استقلال تصادفی»^۲ تمایز قائل شد و به نقش آن در ساختار استدلال‌های آماری توجه کرد. به این معنا که استقلال تصادفی صرفاً یک رابطه عددی بین احتمال رخ دادن دو پیشامد است، در حالی که استقلال منطقی به رابطه معرفتی میان مقدمات و نتیجه‌گیری‌ها اشاره دارد که در آن دانستن یک قضیه، تأثیری بر درجه باور معقول به قضیه دیگر ندارد [۸]. آگوستوس دمورگان [۱۵] نیز تعریفی نزدیک به تعریف دوم بول ارائه داد و معتقد بود دو پیشامد مستقل هستند اگر پیشامد دوم بدون اولی وجود داشته باشد یا پیشامد اولی بدون دومی. لاپلاس [۲۲] در تعریف استقلال دو پیشامد به مفهوم وابستگی نیز توجه کرد. دو پیشامد E_1 و E_2 وابسته هستند اگر رخ دادن E_1 بر E_2 اثرگذار باشد. در این صورت

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)P(E_2|E_1).$$

اگر E_1 و E_2 دو پیشامد مستقل باشند، آنگاه

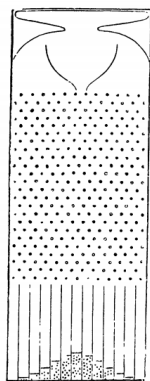
$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)P(E_2).$$

استیگلر [۶۱] در بررسی تاریخی خود اشاره می‌کند که این تعاریف پیش از آنکه صورت‌بندی‌های ریاضی دقیقی باشند، توصیف‌های فلسفی و

¹Logical Independence

²Stochastic Independence

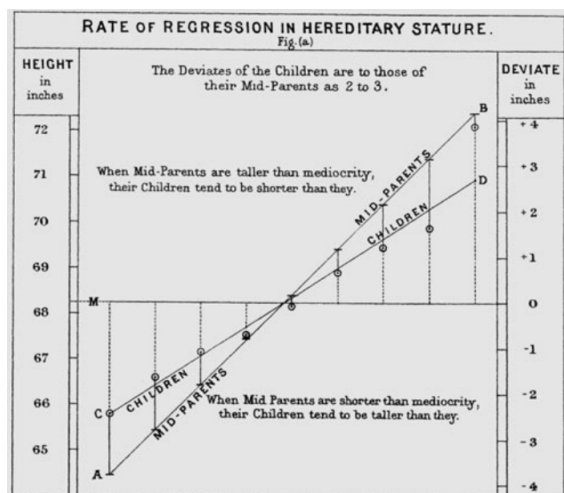
³Correlation



شکل ۱: دستگاه کونکانکس یا جعبه گالتون [۲۶]

۲.۲ رگرسیون

گالتون در آزمایشی روی لوبیا، رابطه بین طول ساقه گیاه مادر x و فرزند y را بررسی کرد و قانونی برای توصیف این رابطه ابداع نمود. او در سال ۱۸۷۷ این پدیده را «قانون برگشت»^۷ یا «بازگشت به نوع اجدادی»^۸ نامید و آن را یک «فرایند ژنتیکی یک جهته» می دانست [۳۳]. نماد R که بعدها توسط پیرسون به عنوان نماد ضریب همبستگی به کار رفت، در اصل توسط گالتون برای نشان دادن «ضریب برگشت»^۹ استفاده شده بود [۵۱].



شکل ۲: اولین نمودار دو خط رگرسیون ترسیم شده توسط گالتون (۱۸۸۵) [۲۳].

گالتون همچنین، در مطالعه‌ای بر روی ۲۰۵ خانواده، رابطه بین قد فرزند بزرگتر y و میانگین وزنی قد والدین x (بر اساس میانگین قد

استفاده نمود [۳۵]. گالتون این اصطلاح را اقتباس کرد اما معنای آماری مدرن خود را به آن بخشید [۶۱، ۵۲]. این ایده اولیه، سرآغاز تلاش گالتون برای اندازه‌گیری «ارتباط توأم» بین دو متغیر شد. گالتون می‌نویسد: هم‌ارتباطی یا همبستگی ساختاری، اصطلاحی است که در زیست‌شناسی به ویژه در شاخه‌ای از آن که به وراثت مربوط می‌شود، بسیار استفاده می‌شود؛ اما من از هیچ تلاش پیشینی برای تعریف واضح آن، ردیابی دقیق نحوه عملکرد آن، یا نشان دادن چگونگی اندازه‌گیری درجه آن آگاه نیستم [۲۵].

۱۰.۲ گذار از نظریه خطا به مطالعه تغییرپذیری

کشف همبستگی توسط گالتون نتیجه یک مسیر تحقیقاتی بیست‌ساله بود که با مسئله‌ای نظری آغاز شد: چگونه می‌توان سازگاری میان توزیع نرمال ویژگی‌های فیزیکی (مثل قد) با وجود عوامل مسلط در وراثت (مثل قد والدین) را توضیح داد؟ گالتون برای درک بهتر قوانین حاکم بر تغییرپذیری ویژگی‌های ارثی، دستگاهی به نام کونکانکس^۴ طراحی کرد (شکل ۱). این دستگاه شامل یک صفحه شیب‌دار با ردیف‌هایی از میخ‌ها بود که گلوله‌های کوچک از بالای آن رها می‌شدند. هر گلوله در برخورد با هر میخ، به طور تصادفی به چپ یا راست منحرف می‌شد و در نهایت در محفظه‌هایی در پایین صفحه جمع می‌گردید. گالتون مشاهده کرد که توزیع گلوله‌ها در محفظه‌ها به شکل توزیع نرمال درمی‌آید [۲۶]. این آزمایش فیزیکی، نمایشی از قضیه حد مرکزی بود: ترکیب تعداد زیادی از رویدادهای تصادفی مستقل، توزیعی نرمال پدید می‌آورد. گالتون در این مسیر آگاهانه از سنت نظریه خطا^۵ فاصله گرفت. به گفته خود او: هدف اصلی قانون خطای گاوس دقیقاً مخالف آن چیزی بود که من به کار بردم. آنها می‌خواستند از خطاها خلاص شوند یا برای آنها تعدیل در نظر گیرند. اما این خطاها دقیقاً همان چیزهایی بودند که من می‌خواستم حفظ کنم و درباره آنها بدانم [۲۸]. به عبارت دیگر، گالتون به جای حذف خطا، خود «تغییرپذیری»^۶ را به عنوان مسئله اصلی تحقیق انتخاب کرد. این درک، گالتون را از قید تفسیر محدود قضیه حد مرکزی آزاد کرد و راه را برای مفهوم رگرسیون هموار ساخت.

⁴Quincunx

⁵Error Theory

⁶Variation

⁷Law of reversion

⁸Atavism

⁹Coefficient of Reversion

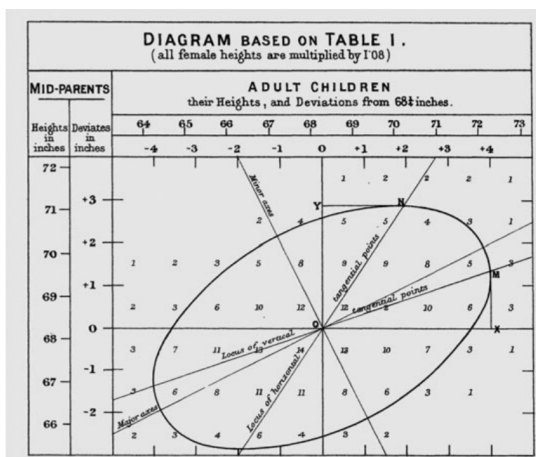
اصلی بیضی) قرار داشتند و نقاطی که توسط یک مماس عمودی لمس می‌شدند، بر روی یک خط راست با شیب $\frac{1}{3}$ نسبت به محور افقی (محور فرعی بیضی) قرار داشتند. این نسبت‌ها مقادیر رگرسیون متوسط را که قبلاً با روش دیگری به دست آمده بودند تأیید می‌کنند» [۲۳، ص. ۲۵۵].

گالتون که از مهارت ریاضی خود برای تحلیل این بیضی‌ها مطمئن نبود، از جی. هملتون دیکسون، ریاضیدان کمبریج، کمک خواست. دیکسون در بررسی خود، رابطه بین دو ضریب رگرسیون را به صورت زیر به دست آورد [۲۴]:

$$\beta_{Y|X} = \frac{\beta_{X|Y}\sigma_Y^2}{\sigma_{X|Y}^2 + \beta_{X|Y}^2\sigma_Y^2}.$$

او همچنین نشان داد که حاصلضرب دو ضریب رگرسیون برابر با مجذور ضریب همبستگی است: $\beta_{Y|X}\beta_{X|Y} = \rho^2$. تحلیل دیکسون نشان داد که محور اصلی و فرعی بیضی‌ها به ترتیب با شیب‌های $\frac{2}{3}$ (رگرسیون فرزندان بر والدین) و $\frac{1}{3}$ (رگرسیون والدین بر فرزندان) همخوانی دارند. کشف هندسی گالتون و تحلیل ریاضی دیکسون، ماهیت متقارن و صرفاً آماری رگرسیون (نه یک فرایند ژنتیکی یک‌جهته) را تأیید کرد [۲۳]. گالتون بعدها نوشت:

«هرگز چنین احساس شور و احترامی نسبت به حاکمیت و شکوه تحلیل ریاضی نداشتم تا وقتی که پاسخ او به من رسید و یافته‌های آماری پرزحمت مرا با دقتی فراتر از آنچه به آن امیدوار بودم، تأیید کرد» [۲۴].



شکل ۳: بیضی‌های هم‌مرکز و نقاط هم‌فراوانی ترسیم شده توسط گالتون [۲۴].

پدر و ۱/۰۸ برابر قد مادر) را بررسی کرد. او با در نظر گرفتن M به عنوان میانه مشترک x و y (۶۸/۲۵ اینچ) و کمیت‌های $m_{x|y}$ و $m_{y|x}$ به ترتیب، به عنوان میانه قد فرزندی که قد والدین آنها مقدار x است و میانه قد والدینی که قد فرزند بزرگتر آنها مقدار y است، دو خط زیر را به دست آورد:

$$m_{y|x} = \frac{1}{3}M + \frac{2}{3}x, \quad m_{x|y} = \frac{2}{3}M + \frac{1}{3}y.$$

گالتون از متفاوت بودن شیب دو خط ($\frac{1}{3}$ و $\frac{2}{3}$) نگران شد و این پرسش را مطرح کرد که چه رابطه‌ای بین شیب دو خط وجود دارد؟ برای درک این مسئله، گالتون داده‌ها را با تقسیم بر «خطای محتمل» $PE = 0.6745\sigma$ ^{۱۰} استاندارد کرد که در آن σ انحراف معیار است. این روش استانداردسازی (بر خلاف روش امروزی که فقط از انحراف معیار استفاده می‌شود) در آن زمان در ستاره‌شناسی و فیزیک رواج داشت. او پس از این استانداردسازی داده‌ها، شیب دو خط را یکسان یافت و این شیب یکسان را میزان همبستگی دو متغیر در نظر گرفت. با تحلیل داده‌های قد والدین و فرزندان دریافت که نه تنها فرزندان نسبت به والدین خود به میانگین نزدیک‌ترند، بلکه والدین نیز نسبت به فرزندان خود به میانگین نزدیک‌ترند. این کشف، فرضیه برگشت ژنتیکی یک‌جهته را به شدت تضعیف کرد. گالتون سپس نام این پدیده را به «رگرسیون»^{۱۱} تغییر داد. او در این مقاله برای اولین بار اصطلاح رگرسیون را به کار برد و با رسم دو خط رگرسیون، ماهیت متقارن این پدیده را به نمایش گذاشت (شکل ۲). خط افقی نشان‌دهنده رگرسیون قد فرزندان بر والدین و خط عمودی نشان‌دهنده رگرسیون والدین بر فرزندان است. شیب این خطوط به ترتیب $\frac{1}{3}$ و $\frac{2}{3}$ هستند.

