

برآورد پارامترهای توزیع لگ-لجستیک تعمیم یافته بتا مارشال-اولکین

ناهید سنجری فارسی پور^{۱*} و زهرا مرادی^۲

^{۱،۲} گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه الزهراء، تهران، ایران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۰۷/۲۷

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۵/۰۴/۱۶

چکیده

در این مقاله یک خانواده جدید از توزیع‌ها به نام خانواده توزیع‌های لگ-لجستیک تعمیم یافته بتا مارشال-اولکین با اضافه کردن سه پارامتر شکل تعریف شده است. این توزیع تعمیمی از برخی توزیع‌های معروف مانند توزیع لگ-لجستیک است. برآورد پارامترهای این مدل با استفاده از روش‌های گشتاوری، ماکسیمم درستنمایی و بیزی ارائه شده و با یکدیگر مقایسه شده است. این مدل به یک مجموعه داده واقعی برازش می‌شود تا انعطاف‌پذیری آن در برازش به داده‌های طول عمر نسبت به برخی توزیع‌های رقیب نشان داده شود. مشخص شد که این مدل، نسبت به مدل‌های رقیب، برازش بهتری به داده‌ها دارد، بنابراین مدل لگ-لجستیک تعمیم یافته بتا مارشال-اولکین می‌تواند به عنوان یک مدل مناسب برای برازش به داده‌های طول عمر در نظر گرفته شود.

واژه‌های کلیدی: برآورد بیزی، برآورد گشتاوری، برآورد ماکسیمم درستنمایی، توزیع مارشال-اولکین، توزیع لگ-لجستیک.
رده‌بندی ریاضی: ۶۲F۱۵، ۶۲F۱۰.

۱ مقدمه

خانواده توزیع‌های تعمیم یافته بتا مارشال-اولکین-جی را معرفی کردند. چاکماکیاپان و همکاران [۶] یک مدل طول عمر جدید به نام توزیع لگ-لجستیک کوماراسوامی مارشال-اولکین را تعریف کردند. این مدل تعمیمی از توزیع‌های مارشال-اولکین [۱۷] لگ-لجستیک [۱۵] و برخی توزیع‌های دیگر است. محمود و محمد [۱۶] یک خانواده از توزیع‌های لگ-لجستیک تعمیم یافته بتا مارشال-اولکین را معرفی کرده و برآورد پارامترهای آن را تحت سانسور فزاینده به دست آوردند. علی‌زاده و همکاران [۲] یک مدل سه پارامتری جدید به نام توزیع لگ-لجستیک فرد مارشال-اولکین-لیندلی را مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها به صورت تجربی ثابت کردند که توزیع پیشنهادی یک مدل بسیار رقابتی با سایر مدل‌های کلاسیک است. در این مقاله نیز یک خانواده جدید از توزیع‌ها تحت عنوان خانواده توزیع‌های لگ-لجستیک تعمیم یافته بتا مارشال-اولکین (BMO-LL) را با اضافه کردن سه پارامتر شکل تعریف می‌کنیم که برخی توزیع‌های شناخته شده در ادبیات آمار مانند توزیع لگ-

اخیرا تلاش‌های زیادی برای تعریف خانواده‌های جدید به منظور تعمیم توزیع‌های معروف و فراهم کردن انعطاف‌پذیری بالا در مدل‌سازی داده‌های آماری صورت گرفته است. در این راستا چندین کلاس با اضافه کردن یک یا چند پارامتر برای تولید توزیع‌های جدید در ادبیات آمار پیشنهاد شده‌اند. برخی از مولدهای شناخته شده عبارتند از: مولد مارشال-اولکین [۱۷]، بتا-جی [۹]، کوماراسوامی-جی [۷]، مک دونالد-جی [۱]، گاما-جی [۲۰] و ایبل-جی [۵] و نیمه لجستیک توانی [۸]. براساس این مولدها توزیع‌های جدیدی معرفی شده و کاربردهای آن‌ها در علوم مختلف مورد بحث و بررسی قرار گرفته است. آلفائر و همکاران [۳] توزیع لگ-لجستیک تعمیم یافته را معرفی کرده و به کاربرد آن در علم بیمه پرداختند. گوی [۱۰] توزیع لگ-لجستیک تعمیم یافته بتا مارشال-اولکین و کاربرد آن در فرآیندهای کوچک‌سازی را مورد بحث قرار داده است. هندیک و چاکرابورتی [۱۱]

لجستیک را تعمیم می‌دهد.