۳.۲ بیضی‌های هم‌مرکز و نقاط هم‌فراوانی

گالتون برای تأیید فرضیه خود درباره ماهیت متقارن و صرفاً آماری رگرسیون، داده‌های قد والدین و فرزندان را روی کاغذ شطرنجی وارد کرد. با اتصال نقاط با فراوانی یکسان در جدول پیشابندی قد والدین و فرزندان، بیضی‌های هم‌مرکز پدیدار شدند (شکل ۳). گالتون در توصیف این بیضی‌ها نوشت:

«مرکز مشترک همه بیضی‌ها در محل تقاطع خطوط عمودی و افقی متناظر با ۶۸/۲۵ اینچ بود. نقاطی که هر بیضی توسط یک مماس افقی لمس می‌شد، بر روی یک خط راست با شیب $\frac{2}{3}$ نسبت به محور عمودی (محور

^{۱۰}Probable Error

^{۱۱}Regression

۴.۲ تعریف همبستگی و فرمول عددی

گالتون با نگرانی از اینکه دیگران پیش از او به این کشف دست یابند، مقاله‌ای با عنوان «ارتباط‌های توأم و اندازه‌گیری آنها» برای انجمن سلطنتی آماده کرد که در سال ۱۸۸۸ منتشر شد [۲۵]. گالتون در این مقاله برای اولین بار مفهوم همبستگی را در ادبیات علمی به کار برد. او تعریف خود از «ارتباط توأم» را چنین بیان کرد:

«دو عضو متغیر ارتباط توأم دارند وقتی تغییرات یکی، به طور متوسط و در یک جهت، با تغییرات دیگری همراه باشد. به راحتی می‌توان دید که ارتباط توأم باید نتیجه این باشد که تغییرات دو عضو تا حدی ناشی از علل مشترک است. اگر آنها هیچ‌گاه ناشی از علل مشترک نبودند، ارتباط توأم صفر خواهد بود.»

پس از انتشار کتاب «وراثت طبیعی» (۱۸۸۹)، گالتون به دو مسئله به ظاهر نامرتبب پرداخت: یکی در انسان‌شناسی (برآورد قد فرد از روی یک استخوان ران) و دیگری در پزشکی قانونی (رابطه بین اندازه‌گیری‌های مختلف یک فرد برای شناسایی مجرمان). مکنزی [۴۵] و پورتر [۵۳] اشاره می‌کنند که انگیزه فوری گالتون برای تعمیم مفهوم همبستگی از وراثت به حوزه‌های دیگر، آشنایی با «سیستم برتلیون» بود. آلفونس برتلیون، جرم‌شناس فرانسوی، سیستمی برای شناسایی مجرمان بر اساس اندازه‌گیری‌های فیزیکی (مانند طول اندام‌ها) ابداع کرده بود. گالتون دریافت که این مسئله - همبستگی بین اندازه‌گیری‌های مختلف یک فرد - از نظر ساختاری با مسئله وراثت یکسان است. گالتون بعدها نوشت:

«لذت‌های فکری کمی لذت‌بخش‌تر از آن است که شخصی ناگهان درمی‌یابد که تحقیقش تعمیم‌پذیری گسترده دارد» [۲۷، ص. ۴۱۹].

گالتون در مقاله ۱۸۹۰ خود با عنوان «خویشاوندی و ارتباطات توأم» که در مجله نورث امریکن ریویو منتشر شد، مفهوم همبستگی را با زبانی روشن برای عموم توضیح داد [۲۷]. او با مثالی از رابطه بین طول انگشت و قد، نحوه محاسبه ضریب همبستگی را شرح داد:

اگر طول انگشت مردانی که یک اینچ با میانگین تفاوت دارند، به طور میانگین $\frac{1}{16}$ اینچ با میانگین تفاوت داشته باشد، و از سوی دیگر، اگر قد مردانی که یک اینچ با میانگین تفاوت دارند، به طور میانگین $\frac{1}{16}$ اینچ با میانگین تفاوت داشته باشد، آنگاه با در نظر گرفتن

نسبت پراکندگی‌ها (۱۵ به ۱۷۵)، ضریب همبستگی برابر خواهد بود با:

$$R = (0.06) \times \frac{175}{15} = \left(\frac{8}{19}\right) \times \frac{15}{175} = 0.07.$$

به بیان امروزی، گالتون از این حقیقت استفاده کرده است که $R = b_{y|x} \cdot (\sigma_x / \sigma_y)$ ، یعنی ضریب همبستگی برابر است با حاصلضرب شیب رگرسیون در نسبت انحراف معیارها.

۵.۲ نقش واسطه اجورث

فرانسیس اجورث (۱۸۴۵-۱۹۲۴) نخستین آماردانی بود که ایده‌های گالتون را در قالبی ریاضی صورتبندی کرد [۱۸، ۱۹، ۲۰]. گالتون در مقالات خود از اصطلاح «Co-relation» استفاده می‌کرد که بعداً به «Correlation» بدل شد. اجورث به جای «شاخص ارتباط توأم» گالتون، از عبارت «ضریب همبستگی» برای پارامتر ρ در توزیع نرمال دومتغیره بهره برد. برخلاف گالتون که از میانه و خطای محتمل برای استانداردسازی متغیرها استفاده می‌کرد، اجورث از میانگین و انحراف معیار بهره جست. او ρ را برحسب $E(XY)$ تعریف نکرد، بلکه از تعریف گالتون (ρ به عنوان شیب خط رگرسیون برای متغیرهای استانداردشده) پیروی کرد. آثار اجورث پل ارتباطی میان ایده‌های شهودی گالتون و فرمول‌بندی دقیق ریاضی پیرسون محسوب می‌شود.

۶.۲ فرمول‌بندی پیرسون

پس از انتشار مقالات گالتون، کارل پیرسون به این موضوع توجه یافت. پیرسون که به زیست‌شناسی و آمار علاقه‌مند بود، با مطالعه کتاب‌های گالتون، مجموعه‌ای از مقالات در زمینه ریاضیات نظریه تکامل داروین منتشر کرد. او صورت ریاضی ایده‌های تجربی گالتون را به روشی بیان نمود و با استفاده از تابع چگالی نرمال دومتغیره، فرمول زیر را برای ضریب همبستگی بین دو متغیر تصادفی X و Y با میانگین‌ها و واریانس‌های متناهی به دست آورد که امروزه به نام «ضریب همبستگی گشتاوری پیرسون» شناخته می‌شود [۴۹]:

$$\rho = \frac{E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]}{\sqrt{E[(X - \mu_X)^2] E[(Y - \mu_Y)^2]}}.$$

برای نمونه تصادفی $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ ، برآورد نمونه‌ای این ضریب به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}}.$$

در یک جمعیت ثابت می‌مانند و چگونه می‌توان این پدیده را مدل‌سازی کرد. مفاهیم رگرسیون و همبستگی او رویکردی انقلابی برای مطالعه وابستگی بین متغیرها فراهم آورد.

بنابراین، نمی‌توان براوا یا دیگر نظریه‌پردازان خطا را پیشگام همبستگی به معنای امروزی آن دانست. آنها ابزارهای ریاضی را فراهم کردند، اما گالتون بود که با انتخاب «تغییرپذیری» به عنوان مسئله اصلی تحقیق، مفهوم همبستگی را متحول ساخت. به عبارت دیگر، اگرچه ابزارهای ریاضی پیش از گالتون وجود داشتند، اما مسئله‌ای که این ابزارها به آن پاسخ می‌دادند، توسط گالتون تعریف شد.

۳ کاستی‌های ضریب پیرسون

گام بعدی در بسط ایده گالتون را جورج اودنی یول برداشت و ایده رگرسیون چندگانه و ضریب همبستگی چندگانه را توسعه داد [۶۴، ۶۵]. او در مقاله خود نوشت:

«تنها نظریه موجود در مورد همبستگی، برای متغیرهای نرمال کاربرد دارد و متأسفانه توزیع نرمال در بسیاری از موارد مهم معتبر نیست. به عنوان مثال، متغیرهای اقتصادی مانند دستمزدها و قیمت‌ها و بسیاری موارد دیگر، توزیعی چوله دارند. در این موارد، ضریب همبستگی گالتون-پیرسون را نمی‌توان به کار برد و در حال حاضر معیار دیگری نیز برای اندازه‌گیری همبستگی وجود ندارد.»

اما محدودیت‌های ضریب همبستگی پیرسون فراتر از مسئله نرمال بودن است. مثال‌های زیر برخی از این محدودیت‌ها را نشان می‌دهند.

مثال ۱. فرض کنید Z_1 و Z_2 دو متغیر تصادفی مستقل و هموزیع با توزیع نرمال استاندارد باشند. تعریف می‌کنیم:

$$X = Z_1, \quad Y = \frac{1}{Z_2}.$$

واضح است که X و Y مستقل هستند. اما متغیر تصادفی XY متناهی Z_1/Z_2 دارای توزیع کوشی استاندارد است. در نتیجه $E(XY)$ متناهی نیست. از آنجا که $E(X) = 0$ ، کوواریانس X و Y نیز متناهی نیست. بنابراین نمی‌توان نتیجه گرفت که $\text{Cov}(X, Y) = 0$. این مثال نشان می‌دهد که استقلال دو متغیر تصادفی، الزاماً به معنای ناهمبسته بودن آنها نیست، مگر آنکه گشتاورهای مرتبه اول موجود باشند. به عبارت دیگر، برای نتیجه‌گیری ناهمبسته بودن از استقلال،

دامنه این ضریب بازه $[-1, 1]$ است. مقدار $R = 1$ نشان‌دهنده همبستگی خطی کامل مثبت، $R = -1$ نشان‌دهنده همبستگی خطی کامل منفی، و $R = 0$ نشان‌دهنده نبود همبستگی خطی است.

۷.۲ نقش فیشر

رونالد فیشر [۲۲] توزیع دقیق ضریب همبستگی نمونه‌ای R را برای متغیرهای نرمال به دست آورد و نشان داد که تبدیل $Z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+R}{1-R}$ دارای توزیعی تقریباً نرمال است. این نتیجه، زیربنای استنباط آماری درباره ضریب همبستگی را فراهم کرد.

۸.۲ یادداشت تاریخی

پیرسون [۴۹] در یکی از نخستین بازسازی‌های تاریخی خود، براوا [۷] را به عنوان نخستین کسی معرفی کرد که به مفهوم همبستگی پرداخته است. از دیدگاه او، براوا با ارائه توزیع نرمال دو متغیره، گام مهمی در جهت فرمول‌بندی ریاضی همبستگی برداشته بود. این دیدگاه بعدها توسط یول [۶۶] و دیگران گسترش یافت. با این حال، پیرسون در سال ۱۹۲۰ با بازبینی دقیق‌تر مقاله براوا، نظر خود را اصلاح کرد [۵۰]. او دریافت که هدف براوا صرفاً اندازه‌گیری خطاهای تعیین مختصات یک نقطه در فضا بوده است، نه مطالعه وابستگی بین متغیرها. براوا فرض می‌کرد که کمیت‌های مشاهده‌شده مستقل هستند و هیچ‌گاه مفهوم همبستگی را به معنای امروزی آن به کار نبرد. واکر [۶۲] نیز تأکید می‌کند که براوا هرگز به شدت رابطه بین متغیرها نمی‌اندیشید و این موضوع را برای توجه ویژه برجسته نساخت. به گفته مکزی [۴۵]، براوا توانسته بود توزیع نرمال دو متغیره را فرمول‌بندی کند، اما هرگز گام بعدی، یعنی تحلیل ضرایب و اندازه‌گیری شدت وابستگی را برنداشت.

روش حداقل مربعات که پایه ریاضی همبستگی است، توسط لژاندر [۴۳] و گاوس [۲۹] توسعه یافته بود، اما گالتون از وجود آن آگاه نبود [۴۹، ۵۰]. او مسیر مستقلی را دنبال می‌کرد که ریشه در آزمایش‌های تجربی و علاقه به پدیده وراثت داشت. دنیس [۱۶] نیز بر این باور است که ریشه‌های ریاضی همبستگی را باید در کار لژاندر جستجو کرد، نه در کار براوا.