است. اگر $f(x)$ تابع چگالی احتمال متناظر با $F(x)$ باشد، آنگاه

$$f(x) = \frac{\theta g(x)}{[\theta + (1-\theta)G(x)]^2}, -\infty < x < \infty, \theta > 0. \quad (۴)$$

به عنوان مثال اگر $x > 0$, $G(x; \lambda) = 1 - e^{-\lambda x}$, در این صورت توزیع دو پارامتری جدید به صورت زیر خواهد بود $(\theta, \lambda > 0)$,

$$\begin{aligned} F(x; \theta, \lambda) &= \frac{G(x)}{\theta + (1-\theta)G(x)} = \frac{1 - e^{-\lambda x}}{\theta + (1-\theta)(1 - e^{-\lambda x})} \\ &= \frac{1 - e^{-\lambda x}}{\theta + 1 - e^{-\lambda x} - \theta + \theta e^{-\lambda x}} = \frac{e^{\lambda x} - 1}{e^{\lambda x} - 1 + \theta} \\ &= \frac{e^{\lambda x} - 1 + \theta - \theta}{e^{\lambda x} - 1 + \theta} = 1 - \frac{\theta}{e^{\lambda x} - 1 + \theta}, x > 0. \end{aligned}$$

که در آن اگر $\theta = 1$ معادل با توزیع نمایی است. بنابراین توزیع به دست آمده تعمیمی از توزیع نمایی است.

الزاتره و همکاران [۴] یک روش برای ساخت خانواده جدید از توزیع‌ها ارائه داده است که به خانواده توزیع‌های T-X معروف شده است. برای توضیح، فرض کنید $r(t)$ تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی T در بازه $[d, e]$ برای $-\infty \leq d < e \leq \infty$ باشد. همچنین فرض کنید $W[G(x)]$ تابعی از تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی X باشد به طوری که در شرایط زیر صدق کند،

$$\text{الف. } W[G(x)] \in [d, e]$$

ب. $W[G(x)]$ تابعی مشتق‌پذیر و یکنوا غیرنزولی باشد.

ج. اگر $x \rightarrow -\infty$ آنگاه $W[G(x)] \rightarrow d$ و اگر $x \rightarrow \infty$ آنگاه $W[G(x)] \rightarrow e$

تحت شرایط فوق، تابع توزیع تجمعی خانواده توزیع‌های T-X به صورت زیر معرفی می‌شود،

$$F(x) = \int_d^{W[G(x)]} r(t) dt, \quad (۵)$$

تابع چگالی احتمال متناظر با تابع توزیع داده شده در رابطه (۵) به صورت زیر است،

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x) = \left\{ \frac{d}{dx} W[G(x)] \right\} r\{W[G(x)]\}. \quad (۶)$$

اگر در رابطه (۵) قرار دهیم $d = 0$ و $W[G(x)] = -\log[1 - G(x)]$ در این صورت رابطه (۵) به صورت زیر تبدیل می‌شود،

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^{W[G(x)]} r(t) dt = \int_0^{-\log[1-G(x)]} r(t) dt \\ &= R(t) \Big|_0^{-\log[1-G(x)]} = R(-\log[1-G(x)]) - R(0) \\ &= R(-\log[1-G(x)]), \quad x > 0, \end{aligned} \quad (۷)$$

پس از مقدمه مطرح شده، در بخش دوم به نحوه ساخت توزیع BMO-LL می‌پردازیم. در این بخش نحوه ساخت این توزیع به سه روش شرح داده می‌شود. بخش سوم به برآورد پارامترهای توزیع BMO-LL اختصاص داده شده است. در این بخش برآورد گشتاوری، ماکسیمم درستنمایی و بیزی پارامترهای توزیع BMO-LL را به دست می‌آوریم. در روش بیزی از ۱۳ تابع زیان مختلف استفاده می‌کنیم و سپس برآوردگرهای بیزی به دست آمده را با یکدیگر و با برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی و گشتاوری مقایسه می‌کنیم. در بخش چهارم نیکویی برازش این مدل را به داده‌های واقعی مورد بررسی قرار می‌دهیم. در این بخش چند مدل خاص در خانواده جدید را به یک مجموعه داده واقعی برازش می‌دهیم تا انعطاف‌پذیری این توزیع را در برازش به داده‌های طول عمر نشان دهیم.

۲ توابع توزیع و چگالی لگ-لجستیک تعمیم‌یافته بتا مارشال-اولکین

هدف اصلی این بخش به دست آوردن تابع توزیع و چگالی لگ-لجستیک تعمیم‌یافته بتا مارشال-اولکین است، اما قبل از آن نکات و تعاریفی مقدماتی ذکر می‌شود.