تفاوت اساسی میان نظریه‌پردازان خطا و گالتون در هدف پژوهش بود. نظریه‌پردازان خطا در سنت نجوم و با هدف کاهش خطای اندازه‌گیری کار می‌کردند. آنها عمدتاً با توزیع‌های تک‌متغیره یا حداکثر با متغیرهای مستقل سروکار داشتند. گالتون، برعکس، به دنبال درک و اندازه‌گیری «تغییرپذیری» بود. او می‌خواست بداند چرا ویژگی‌های ارثی

ضریب همبستگی پیرسون برای این داده‌ها برابر با ۰/۶۲ است که نشان‌دهنده همبستگی مثبت قابل توجهی است. اما با افزایش X از ۱ به ۴، مقدار Y کاهش می‌یابد (از ۱- به ۴-) و تنها در آخرین مشاهده ($X = 5$) جهش ناگهانی به $Y = 20$ رخ می‌دهد. این مثال نشان می‌دهد که همبستگی مثبت لزوماً به معنای افزایش یکنوای Y بر حسب X نیست. همچنین این مثال، حساسیت ضریب پیرسون به نقاط دورافتاده را آشکار می‌سازد.

همبستگی به معنای علیت نیست: وجود همبستگی قوی بین دو متغیر لزوماً به معنای تأثیر علی یکی بر دیگری نیست. ممکن است همبستگی مشاهده‌شده ناشی از وجود یک متغیر مخدوشگر^{۱۲} باشد که بر هر دو متغیر تأثیر می‌گذارد، یا صرفاً نتیجه همبستگی کاذب^{۱۳} ناشی از تصادف یا روندهای مشترک زمانی باشد [۶۷]. برای نمونه، همبستگی بالای بین تعداد لک‌ها و تعداد تولدها در یک منطقه، به معنای علیت لک‌ها در تولد نوزادان نیست، بلکه هر دو متغیر تحت تأثیر عامل سومی (مانند توسعه روستایی) هستند. تمایز بین همبستگی و علیت یکی از اصول بنیادین در تحلیل آماری است و پژوهشگر باید همواره در تفسیر ضرایب همبستگی احتیاط کند [۱۰].

بنابراین، نتیجه‌گیری کلی این است که ضریب پیرسون، وابستگی خطی دو متغیر را اندازه‌گیری می‌کند و مقدار آن برای وابستگی‌های غیرخطی قابل اعتماد نیست. این محدودیت‌ها موجب شد تا آماردانان به دنبال معیارهای جایگزین باشند. در بخش‌های بعدی، معیارهای وابستگی را بررسی خواهیم کرد که بسیاری از این محدودیت‌ها را برطرف می‌سازند. این معیارها را بر اساس توانایی آن‌ها در تشخیص روابط یکنوا در برابر روابط غیریکنوا دسته‌بندی می‌کنیم.

۴ تمایز بین انواع معیارهای وابستگی

محدودیت‌های ضریب همبستگی پیرسون، به ویژه وابستگی آن به فرض نرمال بودن متغیرها و ناتوانی در تشخیص روابط غیرخطی، آماردانان را به جستجوی معیارهای جایگزین سوق داد. مفهوم «وابستگی» نقطه مقابل استقلال است: هرگونه انحراف از استقلال دو متغیر تصادفی، به معنای وجود نوعی وابستگی بین آنها است و می‌تواند به اشکال مختلفی ظاهر شود. برای اندازه‌گیری دو نوع مهم وابستگی غیرخطی (وجود «رابطه یکنوا» یا «رابطه غیر یکنوا») بین دو متغیر، دو دسته

باید وجود گشتاورهای مرتبه اول تضمین شده باشد؛ در غیر این صورت، ممکن است کوواریانس حتی وجود نداشته باشد.

مثال ۲. فرض کنید $Z_1, \dots, Z_5$ متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با توزیع نرمال استاندارد باشند. تعریف می‌کنیم:

$$X = Z_1^2, \quad Y = \frac{1}{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2}.$$

واضح است که X و Y مستقل هستند. با توجه به اینکه $Z_1 \sim \chi_{(1)}^2$ و $\sum_{i=1}^5 Z_i^2 \sim \chi_{(5)}^2$ [۹]، داریم:

$$E(X) = 1, \quad E(Y) = E\left(\frac{1}{\chi_{(5)}^2}\right) = \frac{1}{4}, \quad E(XY) = \frac{4}{4-2} = 2.$$

بنابراین، $\text{COV}(X, Y) \neq 0$. اما واریانس Y متناهی نیست، زیرا $E(Y^2) = E\left(\frac{1}{(\chi_{(5)}^2)^2}\right) = \infty$. در نتیجه ضریب همبستگی گشتاوری X و Y تعریف نمی‌شود. این مثال نشان می‌دهد که دو متغیر مستقل ممکن است کوواریانس غیرصفر داشته باشند، اما ضریب همبستگی آنها تعریف نشده باشد.

مثال ۳. رابطه $Y = X^\alpha$ را با $X \sim U(0, 1)$ در نظر بگیرید. به‌سادگی می‌توان نشان داد که ضریب همبستگی گشتاوری X و Y به صورت زیر است:

$$\rho_{X,Y}(\alpha) = \frac{\sqrt{3(1+2\alpha)}}{\alpha+2}.$$

برای $\alpha = 1$ (رابطه خطی $Y = X$)، ضریب همبستگی برابر ۱ است. اما برای مقادیر α نزدیک به ۱، مثلاً $\alpha = 0.8$ یا $\alpha = 1.2$ ، مقدار ضریب همبستگی $\rho(X, Y) \approx 0.99$ است، در حالی که وابستگی غیرخطی بین دو متغیر وجود دارد. این مثال نشان می‌دهد که نزدیکی مقدار ضریب همبستگی گشتاوری به ۱، لزوماً به معنای نزدیک بودن رابطه به یک رابطه خطی نیست.

مثال ۴. یکی دیگر از کاستی‌های ضریب همبستگی گشتاوری پیرسون این است که مقدار آن برای وابستگی‌های غیرخطی به شدت به توزیع متغیر مستقل وابسته است. برای مثال، اگر $Y = X^2$ و $X \sim N(0, 1)$ باشد، ضریب همبستگی پیرسون برابر صفر است، در حالی که برای $X \sim U(0, 1)$ ، این ضریب حدود ۰/۹۷ است.

مثال ۵. مثبت بودن ضریب همبستگی لزوماً به معنای افزایش یکنوای Y با افزایش X نیست. برای نمونه، فرض کنید (X, Y) مقادیر زیر را با احتمال $\frac{1}{5}$ اختیار می‌کند:

$$(1, -1), (2, -2), (3, -3), (4, -4), (5, 20).$$

¹²Confounder

¹³Spurious Correlation

«معیارهای اندازه‌گیری روابط یکنوا» و «معیارهای اندازه‌گیری وابستگی غیر یکنوا» وجود دارد.

• معیارهای اندازه‌گیری روابط یکنوا:

این معیارها، روابط یکنوا^{۱۴} را اندازه‌گیری می‌کنند؛ یعنی روابطی که در آن‌ها با افزایش X ، مقدار Y یا همواره افزایش می‌یابد (رابطه صعودی) یا همواره کاهش می‌یابد (رابطه نزولی). این روابط می‌توانند خطی یا غیرخطی باشند، اما شرط یکنوا بودن برقرار است. این معیارها به دو دسته تقسیم می‌شوند.

۱. معیارهای اندازه‌گیری شدت و جهت وابستگی:

معیارهایی مانند ضرایب همبستگی رتبه‌ای کندال و اسپیرمن «شدت و جهت وابستگی» را همزمان اندازه‌گیری می‌کنند. دامنه مقادیر این معیارها بازه $[-1, 1]$ است. مقدار مثبت نشان‌دهنده وابستگی یکنوای صعودی و مقدار منفی نشان‌دهنده وابستگی یکنوای نزولی است. صفر به معنای «نبود وابستگی یکنوا» است (اما نه لزوماً استقلال). تحت تبدیلات نزولی، علامت معیار عوض می‌شود. مهم‌ترین معیارهای این دسته عبارتند از: اسپیرمن، کندال، جینی و بلومکوئیست. این معیارها که «ضرایب همبستگی ناپارامتری» نیز نامیده می‌شوند، نیازی به فرض توزیع خاصی ندارند و در برابر تبدیلات صعودی ناورداد^{۱۵} هستند. این دسته از معیارها، ویژگی‌های مطلوب یک معیار وابستگی را که به اصول اسکارسینی^{۱۶} معروف هستند، برآورده می‌کنند و به «معیار هماهنگی»^{۱۷} معروفند و میزان همراهی مقادیر «بزرگ» یک متغیر با مقادیر «بزرگ» متغیر دیگر (و مقادیر «کوچک» با «کوچک») را اندازه می‌گیرند. در نتیجه، این معیارها زمانی به مقادیر ۱ و -۱ می‌رسند که متغیرها وابسته کامل مثبت یا وابسته کامل منفی باشند. به عبارت دیگر، یک معیار هماهنگی «جهت و شدت» رابطه یکنوا را اندازه می‌گیرد.

۲. معیارهای اندازه‌گیری شدت وابستگی:

یک ضعف مشترک معیارهای هماهنگی این است که صفر بودن آنها استقلال متغیرهای تصادفی را نشان

نمی‌دهد. دسته دیگری از معیارهای وابستگی یکنوا وجود دارند که بدون توجه به «جهت وابستگی (منفی یا مثبت)»، صرفاً به «شدت وابستگی» توجه دارند. این معیارها با دامنه $[0, 1]$ نشان می‌دهند دو متغیر X و Y چقدر به هم مرتبط هستند و مقادیر حدی ۰ و ۱ را به ترتیب در حالت استقلال و وابستگی کامل یکنوا (بدون توجه به جهت رابطه نزولی یا صعودی) اختیار می‌کنند. مقدار صفر برای این معیارها معادل استقلال است. مهم‌ترین معیارهای این دسته، معیار وابستگی هوفدینگ^{۱۸} [۲۴] و معیار شوائتر و ولف [۵۷] هستند.

• معیارهای اندازه‌گیری روابط غیریکنوا:

معیارهای وابستگی یکنوا برای داده‌هایی مناسب‌اند که انتظار می‌رود رابطه بین متغیرها یکنوا (صعودی یا نزولی) باشد، اما این معیارها قادر به تشخیص الگوهای غیریکنوا نیستند. منظور از الگوهای غیر یکنوا روابطی مانند سهمی، دایره‌ای، تناوبی یا حلقوی است که می‌توانند صعودی و نزولی شوند. به عنوان مثال، فرض کنید X بر روی بازه $(-1, 1)$ دارای توزیع یکنواخت باشد و $Y = X^2$ تعریف شود. در این حالت، با افزایش X از -۱ به ۰، Y کاهش می‌یابد و با افزایش X از ۰ به ۱، Y افزایش می‌یابد؛ بنابراین رابطه بین X و Y غیریکنوا است. ضرایب همبستگی مانند اسپیرمن و کندال مقدار وابستگی را صفر نشان می‌دهند [۴۶]. برای اندازه‌گیری این گونه روابط، معیارهای وابستگی خاصی معرفی شده است که به آنها «معیارهای وابستگی غیریکنوا»^{۱۹} یا «معیارهای وابستگی تابعی» گفته می‌شود. این معیارها در بازه $[0, 1]$ تعریف می‌شوند؛ مقدار ۰ نشان‌دهنده استقلال و مقدار ۱ نشان‌دهنده وابستگی تابعی کامل (از هر نوع) است.

در ادبیات آماری، انواع دیگری از وابستگی نیز مطرح هستند که می‌توانند هم به صورت یکنوا و هم به صورت غیریکنوا ظاهر شوند. ادامه به مهم‌ترین آنها اشاره می‌شود.

• وابستگی رگرسیونی^{۱۸}: به میزان پیش‌بینی‌پذیری یک متغیر بر

اساس متغیر دیگر اشاره دارد. به طور خاص، اگر امید شرطی $E[Y|X]$ تابعی غیرثابت از X باشد، گفته می‌شود Y به طور

¹⁴Monotone Relationships

¹⁵Invariant

¹⁶Measure of Concordance

¹⁷Non-monotone Measures of Dependence

¹⁸Regression Dependence

دسته دامنه مقادیر $[1, -1]$ دارند و «شدت و جهت وابستگی» را اندازه گیری می‌کنند که به معیارهای «معیارهای هماهنگی» معروف هستند. دسته دوم، بدون توجه به «جهت وابستگی (منفی یا مثبت)»، صرفاً به «شدت وابستگی» توجه دارند و دامنه $[0, 1]$ دارند که به آنها «معیارهای وابستگی یکنوا»^{۲۱} می‌گویند [۴۷].

۱.۵ معیارهای هماهنگی

اسکارسینی در سال ۱۹۸۴ مجموعه‌ای از ویژگی‌های مطلوب را برای یک معیار وابستگی بیان کرد [۵۶]. این اصول برای معیارهای وابستگی تعریف شده‌اند که حافظ نوعی ترتیب وابستگی به نام ترتیب هماهنگی هستند. به همین خاطر به آنها معیار هماهنگی می‌گویند. برای دو بردار تصادفی (X, Y) و (X', Y') با توابع توزیع F و G و توابع توزیع حاشیه‌ای یکسان، ترتیب هماهنگی به صورت زیر تعریف می‌شود [۳۶]:

$$(X, Y) \prec_c (X', Y')$$

اگر و فقط اگر

$$F(x, y) \leq G(x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

این ترتیب وابستگی به این معناست که X' و Y' تمایل بیشتری به هم‌زمانی بزرگ یا کوچک بودن دارند. اصول اسکارسینی برای یک معیار هماهنگی $\kappa(X, Y)$ عبارتند از:

۱. خوش‌تعریفی: $\kappa(X, Y)$ برای هر توزیع توأم به‌خوبی تعریف شده باشد.

۲. دامنه: $-1 \leq \kappa(X, Y) \leq 1$.

۳. وابستگی کامل مثبت: $\kappa(X, Y) = 1$ اگر $Y = f(X)$ با f صعودی.

۴. وابستگی کامل منفی: $\kappa(X, Y) = -1$ اگر $Y = f(X)$ با f نزولی.

۵. استقلال: اگر X و Y مستقل باشند، آنگاه $\kappa(X, Y) = 0$ (اما عکس آن لزوماً برقرار نیست).

۶. تقارن: $\kappa(X, Y) = \kappa(Y, X)$.

۷. حفظ ترتیب هماهنگی: اگر $(X, Y) \prec_c (X', Y')$ ، آنگاه $\kappa(X, Y) \leq \kappa(X', Y')$.

رگرسیون به X وابسته است [۴۴]. این نوع وابستگی می‌تواند یکنوا (مانند $E[Y|X] = \alpha + \beta X$ یا $E[Y|X] = \alpha + \beta X^2$) یا غیریکنوا (مانند $E[Y|X] = \sin(2\pi X)$) باشد.

• **وابستگی سریالی**^{۱۹}: به رابطه بین مقادیر یک فرایند تصادفی در زمان‌های مختلف اشاره دارد [۶]. برای یک فرایند تصادفی $\{X_t\}$ ، خودهمبستگی $\rho(k) = \text{Corr}(X_t, X_{t+k})$ یک نوع وابستگی سریالی خطی است. وابستگی سریالی می‌تواند غیرخطی و همچنین غیریکنوا باشد.

• **وابستگی دمی**^{۲۰}: به وابستگی بین متغیرها در مقادیر حدی (دم‌های توزیع) اشاره دارد [۳۶]. برای مثال، در تحلیل ریسک مالی، وابستگی دمی بالا به معنای آن است که اگر یک بازار سقوط کند، بازار دیگر نیز به احتمال زیاد سقوط می‌کند. وابستگی دمی می‌تواند در دم بالا یا دم پایین تعریف شود و مستقل از رفتار متغیرها در میانه توزیع است. این نوع وابستگی نیز می‌تواند یکنوا یا غیریکنوا باشد.

این نکته حائز اهمیت است که یک زوج متغیر تصادفی می‌توانند هم‌زمان چندین نوع وابستگی را نشان دهند. برای مثال، داده‌های مالی اغلب دارای وابستگی دمی بالا (در زمان بحران) و وابستگی ضعیف در شرایط عادی هستند، در حالی که وابستگی سریالی نیز در آنها مشاهده می‌شود.

این طبقه‌بندی نشان می‌دهد که هیچ معیار یکتایی برای سنجش همه جنبه‌های وابستگی وجود ندارد و انتخاب معیار مناسب به هدف تحلیل بستگی دارد: اینکه چه جنبه‌ای از رابطه بین متغیرها قرار است اندازه‌گیری شود (شدت کلی وابستگی، ساختار تابعی یا پیش‌بینی‌پذیری، جهت رابطه، رفتار در دم‌ها یا نواحی خاص). درک این تمایزها برای انتخاب معیار مناسب و تفسیر صحیح نتایج ضروری است.

۵ اندازه‌گیری شدت و جهت وابستگی

همان گونه که در بخش ۴ اشاره شد، معیارهای اندازه‌گیری وابستگی یکنوا، روابطی که در آن‌ها با افزایش X ، مقدار Y یا همواره افزایش می‌یابد (رابطه صعودی) یا همواره کاهش می‌یابد (رابطه نزولی) را اندازه‌گیری می‌کنند. این معیارها به دو دسته تقسیم می‌شوند: یک

¹⁹Serial Dependence

²⁰Tail Dependence

²¹Measures of Monotone Dependence

که در آن $d_i = R_i - S_i$. این فرمول زمانی معتبر است که رتبه‌های برابر وجود نداشته باشند. در صورت وجود رتبه‌های برابر، باید از فرمول اصلی (۱) استفاده کرد.

دامنه r_s مانند ضریب پیرسون، بازه $[-1, 1]$ است. مقدار ۱ نشان‌دهنده هماهنگی کامل (وابستگی یکنوای صعودی)، -۱ نشان‌دهنده هماهنگی کامل معکوس (وابستگی یکنوای نزولی)، و ۰ نشان‌دهنده نبود وابستگی یکنوا است. پارامتر جمعیت که r_s برآورد آن است، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \rho_s &= \text{Corr}\{F(X), G(Y)\} \\ &= \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^2} F(x)G(y) dH(x, y) - 3. \end{aligned} \quad (3)$$

این بیان نشان می‌دهد که ضریب اسپیرمن در واقع همبستگی پیرسون بین دو متغیر یکنواخت $U = F(X)$ و $V = G(Y)$ است. به عبارت دیگر، $\rho_s = \frac{1}{2} E(UV) - 3$ که با توجه به $E(U) = E(V) = 1/2$ و $\text{Var}(U) = \text{Var}(V) = 1/12$

$$E(U) = E(V) = 1/2, \quad \text{Var}(U) = \text{Var}(V) = 1/12,$$

به رابطه ۳ منجر می‌شود.

آزمون معناداری برای ρ_s ($H_0: \rho_s = 0$) بر اساس آماره t انجام می‌شود:

$$t = \frac{r_s \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_s^2}} \sim t(n-2).$$

این آماره تحت فرض صفر دارای توزیع t با $n-2$ درجه آزادی است. برای نمونه‌های بزرگتر از حدود ۳۰، می‌توان از توزیع نرمال نیز استفاده کرد.

ضریب اسپیرمن تمام اصول دهگانه اسکارسینی [۵۶] را برآورده می‌سازد و بنابراین یک معیار هماهنگی معتبر است. اسپیرمن در فرمول اولیه خود، به اشتباه از میانه به جای میانگین استفاده کرده بود. او این خطا را در کارهای بعدی خود اصلاح کرد [۵۹]. با وجود این اشتباه اولیه، ضریب اسپیرمن امروزه یکی از پرکاربردترین معیارهای همبستگی ناپارامتری در علوم رفتاری، اجتماعی و زیستی است. از مزایای اصلی اسپیرمن نسبت به پیرسون می‌توان به عدم نیاز به فرض نرمال بودن، مقاومت در برابر نقاط دور افتاده، و توانایی تشخیص روابط یکنوا (نه فقط خطی) اشاره کرد. با این حال، این ضریب نیز مانند سایر معیارهای یکنوا، قادر به تشخیص وابستگی‌های غیریکنوا (مانند $Y = X^2$ در بازه مقارن) نیست.

۸. ناوردایی نسبت به تبدیلات یکنوا: اگر f و g هر دو صعودی یا هر دو نزولی باشند، آنگاه

$$\kappa(f(X), g(Y)) = \kappa(X, Y).$$

۹. تغییر علامت با تبدیل یکنوای معکوس: اگر یکی از f یا g صعودی و دیگری نزولی باشد، آنگاه

$$\kappa(f(X), g(Y)) = -\kappa(X, Y).$$

۱۰. پیوستگی: اگر $(X_n, Y_n) \xrightarrow{d} (X, Y)$ ، آنگاه

$$\kappa(X_n, Y_n) \rightarrow \kappa(X, Y).$$

ضریب همبستگی پیرسون برخی از این اصول را نقض می‌کند: تحت تبدیلات غیرخطی یکنوا ناوردا نیست، لزوماً ترتیب هماهنگی را حفظ نمی‌کند (زیرا به واریانس‌های حاشیه‌ای نیز وابسته است). اگرچه دامنه پیرسون $[-1, 1]$ است، اما مقادیر حدی ۱ و -۱ فقط در وابستگی خطی کامل (نه هر وابستگی یکنوای کامل) حاصل می‌شوند.

۲.۵ معیارهای هماهنگی معروف

در این بخش به برخی از معیارهای همبستگی ناپارامتری مبتنی بر رتبه مانند اسپیرمن، کندال، جینی و بلومکوئیست که اصول اسکارسینی را برآورده می‌سازند، می‌پردازیم.

۱.۲.۵ ضریب همبستگی رتبه‌ای اسپیرمن

چارلز ادوارد اسپیرمن (۱۸۶۳-۱۹۴۵)، روانشناس انگلیسی، در سال ۱۹۰۴ ضریب همبستگی رتبه‌ای خود را معرفی کرد [۵۹]. اسپیرمن در فرمول ضریب همبستگی گالتون-پیرسون، به جای داده‌ها، رتبه آنها را قرار داد. اگر رتبه‌های x_i را با R_i و رتبه‌های y_i را با S_i نشان دهیم، ضریب همبستگی رتبه‌ای اسپیرمن r_s همان ضریب پیرسون است که روی رتبه‌ها محاسبه می‌شود:

$$r_s = \frac{\sum_{i=1}^n (R_i - \bar{R})(S_i - \bar{S})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (R_i - \bar{R})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (S_i - \bar{S})^2}}. \quad (1)$$

فرمول جایگزین دیگری نیز برای r_s وجود دارد که محاسبه را ساده‌تر می‌کند:

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n d_i^2}{n(n^2 - 1)}, \quad (2)$$

۲.۲.۵ ضریب همبستگی کندال

موريس جرج کندال (۱۹۸۳-۱۹۰۷) در سال ۱۹۳۸ معیار دیگری برای همبستگی رتبه‌ای پیشنهاد کرد [۲۸]. کندال برای معرفی ضریب خود، نخست مفاهیم «هماهنگی»^{۲۲} و «ناهمانگی»^{۲۳} را تعریف کرد. برای دو مشاهده (x_i, y_i) و (x_j, y_j) ، جفت (i, j) را هماهنگ (ناهماهنگ) گوئیم اگر $(x_i - x_j)(y_i - y_j) > (<) 0$. اگر تعداد جفت‌های هماهنگ را با C و تعداد جفت‌های ناهماهنگ را با D نشان دهیم، ضریب کندال به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tau_n = \frac{C - D}{C + D} = \frac{C - D}{\binom{n}{2}} = \frac{4C}{n(n-1)} - 1.$$

دامنه τ_n نیز بازه $[-1, 1]$ است. تفسیر آن بسیار شهودی است: $\tau_n = 1$ به این معناست که همه جفت‌ها هماهنگ‌اند (وابستگی یکنوای کامل مثبت)، $\tau_n = -1$ یعنی همه جفت‌ها ناهماهنگ‌اند (وابستگی یکنوای کامل منفی)، و $\tau_n = 0$ نشان‌دهنده نبود وابستگی یکنوا است. اگر (X_1, Y_1) و (X_2, Y_2) دو نمونه مستقل از بردار تصادفی (X, Y) با توزیع توأم $H(\cdot, \cdot)$ باشند، نسخه نظری ضریب همبستگی کندال به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \tau(X, Y) &= P\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0\} \\ &\quad - P\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0\} \\ &= 4 \iint_{\mathbb{R}^2} H(x, y) dH(x, y) - 1. \end{aligned}$$

ضریب همبستگی کندال تمام اصول دهگانه اسکارسینی [۵۶] را برآورده می‌سازد و بنابراین یک معیار هماهنگی معتبر است. اگرچه ضرایب همبستگی اسپیرمن و کندال هر دو برای اندازه‌گیری وابستگی یکنوا طراحی شده‌اند، اما بر اساس مبانی متفاوتی تعریف می‌شوند و مقادیر عددی آن‌ها می‌توانند تفاوت قابل توجهی داشته باشند. رابطه بین این دو ضریب توسط دانیلز [۱۲] به صورت نابرابری زیر مشخص شده است:

$$-1 \leq 3\tau - 2\rho_s \leq 1. \quad (۴)$$

این نابرابری نشان می‌دهد که قدر مطلق ρ_s همواره از قدر مطلق τ بزرگتر یا مساوی است، یعنی $|\rho_s| \geq |\tau|$ ، و تفاوت آن‌ها به ساختار وابستگی بستگی دارد. به عنوان مثال، اگر $\tau = 0$ باشد، آنگاه $-\frac{1}{3} \leq \rho_s \leq \frac{1}{3}$ انتخاب بین ضریب همبستگی اسپیرمن و کندال در عمل به عوامل مختلفی بستگی دارد. ضریب همبستگی کندال به عنوان

اختلاف احتمال هماهنگی و ناهماهنگی قابل تفسیر است، در حالی که تفسیر اسپیرمن به عنوان همبستگی رتبه‌ها کمتر شهودی است. علاوه بر این، ضریب همبستگی کندال در نمونه‌های کوچک و در حضور داده‌های گسسته با رتبه‌های برابر، عملکرد پایدارتری دارد و توزیع نمونه‌گیری آن به نرمال بودن نزدیک‌تر است [۳۹]. ضریب همبستگی اسپیرمن در نمونه‌های بزرگتر کارآمدتر است. همچنین دنیت و داین [۱۷] نشان دادند که دامنه تغییرات کندال به توزیع‌های حاشیه‌ای وابسته نیست و همواره بازه کامل $[-1, 1]$ را پوشش می‌دهد، در حالی که دامنه اسپیرمن به توزیع‌های حاشیه‌ای وابسته است و ممکن است محدودتر باشد.

۳.۲.۵ ضریب همبستگی قاعده پا اسپیرمن

اسپیرمن پس از معرفی ضریب همبستگی رتبه‌ای خود، در سال ۱۹۰۶ معیار دیگری به نام «قاعده پا»^{۲۴} پیشنهاد کرد [۶۰]. این معیار بر پایه مجموع قدر مطلق تفاوت رتبه‌ها استوار است:

$$\phi_n = 1 - \frac{3}{n^2 - 1} \sum_{i=1}^n |R_i - S_i|. \quad (۱)$$

مقدار ϕ_n زمانی برابر با ۱ است که $R_i = S_i$ برای همه i (هماهنگی کامل). کوچکترین مقدار ϕ_n زمانی به دست می‌آید که دو مجموعه رتبه‌ها کاملاً متضاد باشند، یعنی $R_i = n + 1 - S_i$ برای همه i . دامنه ϕ_n به بستگی دارد:

- اگر n فرد باشد، ϕ_n در بازه $[-\frac{1}{3}, 1]$ قرار می‌گیرد.
- اگر n زوج باشد، ϕ_n می‌تواند تا $-\frac{n^2+2}{2(n^2-1)}$ کاهش یابد که برای n های بزرگ به -1 نزدیک می‌شود.

ضریب قاعده پا نسبت به تبدیل $R \mapsto n + 1 - R$ (معکوس‌سازی رتبه‌ها) متقارن نیست. به عبارت دیگر، اگر داده‌ها را از نظر علامت معکوس کنیم، مقدار ϕ_n می‌تواند تغییر کند. به عنوان مثال، سه مشاهده $(10, 20)$ ، $(20, 30)$ و $(30, 10)$ را در نظر بگیرید. در این حالت، رتبه‌های X برابر $(1, 2, 3)$ و رتبه‌های Y برابر $(2, 3, 1)$ هستند. محاسبه ϕ_n مقدار -1 را نشان می‌دهد. حال اگر داده‌ها را از نظر علامت معکوس کنیم، در مشاهدات $(-10, 20)$ ، $(-20, 30)$ و $(-30, 10)$ رتبه‌های X به $(3, 2, 1)$ و رتبه‌های Y همچنان $(2, 3, 1)$ خواهند بود. در این حالت، $\phi_n = 0$ به دست می‌آید. این مثال نشان می‌دهد که یک تبدیل ساده علامت، که نباید بر شدت وابستگی تأثیر بگذارد، مقدار ϕ_n

²²Concordance²³Discordance²⁴Footrule

ضریب همبستگی جینی تمام اصول دهگانه اسکارسینی [۵۶] را برآورده می‌سازد و بنابراین یک معیار هماهنگی معتبر است. برای هر دو متغیر تصادفی پیوسته X و Y ، رابطه زیر بین ضریب جینی (γ)، اسپیرمن (ρ_s) و کندال (τ) برقرار است [۴۸]:

$$|\gamma| \leq |\rho_s| \leq 1, \quad |\gamma| \leq |\tau| \leq 1. \quad (۷)$$

به عبارت دیگر، قدر مطلق ضریب جینی همواره از قدر مطلق اسپیرمن و کندال کوچکتر یا مساوی است. این ویژگی نشان می‌دهد که جینی معیاری محافظه‌کارانه‌تر نسبت به دو معیار دیگر است. ضریب همبستگی جینی نسبت به اسپیرمن و کندال از حساسیت کمتری به رتبه‌های میانی برخوردار است و بیشتر بر رتبه‌های ابتدایی و انتهایی تأکید دارد. این ویژگی می‌تواند در کاربردهایی که رتبه‌های بزرگ اهمیت بیشتری دارند (مانند تحلیل ریسک) مفید باشد.

تعمیم‌های ضریب همبستگی جینی

علاوه بر تعریف کلاسیک (۶)، تعمیم‌های دیگری از ضریب همبستگی جینی در ادبیات آماری وجود دارد. یکی از مهم‌ترین این تعمیم‌ها، «کوواریانس جینی» یا «هم‌جینی»^{۲۵} است که توسط ییتزهاکی و شختمن [۶۳] معرفی شده است. برای دو متغیر تصادفی X و Y ، دو کوواریانس جینی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\text{Gcov}(X, Y) = \text{Cov}(X, G(Y))$$

$$\text{Gcov}(Y, X) = \text{Cov}(Y, F(X)),$$

که در آن F و G به ترتیب توابع توزیع تجمعی X و Y هستند. بر اساس این کوواریانس‌ها، «ضریب همبستگی جینی» به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma_{X,Y} = \frac{\text{Cov}(X, G(Y))}{\text{Cov}(X, F(X))}, \quad \Gamma_{Y,X} = \frac{\text{Cov}(Y, F(X))}{\text{Cov}(Y, G(Y))}.$$

این ضریب همبستگی، برخلاف ضریب همبستگی گشتاوری پیرسون و ضریب رتبه‌ای اسپیرمن، نامتقارن است؛ یعنی لزوماً $\Gamma_{X,Y}$ با $\Gamma_{Y,X}$ برابر نیست. این ویژگی که از سوی برخی به عنوان نقص این ضریب تلقی می‌شد، در کاربردهایی مانند تحلیل رگرسیون که نقش متغیر وابسته و توضیح‌دهنده نامتقارن است، به عنوان یک مزیت محسوب می‌شود. تحت توزیع نرمال دومتغیره، هر دو ضریب همبستگی جینی با ضریب همبستگی پیرسون برابر هستند؛ یعنی $\Gamma_{X,Y} = \Gamma_{Y,X} = \rho$.

را به طور قابل توجهی تغییر می‌دهد. در نتیجه، ضریب قاعده پا چندین اصل اسکارسینی [۵۶] را نقض می‌کند.

برای بردار تصادفی (X, Y) با تابع توزیع توأم H و توزیع‌های حاشیه‌ای F و G ، نسخه نظری ضریب همبستگی قاعده پا به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\phi(X, Y) = 1 - 3 \iint_{\mathbb{R}^2} |F(x) - G(y)| dH(x, y).$$

به دلیل نقض اصول اسکارسینی و نامتقارنی، ضریب قاعده پا برای کاربردهای عمومی توصیه نمی‌شود. جایگزین مناسب آن، ضریب جینی است که نسخه متقارن شده قاعده پا بوده و تمام ویژگی‌های مطلوب یک معیار هماهنگی را دارا می‌باشد [۴۸]. با این حال، قاعده پا از نظر تاریخی اهمیت دارد، زیرا نشان می‌دهد که چگونه اسپیرمن به دنبال معیارهای ساده‌تر برای محاسبه بود و این تلاش‌ها بعدها منجر به توسعه ضریب جینی شد.

۴.۲.۵ ضریب همبستگی جینی

کورادو جینی^{۲۵} (۱۹۶۵-۱۸۸۴)، آماردان، جمعیت‌شناس و جامعه‌شناس ایتالیایی، در سال ۱۹۱۴ ضریب همبستگی رتبه‌ای خود را با عنوان «شاخص هم‌رتبگی ساده»^{۲۶} معرفی کرد [۳۲]. فرمول نمونه‌ای ضریب جینی به صورت زیر است:

$$\gamma_n = \frac{1}{[n^2/2]} \sum_{i=1}^n (|R_i + S_i - n - 1| - |R_i - S_i|), \quad (۵)$$

که در آن $[t]$ نشان‌دهنده جزء صحیح t (بزرگترین عدد صحیح کوچک‌تر یا مساوی t) است. دامنه γ_n بازه $[-1, 1]$ است.

برای بردار تصادفی (X, Y) با تابع توزیع توأم H و توزیع‌های حاشیه‌ای F و G ، نسخه نظری ضریب همبستگی جینی به صورت زیر تعریف می‌شود [۴۸]:

$$\gamma(X, Y) = 2 \iint_{\mathbb{R}^2} \{|F(x) + G(y) - 1| - |F(x) - G(y)|\} dH(x, y). \quad (۶)$$

نلسن و اوپدا-فلورس [۴۸] نشان دادند که ضریب جینی نسخه متقارن شده ضریب قاعده‌پا است. به عبارت دیگر، اگر ضریب قاعده‌پای اسپیرمن به صورت $\phi_n = 1 - \frac{2}{n^2-1} \sum |R_i - S_i|$ تعریف شود، آنگاه ضریب جینی از متقارن‌سازی آن نسبت به تبدیل $R \mapsto n+1-R$ حاصل می‌شود. این ویژگی باعث می‌شود جینی، بر خلاف قاعده‌پا، تحت تبدیلات یکنوای نزولی رفتار صحیحی داشته باشد.

²⁵Corrado Gini

²⁶Indice di Cogradauzione Semplice

²⁷Co-Gini

تعداد نقاطی که در ربع بالا-چپ یا پایین-راست قرار دارند (ربع‌های مخالف)، آنگاه ضریب بلومکوئیست به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\beta_n = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} = -1 + 2 \cdot \frac{n_1}{n_1 + n_2}.$$

در حالت n زوج، هیچ نقطه نمونه‌ای روی خطوط $y = \bar{Y}_n$ و $x = \bar{X}_n$ قرار نمی‌گیرد، بنابراین $n_1 + n_2 = n$. در حالت n فرد، ممکن است یک یا دو نقطه نمونه‌ای روی خطوط میانه قرار گیرند. بلومکوئیست پیشنهاد کرد که نقاط واقع بر خطوط میانه را در محاسبه لحاظ نکنیم [۴].

نسخه نظری ضریب بلومکوئیست برای متغیرهای تصادفی X و Y با میانه‌های $\bar{x}$ و $\bar{y}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \beta &= P\{(X - \bar{x})(Y - \bar{y}) > 0\} - P\{(X - \bar{x})(Y - \bar{y}) < 0\} \\ &= 2H(\bar{x}, \bar{y}) - 1. \end{aligned} \quad (9)$$

ضریب بلومکوئیست برخی از اصول اسکارسینی [۵۶] را برآورده می‌کند، اما نه همه آنها. این معیار، ترتیب هماهنگی را حفظ نمی‌کند؛ به همین دلیل، به عنوان یک معیار هماهنگی استاندارد شناخته نمی‌شود [۴۷]. با وجود محدودیت‌های نظری، ضریب بلومکوئیست به دلیل سادگی و سرعت محاسباتی، در تحلیل‌های اکتشافی و زمانی که اندازه نمونه بسیار بزرگ است می‌تواند مفید باشد.

۶.۲.۵ ضریب همبستگی بلیست

بلیست [۲] با الهام از تفسیر هندسی ضریب اسپیرمن و با هدف تأکید بر اختلافات در رتبه‌های اولیه، ضریب همبستگی رتبه‌ای جدیدی معرفی کرد. این ضریب برای کاربردهایی مناسب است که توافقی در رتبه‌های بالا (مانند رتبه مدال‌آوران در مسابقات ورزشی، پذیرش دانشجو بر اساس نمرات بالا، یا اولویت‌بندی در نظام‌های رتبه‌بندی) اهمیت بیشتری نسبت به رتبه‌های پایین دارد. برای رتبه‌های R_i و S_i (با فرض عدم وجود رتبه‌های برابر)، ضریب همبستگی رتبه‌ای بلیست^{۲۸} به صورت زیر تعریف می‌شود [۳]:

$$\nu_n = \frac{2n+1}{n-1} - \frac{12}{n^2-n} \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{R_i}{n+1}\right)^2 S_i.$$

این ضریب در بازه $[-1, 1]$ قرار دارد و مقادیر حدی آن در موارد زیر حاصل می‌شود:

- اگر $S_i = R_i$ (هماهنگی کامل)، آنگاه $\nu_n = 1$.
- اگر $S_i = n + 1 - R_i$ (هماهنگی کامل معکوس)، آنگاه $\nu_n = -1$.

از دیگر ویژگی‌های مهم ضریب همبستگی جینی می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

- دامنه آن همواره در بازه $[-1, 1]$ قرار دارد.
- اگر X و Y مستقل باشند، آنگاه $\Gamma_{X,Y} = \Gamma_{Y,X} = 0$.
- اگر Y تابعی یکنوای صعودی (نزولی) از X باشد، آنگاه $\Gamma_{X,Y} = \Gamma_{Y,X} = +1 (-1)$.
- $\Gamma_{X,Y}$ نسبت به تبدیلات یکنوای Y و تبدیلات مکان-مقیاس X ناورد است.
- این ضریب در تحلیل پوشش ریسک و تابع مطلوبیت مورد استفاده قرار می‌گیرد.

علاوه بر ضریب همبستگی، ضریب رگرسیون جینی نیز به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\beta^G = \frac{\text{Cov}(Y, F(X))}{\text{Cov}(X, F(X))}, \quad (8)$$

که ساختاری مشابه با ضریب رگرسیون حداقل مربعات معمولی دارد، اما به جای کوواریانس معمولی از کوواریانس جینی استفاده می‌کند. این ضریب رگرسیون را می‌توان به عنوان میانگین وزنی شیب‌های تعریف‌شده بین تمام زوج‌های ممکن از مشاهدات تفسیر کرد و نیازی به فرض خطی بودن مدل ندارد.

با وجود خواص نظری مطلوب و تعمیم‌های متعدد، ضریب همبستگی جینی در عمل کمتر از اسپیرمن و کندال مورد استفاده قرار می‌گیرد؛ این امر عمدتاً به آشنایی کمتر پژوهشگران با این ضریب و همچنین نامتقارن بودن آن نسبت داده می‌شود. با این حال، در کاربردهایی که تحلیل نامتقارن اهمیت دارد (مانند اقتصادسنجی، تحلیل رگرسیون و مطالعات همگرایی در اقتصاد رشد)، این ضریب می‌تواند ابزاری قدرتمند باشد [۶۳].

۵.۲.۵ ضریب همبستگی بلومکوئیست

بلومکوئیست در سال ۱۹۵۰ معیاری ساده و کارآمد برای اندازه‌گیری وابستگی معرفی کرد [۴]. ایده اصلی این ضریب مبتنی بر تقسیم صفحه $x - y$ به چهار ناحیه با استفاده از خطوط $x = \bar{X}_n$ و $y = \bar{Y}_n$ است، که در آن $\bar{X}_n$ و $\bar{Y}_n$ به ترتیب میانه‌های نمونه‌های $X_1, \dots, X_n$ و $Y_1, \dots, Y_n$ هستند. اگر n_1 را تعداد نقاطی در نظر بگیریم که در ربع پایین-چپ یا بالا-راست قرار دارند (ربع‌های موافق)، و n_2 را

²⁸Blest's Rank Correlation

• اگر $a_{ij} = (n+1-R_i)^{\downarrow} - (n+1-R_j)^{\downarrow}$ و $b_{ij} = S_i - S_j$ ، آنگاه Γ_n به ضریب بلیست (ν_n) تبدیل می‌شود.

این چارچوب یکپارچه نشان می‌دهد که بسیاری از ضرایب همبستگی رتبه‌ای را می‌توان بر اساس یک ساختار کلی بازنمایی کرد. خانواده وزنی معرفی‌شده توسط صنعتگر، دولتی و امینی [۵۵] را نیز می‌توان در این چارچوب با انتخاب توابع وزنی مناسب بازنمایی کرد. این ساختار کلی، مبنای نظری برای تعمیم‌های وزنی ضرایب همبستگی رتبه‌ای قرار گرفته است و امکان طراحی معیارهای جدید با تأکید بر بخش‌های خاصی از رتبه‌ها (مانند رتبه‌های ابتدایی یا انتهایی) را فراهم می‌آورد [۵۵].

۶ ضرایب همبستگی و مفصل

یکی از مهم‌ترین تحولات در نظریه وابستگی، معرفی تابع مفصل^{۲۹} است که امکان جداسازی ساختار وابستگی از توزیع‌های حاشیه‌ای را فراهم می‌آورد.

۱.۶ مفصل

فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی پیوسته با تابع توزیع تجمعی توأم H و توزیع‌های حاشیه‌ای F و G باشند. قضیه اسکالر [۵۸] وجود تابع یکتای C را تضمین می‌کند به طوری که برای همه $x, y \in \mathbb{R}$

$$H(x, y) = C\{F(x), G(y)\}. \quad (۱)$$

تابع C که مفصل (X, Y) نامیده می‌شود، تابع توزیع تجمعی توأم زوج $(U, V) = (F(X), G(Y))$ است که مؤلفه‌های آن بر روی بازه $[0, 1]$ توزیع یکنواخت دارند. مفصل متغیرهای تصادفی مستقل را با $\Pi(u, v) = uv$ نشان می‌دهیم. مفصل‌های M و W (کران‌های بالایی و پایینی فرشه-هوفدینگ) برای هر مفصل دلخواه C در شرط زیر صدق می‌کنند [۳۷، ۴۷]:

$$W(u, v) \leq C(u, v) \leq M(u, v),$$

که $W(u, v) = \max(u + v - 1, 0)$ و $M(u, v) = \min(u, v)$ به ترتیب حد پایین و حد بالای فرشه-هوفدینگ هستند. هر یک از متغیرهای تصادفی X و Y تابعی صعودی (به ترتیب نزولی) از دیگری است اگر و تنها اگر مفصل آنها M (به ترتیب W) باشد. برای تبدیلات

برای بردار تصادفی (X, Y) با تابع توزیع توأم H و توزیع‌های حاشیه‌ای F و G ، نسخه نظری ضریب بلیست به صورت زیر است [۳۱، ۳]:

$$\nu(X, Y) = 2 - 12 \iint_{\mathbb{R}^2} (1 - F(x))^{\downarrow} G(y) dH(x, y).$$

ضریب همبستگی بلیست بر خلاف ضریب اسپیرمن و کندال، نامتقارن است، یعنی $\nu(X, Y) \neq \nu(Y, X)$ ؛ بنابراین یک معیار هماهنگی در نظر گرفته نمی‌شود. این ویژگی در کاربردهایی که یک ترتیب مرجع وجود دارد (مانند مقایسه با یک رتبه‌بندی استاندارد یا ایده‌آل)، مفید است. با این حال، برای آزمون استقلال که نیاز به تقارن دارد، نسخه متقارن‌شده آن توسط جنست و پلانت [۳۱] پیشنهاد شده است:

$$\nu^{(s)}(X, Y) = \frac{\nu(X, Y) + \nu(Y, X)}{2}.$$

ضریب بلیست (حتی در نسخه متقارن) برای اندازه‌گیری وابستگی‌های غیریکنوا مناسب نیست. به عنوان مثال برای $Y = X^2$ که $X \sim U(-1, 1)$ ، نسخه نظری ضریب همبستگی بلیست مقادیر زیر را نشان می‌دهد:

$$\nu(X, Y) = -\frac{1}{4}, \quad \nu(Y, X) = 0, \quad \nu^{(s)} = -\frac{1}{8}.$$

صنعتگر و همکاران [۵۵] با تعمیم ایده بلیست، یک خانواده دو پارامتری از ضریب‌های همبستگی رتبه‌ای وزنی ارائه دادند.

۷.۲.۵ ساختار کلی ضرایب همبستگی ناپارامتری

دانیلز [۱۲] در سال ۱۹۵۰ نشان داد که ضریب‌های اسپیرمن و کندال را می‌توان در یک خانواده کلی قرار داد. او ضریب همبستگی رتبه‌ای عمومی به شکل زیر معرفی کرد:

$$\Gamma_n = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij}^2}},$$

که در آن a_{ij} و b_{ij} توابعی از رتبه‌های (R_i, R_j) و (S_i, S_j) هستند. با انتخاب‌های متفاوت برای این توابع، ضریب‌های مختلفی به دست می‌آید:

• اگر $a_{ij} = \text{sgn}(R_j - R_i)$ و $b_{ij} = \text{sgn}(S_j - S_i)$ ، آنگاه Γ_n به ضریب کندال (τ_n) تبدیل می‌شود.

• اگر $a_{ij} = R_j - R_i$ و $b_{ij} = S_j - S_i$ ، آنگاه Γ_n به ضریب اسپیرمن (r_n) تبدیل می‌شود.

²⁹Copula Function

$(\kappa(\Pi) = 0)$ ؛ تقارن $(\kappa(C^T) = \kappa(C))$ ؛ حفظ ترتیب هماهنگی اگر $C_1 \prec_c C_2$ ، آنگاه $\kappa(C_1) \leq \kappa(C_2)$ ؛ ناوردایی نسبت به تبدیلات یکنوای همجهت $(\kappa(\hat{C}) = \kappa(C))$ ؛ تغییر علامت با تبدیلات یکنوای ناهمجهت $(\kappa(C^*) = \kappa(C^{**}) = -\kappa(C))$ ؛ و پیوستگی (اگر $C_n \rightarrow C$ نقطه‌ای، آنگاه $\kappa(C_n) \rightarrow \kappa(C)$). در این روابط، C^{**} ، C^* و $\hat{C}$ مفصل‌های مرتبط با تبدیلات یکنوا (تعریف شده در روابط ۱۰) هستند و C^T مفصل بردار (Y, X) است.

۴.۶ رده‌ای از معیارهای هماهنگی

مفهوم وابستگی ربعی مثبت (PQD)^{۳۰} توسط لی من [۴۴] معرفی شد. دو متغیر تصادفی X و Y دارای ویژگی PQD هستند اگر:

$$H(x, y) - F(x)G(y) \geq 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

به بیان مفصل، برای همه $(u, v) \in [0, 1]^2$ ، $C(u, v) - uv \geq 0$. مفهوم NQD با نابرابری معکوس تعریف می‌شود. همه ضرایب همبستگی رتبه‌ای برای توزیع‌های PQD مثبت و برای NQD منفی هستند. بهبودیان، دولتی و اوبدا-فلورس [۲] مفهوم میانگین وابستگی ربعی^{۳۱} را به صورت زیر تعریف کردند که اصول اسکارسینی را برآورده می‌کنند:

$$D(C, A) = \iint_{[0, 1]^2} \{C(u, v) - uv\} dA(u, v),$$

که در آن A یک تابع مفصل ثابت است. برای یک ثابت مناسب $\alpha > 0$ (که به مفصل A وابسته است) عبارت $\kappa(C) = \alpha D(C, A)$ یک معیار هماهنگی است اگر و فقط اگر A متقارن $A(u, v) = A(v, u)$ و $A = \Pi$ انتخاب باشد. برای نمونه، انتخاب $A(u, v) = u - A(u, 1 - v)$ (مفصل استقلال) به ضریب همبستگی اسپیرمن منجر می‌شود. اگر $A = (M + W)/2$ (میانگین کران‌های فرشه) را انتخاب کنیم، ضریب همبستگی جینی و با $A = M$ (مفصل حد بالا) ضریب قاعده پا اسپیرمن به دست می‌آید. این چارچوب یکپارچه نشان می‌دهد که بسیاری از معیارهای وابستگی را می‌توان برحسب یک مفهوم مشترک (میانگین وابستگی ربعی) بازنمایی کرد.

۵.۶ مفصل تجربی و ضرایب رتبه‌ای

فرض کنید $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ نمونه‌ای تصادفی از بردار (X, Y) با توزیع‌های حاشیه‌ای F و G و مفصل C باشند. دهیولس [۱۳]

یکنوای f و g ، مفصل $(f(X), g(Y))$ به صورت زیر از مفصل $C_{X,Y}$ حاصل می‌شود [۴۷]:

$$C_{f(X), g(Y)} = \begin{cases} C_{X,Y}, & \text{هر دو صعودی } f, g \\ C_{X,Y}^*, & \text{نزولی } g \text{ صعودی } f \\ C_{X,Y}^{**}, & \text{صعودی } g \text{ نزولی } f \\ \hat{C}_{X,Y}, & \text{هر دو نزولی } f, g \end{cases}$$

که در آن

$$\begin{aligned} C_{X,Y}^*(u, v) &= u - C_{X,Y}(u, 1 - v), \\ C_{X,Y}^{**}(u, v) &= v - C_{X,Y}(1 - u, v), \\ \hat{C}_{X,Y}(u, v) &= u + v - 1 + C_{X,Y}(1 - u, 1 - v). \end{aligned} \quad (10)$$

این ویژگی نشان می‌دهد که تابع مفصل ابزاری ایده‌آل برای مطالعه وابستگی‌هایی است که به مقیاس اندازه‌گیری وابسته نیستند.

۲.۶ بازنمایی مفصلی ضرایب

ضرایب همبستگی ناپارامتری را می‌توان به صورت توابعی از مفصل C بازنویسی کرد [۴۷]:

$$\begin{aligned} \rho_s(C) &= 12 \int_{[0, 1]^2} C(u, v) du dv - 3, \\ \tau(C) &= 4 \int_{[0, 1]^2} C(u, v) dC(u, v) - 1, \\ \gamma(C) &= 2 \int_{[0, 1]^2} (|u + v - 1| - |u - v|) dC(u, v), \\ \beta(C) &= 4C\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) - 1, \\ \phi(C) &= 1 - 3 \iint_{[0, 1]^2} |u - v| dC(u, v), \\ \nu(C) &= 2 - 12 \iint_{[0, 1]^2} (1 - u)^2 v dC(u, v). \end{aligned}$$

۳.۶ نمایش مفصلی اصول اسکارسینی

اصول اسکارسینی [۵۶] را می‌توان بر حسب تابع مفصل صورت‌بندی کرد. بر این اساس، برای متغیرهای تصادفی پیوسته (X, Y) با مفصل C ، یک معیار عددی $\kappa(C)$ یک معیار هماهنگی است اگر ویژگی‌های زیر را برآورده کند: خوش‌تعریفی $\kappa(C)$ برای هر مفصل C تعریف شده باشد؛ دامنه $-1 \leq \kappa(C) \leq 1$ ؛ وابستگی کامل مثبت $(\kappa(M) = 1)$ ؛ وابستگی کامل منفی $(\kappa(W) = -1)$ ؛ استقلال

³⁰Positive Quadrant Dependence

³¹Average Quadrant Dependence (AQD)

«مفصل تجربی» را به صورت زیر تعریف کرد:

$$C_n(u, v) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{I} \left(\frac{R_i}{n+1} \leq u, \frac{S_i}{n+1} \leq v \right), \quad u, v \in [0, 1],$$

که در آن $\mathbf{I}(A)$ تابع نشانگر، و R_i و S_i رتبه‌های X_i و Y_i هستند. استفاده از $n+1$ در مخرج از مشکلات نقاط مرزی جلوگیری می‌کند. مفصل تجربی C_n یک برآوردگر رتبه‌ای برای C است. از آنجا که برای تابع پیوسته $J: (0, 1)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ داریم:

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n J \left(\frac{R_i}{n+1}, \frac{S_i}{n+1} \right) = \int_{[0,1]^2} J(u, v) dC_n(u, v),$$

بسیاری از ضرایب همبستگی رتبه‌ای را می‌توان به صورت انتگرال بر حسب مفصل تجربی نمایش داد. برای نمونه، با انتخاب $J(u, v) = uv$ ، ضریب اسپیرمن به دست می‌آید:

$$r_s = \frac{n+1}{n-1} \left[12 \int_{[0,1]^2} uv dC_n(u, v) - 3 \right].$$

با انتخاب $J(u, v) = \min(u, v)$ ، ضریب قاعده پا، و با انتخاب $J(u, v) = \min(u, v) + \max(0, u + v - 1)$ ، ضریب جینی حاصل می‌شود.

این بازنمایی‌ها درک نظری ضرایب را تسهیل می‌کنند و چارچوبی یکپارچه برای مطالعه رفتار مجانبی آن‌ها فراهم می‌آورند. این دسته از آمارها با عنوان «آماره‌های رتبه‌ای» شناخته می‌شوند. تحت شرایط منظم، $S_n \xrightarrow{P} \mu = \int J dC$ و اگر J مشتقات جزئی پیوسته داشته باشد، آنگاه [۳۰]:

$$\sqrt{n}(S_n - \mu) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2),$$

که σ^2 تابعی از C و مشتقات J است.

نکته ۱. برای آزمون استقلال $(H_0: C = \Pi)$ ، توزیع $\sqrt{n-1}r_s$ تقریباً نرمال استاندارد است. بنابراین در سطح $\alpha = 0.05$ ، فرض استقلال رد می‌شود اگر $|r_s| \geq 1.96/\sqrt{n-1}$.

۷ نتیجه‌گیری و چشم‌انداز بخش دوم

در این مقاله، که قسمت نخست از یک مرور دو قسمتی بر معیارهای وابستگی است، سیر تاریخی و ساختاری مفاهیم بنیادی اندازه‌گیری وابستگی از قرن هجدهم تا شکل‌گیری نظریه مفصل در اواسط قرن بیستم بررسی شد. آغازگاه این مسیر، تعاریف اولیه و شهودی از استقلال و وابستگی بود که توسط ریاضیدانانی چون دموآر، بیز، لاپلاس

و بول ارائه شدند. اگرچه این تعاریف فاقد دقت ریاضی کنونی بودند، اما زمینه‌ساز صورتبندی دقیق استقلال در چارچوب اصل موضوعی کولموگروف شدند.

نقطه عطف تاریخی این حوزه، کارهای تجربی و نظری فرانسیس گالتون در نیمه دوم قرن نوزدهم بود. گالتون با تغییر نگاه از «خطا» به «مطالعه تنوع»، مفهوم همبستگی را به‌عنوان ابزاری برای اندازه‌گیری رابطه بین متغیرها معرفی کرد. فرمول‌بندی ریاضی این ایده توسط کارل پیرسون، که به ضریب همبستگی گشتاوری انجامید، نقطه شروع همبستگی به صورت علمی بود. با این حال، محدودیت‌های این ضریب در تشخیص روابط غیرخطی، حساسیت به نقاط پرت، و وابستگی به توزیع‌های حاشیه‌ای، آماردانان را به جستجوی معیارهای جایگزین سوق داد.

در پاسخ به این محدودیت‌ها، ضرایب همبستگی ناپارامتری مبتنی بر رتبه توسعه یافتند. ضریب اسپیرمن و ضریب کندال به‌عنوان معیارهای هماهنگی، وابستگی یکنوا را بدون نیاز به فرض توزیع خاصی اندازه‌گیری می‌کنند. ضریب جینی با تأکید بر رتبه‌های ابتدایی و انتهای و ضریب بلومکوئیست با سادگی محاسباتی، از دیگر معیارهای این دسته هستند. همچنین ساختار کلی دانیلز نشان داد که بسیاری از این ضرایب را می‌توان در یک چارچوب یکپارچه بازنمایی کرد.

اوج تحولات این دوره، ظهور نظریه مفصل و قضیه اسکالر بود که امکان جداسازی ساختار وابستگی از توزیع‌های حاشیه‌ای را فراهم آورد. این چارچوب نظری، درک عمیق‌تری از معیارهای کلاسیک ارائه داد و مبنایی برای توسعه معیارهای مدرن‌تر در دهه‌های بعدی شد. نمایش مفصلی ضرایب اسپیرمن، کندال، جینی و بلومکوئیست، و همچنین صورتبندی اصول اسکارسینی بر حسب مفصل، نشان‌دهنده قدرت و انعطاف این چارچوب است.

با وجود پیشرفت‌های چشمگیر در معیارهای کلاسیک و چارچوب مفصل، هنوز چالش‌های مهمی در اندازه‌گیری وابستگی وجود دارد. معیارهای معرفی‌شده در این بخش، عمدتاً برای شناسایی روابط یکنوا طراحی شده‌اند و در تشخیص الگوهای غیریکنوا (مانند روابط سهمی، دایره‌ای یا تناوبی) ناتوان هستند. همچنین وابستگی در داده‌های با ابعاد بالا، وابستگی سریالی در سری‌های زمانی، وابستگی دمی و چندکی، و تعمیم‌های چندمتغیره و برداری، از موضوعاتی هستند که با معیارهای کلاسیک قابل بررسی نیستند.

در قسمت دوم این مقاله، به معیارهای دیگری خواهیم پرداخت که برای پاسخ به این چالش‌ها توسعه یافته‌اند. این معیارها شامل معیارهای شدت وابستگی (مانند هوفدینگ و

آماري در پياده‌سازي اين معيارها خواهيم پرداخت.

قدردانی و تشکر

از نظرات ارزشمند داور محترم و سردبیر در مورد کاستی‌های مقاله، تشکر می‌کنم. همچنین از آقای دکتر محمدقاسم وحیدی اصل و آقای دکتر علی دست‌برآورده که نسخه اولیه مقاله را مطالعه کردند و نظرات ارزشمندی ارائه نمودند، تشکر می‌کنم.

شوايتزر-ولف)، معيارهاي وابستگي غيريكنوا (نسبت همبستگي، همبستگي ماكسيمال، همبستگي فاصله‌اي، اطلاع متقابل و معيارهاي واگرايي‌هايي (في)، و معيارهاي مدرن براي داده‌هاي با ابعاد بالا (ضريب اطلاع ماكسيمال و همبستگي گرافي چندمقياسي) هستند. همچنين به وابستگي سريالي و نسخه‌هاي رتبه‌اي آن، وابستگي دمي و چنډكي، تعميم‌هاي چندمتغيره و برداري معيارهاي وابستگي، معيارهاي ويژه براي متغيرهاي گسسته و متغيرهاي آميخته (گسسته - پيوسته)، کاربرد معيارهاي وابستگي در نظريه احتمال، و قابليت‌هاي نرم‌افزارهاي رايج

مراجع

- [1] Bayes, T. (1763). An essay towards solving a problem in the doctrine of chance. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, **53**, 370-418.
- [2] Behboodian, J., Dolati, A., & Úbeda-Flores, M. (2005). Measures of association based on average quadrant dependence. *Journal of Probability and Statistical Sciences*, **3**, 161-173.
- [3] Blest, D. C. (2000). Rank correlation — an alternative measure. *Australian & New Zealand Journal of Statistics*, **42**(1), 101-111.
- [4] Blomqvist, N. (1950). On a measure of dependence between two random variables. *The Annals of Mathematical Statistics*, **21**(4), 593-600.
- [5] Boole, G. (1854). *An Investigation of the Laws of Thought on Which Are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities*. London: Macmillan.
- [6] Box, G. E. P., & Jenkins, G. M. (1970). *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. San Francisco: Holden-Day.
- [7] Bravais, A. (1846). Analyse mathématique sur les probabilités des erreurs de situation d'un point. *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France*, **9**, 255-332.
- [8] Carabelli, A. M. (2021). Keynes's methodology of criticism: Probability and classical economic theory. Logical fallacies: The introduction of the tacit assumptions of homogeneity and independence. In *Keynes's Methodology of Criticism*.
- [9] Casella, G., & Berger, R. L. (2002). *Statistical Inference* (2nd ed.). Belmont, CA: Duxbury Press.
- [10] Cover, T. M., & Thomas, J. A. (2006). *Elements of Information Theory* (2nd ed.). Hoboken, NJ: Wiley.
- [11] Dale, A. I. (2012). *A history of inverse probability: From Thomas Bayes to Karl Pearson*. Springer Science & Business Media.
- [12] Daniels, H. E. (1950). Rank correlation and population models. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, **12**(2), 171-181.

- [13] Deheuvels, P. (1979). La fonction de dépendance empirique et ses propriétés: un test non paramétrique d'indépendance. *Académie Royale de Belgique: Bulletin de la Classe des Sciences*, **65**(5), 274-292.
- [14] de Moivre, A. (1756). *The Doctrine of Chances: Or, a Method of Calculating the Probabilities of Events in Play* (3rd ed.). London: A. Millar.
- [15] de Morgan, A. (1838). *An Essay on Probabilities and Their Application to Life Contingencies and Insurance Offices*. London: Longman.
- [16] Denis, D. J. (2000). The origins of correlation and regression. In *Proceedings of the 61st Annual Convention of the Canadian Psychological Association*. Ottawa.
- [17] Denuit, M., & Dhaene, J. (2003). Simple characterizations of comonotonicity and countermonotonicity by extremal correlations. *Belgian Actuarial Bulletin*, **3**(1), 22-27.
- [18] Edgeworth, F. Y. (1883). The method of least squares. *Philosophical Magazine*, 5th Series, **16**, 360-375.
- [19] Edgeworth, F. Y. (1892). Correlated averages. *Philosophical Magazine*, 5th Series, **34**, 190-204.
- [20] Edgeworth, F. Y. (1893). Note on the calculation of correlation between organs. *Philosophical Magazine*, 5th Series, **36**, 350-351.
- [21] Emerson, W. (1776). *Miscellanies, or a Miscellaneous Treatise: Containing Several Mathematical Subjects*. London: J. Nourse.
- [22] Fisher, R. A. (1915). Frequency distribution of the values of the correlation coefficient in samples from an indefinitely large population. *Biometrika*, **10**(4), 507-521.
- [23] Galton, F. (1885). Regression towards mediocrity in hereditary stature. *Journal of the Anthropological Institute of Great Britain and Ireland*, **15**, 246-263.
- [24] Galton, F. (1886). Family likeness in stature. *Proceedings of the Royal Society of London*, **40**, 42-73.
- [25] Galton, F. (1888). Co-relations and their measurement, chiefly from anthropometric data. *Proceedings of the Royal Society of London*, **45**, 135-145.
- [26] Galton, F. (1889). *Natural Inheritance*. London: Macmillan.
- [27] Galton, F. (1890). Kinship and correlation. *The North American Review*, **150**, 419-431.
- [28] Galton, F. (1908). *Memories of My Life*. London: Methuen.
- [29] Gauss, C. F. (1823). *Theoria Combinationis Observationum Minimis Obnoxiae*. Göttingen: Dieterich.
- [30] Genest, C., Ghouli, K., & Rivest, L.-P. (1995). A semiparametric estimation procedure of dependence parameters in multivariate families of distributions. *Biometrika*, **82**(3), 543-552.
- [31] Genest, C., & Plante, J.-F. (2003). On Blest's measure of rank correlation. *Canadian Journal of Statistics*, **31**(1), 35-52.

- [32] Gini, C. (1914). *L'Ammontare e la Composizione della Ricchezza delle Nazione*. Torino: Bocca.
- [33] Gorroochurn, P. (2016). On Galton's change from "reversion" to "regression". *The American Statistician*, **70**(3), 227-231.
- [34] Hoeffding, W. (1940). Maßstabinvariante Korrelationstheorie. *Schriften des Mathematischen Seminars und des Instituts für Angewandte Mathematik der Universität Berlin*, **5**, 181-233.
- [35] Jevons, W. S. (1874). *The Principles of Science: A Treatise on Logic and Scientific Method*. London: Macmillan.
- [36] Joe, H. (1997). *Multivariate Models and Dependence Concepts*. London: Chapman & Hall.
- [37] Joe, H. (2014). *Dependence Modeling with Copulas*. Boca Raton, FL: CRC Press.
- [38] Kendall, M. G. (1938). A new measure of rank correlation. *Biometrika*, **30**(1-2), 81-93.
- [39] Kendall, M. G. (1970). *Rank Correlation Methods* (4th ed.). London: Griffin.
- [40] Kolmogorov, A. (1933). *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Berlin: Springer.
- [41] Keynes, J. M. (1921). *A Treatise on Probability*. London: Macmillan.
- [42] Laplace, P. S. (1820). *Théorie Analytique des Probabilités*. Paris: Courcier.
- [43] Legendre, A. M. (1805). *Nouvelles Méthodes pour la Détermination des Orbites des Comètes*. Paris: Courcier.
- [44] Lehmann, E. L. (1966). Some concepts of dependence. *The Annals of Mathematical Statistics*, **37**, 1137-1153.
- [45] MacKenzie, D. A. (1981). *Statistics in Britain, 1865-1930: The Social Construction of Scientific Knowledge*. Edinburgh: Edinburgh University Press.
- [46] McNeil, A. J., et al. (2025). Measures and models of non-monotonic dependence. *arXiv preprint*, arXiv:2512.10828.
- [47] Nelsen, R. B. (2006). *An Introduction to Copulas* (2nd ed.). New York: Springer.
- [48] Nelsen, R. B., & Úbeda-Flores, M. (2004). The symmetric footrule is Gini's rank association coefficient. *Communications in Statistics: Theory and Methods*, **33**, 195-196.
- [49] Pearson, K. (1896). Mathematical contributions to the theory of evolution. III. Regression, heredity and panmixia. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A*, **187**, 253-318.
- [50] Pearson, K. (1920). Notes on the history of correlation. *Biometrika*, **13**(1), 25-45.
- [51] Pearson, K. (1930). *The Life, Letters and Labours of Francis Galton*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [52] Piovani, J. I. (2008). The historical construction of correlation as a conceptual and operative instrument for empirical research. *Quality & Quantity*, **42**(6), 757-777.
- [53] Porter, T. M. (1986). *The Rise of Statistical Thinking, 1820-1900*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

- [54] Price, R. (1765). A demonstration of the second rule in Bayes's essay. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, **54**, 310-325.
- [55] Sanatgar, M., Dolati, A., & Amini, M. (2021). A class of weighted rank correlation measures. *Probability and Mathematical Statistics*, **41**(1), 39-54.
- [56] Scarsini, M. (1984). On measures of concordance. *Stochastica*, **8**, 201-218.
- [57] Schweizer, B., & Wolff, E. F. (1981). On nonparametric measures of dependence for random variables. *The Annals of Statistics*, **9**, 879-885.
- [58] Sklar, A. (1959). Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges. *Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris*, **8**, 229-231.
- [59] Spearman, C. (1904). The proof and measurement of association between two things. *American Journal of Psychology*, **15**(1), 72-101.
- [60] Spearman, C. (1906). Footrule for measuring correlation. *British Journal of Psychology*, **2**, 89-108.
- [61] Stigler, S. M. (1986). *The History of Statistics: The Measurement of Uncertainty Before 1900*. Cambridge, MA: Belknap Press.
- [62] Walker, H. M. (1929). *Studies in the History of Statistical Method*. Baltimore, MD: Williams & Wilkins.
- [63] Yitzhaki, S., & Schechtman, E. (2013). *The Gini Methodology: A Primer on a Statistical Methodology*. Springer: New York.
- [64] Yule, G. U. (1897a). On the significance of Bravais' formulae for regression, etc., in the case of skew correlation. *Proceedings of the Royal Society of London*, **60**, 477-489.
- [65] Yule, G. U. (1897b). On the theory of correlation. *Journal of the Royal Statistical Society*, **60**, 812-854.
- [66] Yule, G. U. (1909). The application of the method of correlation to social and economic statistics. *Journal of the Royal Statistical Society*, **72**(4), 721-730.
- [67] Yule, G. U. (1926). Why do we sometimes get nonsense correlations between time-series? A study in sampling and the nature of time-series. *Journal of the Royal Statistical Society*, **89**(1), 1-63.

A Review of Dependence Measures (Part I): History, Concepts, and Classical Measures

Ali Dolati*

Department of Statistics, Faculty of Mathematical Sciences, Yazd University, Yazd, Iran

Dedicated to the pure soul of the late Professor Javad Behboodian, who beautifully embodied the union of science and ethics in statistics and was always a guiding light for his students.

Received: 2026/05/17

Accepted: 2026/08/10

Abstract

Describing the relationship between two or more random variables is a fundamental problem in statistics and probability. This paper, which is organized in two parts, provides a historical and structural review of dependence measures from the 18th century to the present. Part I covers foundational concepts: early definitions of independence and dependence in the works of de Moivre, Bayes, and Laplace; the emergence of correlation in Galton's work and its mathematical formulation by Pearson; the limitations of the product-moment correlation coefficient; and the development of nonparametric rank-based coefficients. The role of copula theory and Sklar's theorem in separating the dependence structure from marginal distributions is also explained. Part II addresses modern measures and generalizations: measures of intensity of dependence, non-monotone dependence and modern measures for high-dimensional data, serial dependence and autocorrelation, tail and quantile dependence, multivariate and vector extensions, measures for discrete and mixed data, applications in probability theory, and implementation in statistical software. This paper serves as a comprehensive resource for researchers in statistics, data mining, and machine learning by providing a review of both classical and modern measures.

Keywords: Correlation, Copula, Information, Monotone dependence, Non-monotone dependence.

Mathematics Subject Classification: 62F15, 62J07.

*Corresponding author, adolati@yazd.ac.ir