توزیع لگ-لجستیک، توزیع احتمال یک متغیر تصادفی است که لگاریتم آن دارای توزیع-لجستیک است. تابع توزیع تجمعی و تابع چگالی لگ-لجستیک (LL) با پارامترهای α و β به ترتیب به صورت زیر معرفی می‌شوند،

$$G(x) = \frac{x^\beta}{\alpha^\beta + x^\beta}, x > 0, \alpha, \beta > 0, \quad (۱)$$

$$g(x) = \frac{\alpha^\beta \beta x^{\beta-1}}{(\alpha^\beta + x^\beta)^2}, x > 0, \alpha, \beta > 0. \quad (۲)$$

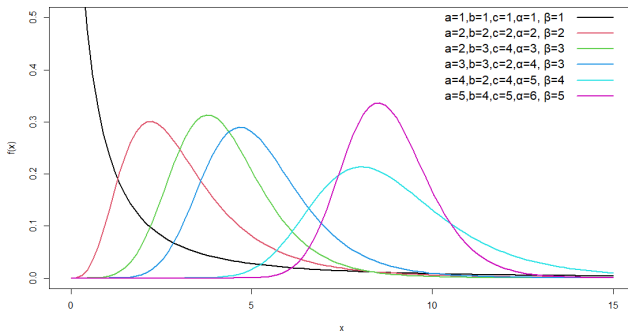
مارشال و اولکین [۱۷] روش جدیدی برای اضافه کردن یک پارامتر به خانواده‌ای از توزیع‌ها معرفی کردند. اگر $G(x)$ نشان‌دهنده تابع توزیع یک متغیر تصادفی پیوسته مانند X باشد، آنگاه روش معمول اضافه کردن یک پارامتر جدید، منجر به تابع توزیع دیگری مانند $F(x)$ می‌شود که به صورت زیر است،

$$F(x) = \frac{G(x)}{\theta + (1-\theta)G(x)}, -\infty < x < \infty, \theta > 0. \quad (۳)$$

تابع توزیع معرفی شده در رابطه (۳) به توزیع مارشال-اولکین معروف

حاصل می‌شود،

$$f(x; a, b, c, \alpha, \beta) = \frac{\partial}{\partial x} F(x; a, b, c, \alpha, \beta) \\ = \frac{\beta c^b \alpha^{b\beta} x^{a\beta-1}}{B(a, b) (c\alpha^\beta + x^\beta)^{a+b}}, \quad x > 0. \quad (12)$$



شکل ۱. تابع چگالی BMO-LL به ازای برخی مقادیر پارامترها

جدول ۱. چند حالت خاص از پارامترهای توزیع BMO-LL و توزیع

حاصل به ازای این مقادیر از پارامترها					
β	α	c	b	a	توزیع حاصل
—	—	۱	—	—	بتا لگ-لجستیک [۱۴]
—	—	۱	—	۱	سینگ-مدالا [۱۳]
—	—	۱	۱	—	داگوم [۱۲]
—	—	۱	۱	۱	لگ-لجستیک [۱۵]

به طریق مشابه می‌توان چگالی BMO-LL را با استفاده از رابطه (۱۰) نیز به دست آورد. کافیت در رابطه (۱۰)، $G(x)$ و $g(x)$ داده شده در روابط (۱) و (۲) را قرار دهیم. یک روش دیگر نیز استفاده از رابطه (۶) است. کافیت در رابطه (۶) قرار دهیم،

$$W[G(x)] = \frac{G(x)}{c + (1-c)G(x)}, \\ r(t) = \frac{1}{B(a, b)} t^{a-1} (1-t)^{b-1}, \\ G(x) = \frac{x^\beta}{\alpha^\beta + x^\beta}.$$

هر سه روش منجر به نتیجه داده شده در رابطه (۱۲) می‌شوند. منحنی این چگالی به ازای مقادیر مختلف پارامترها در شکل ۱ رسم شده است. اگر $a = b = c = 1$ چگالی BMO-LL به چگالی لگ-لجستیک تبدیل می‌شود. تابع چگالی BMO-LL امکان انعطاف‌پذیری بیشتری را برای دماهای توزیع فراهم می‌کند و می‌تواند به طور گسترده‌ای در بسیاری از زمینه‌ها اعمال شود. این خانواده جدید، چندین توزیع در

که در آن $R(t)$ تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی T است. با توجه به رابطه (۶) تابع چگالی این متغیر تصادفی به شکل زیر خواهد بود،

$$f(x) = \frac{g(x)}{1-G(x)} r(-\log[1-G(x)]). \quad (8)$$

یک حالت خاص این توزیع، T-X، در نظر گرفتن $W[G(x)] = \frac{1}{B(a, b)} t^{a-1} (1-t)^{b-1}$ و $\frac{G(x)}{c+(1-c)G(x)}$ در رابطه (۵) است که منجر به تولید یک خانواده از توزیع‌ها تحت عنوان خانواده توزیع‌های بتا مارشال-اولکین (BMO) می‌شود. با فرض $0 < t < 1$ و $a, b, c > 0$ ، تابع توزیع تجمعی این توزیع به صورت زیر به دست می‌آید،

$$F(x) = I_{\frac{G(x)}{c+(1-c)G(x)}}(a, b), \quad (9)$$

که در آن $I_x(a, b) = B(a, b)^{-1} \int_0^x t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt$ نسبت تابع بتای ناقص است. همچنین $G(x)$ تابع توزیع تجمعی پایه است. $a, b, c > 0$ نیز سه پارامتر شکل هستند. تابع چگالی متناظر با تابع توزیع داده شده در رابطه (۹) به صورت زیر است،

$$f(x) = \frac{c^b g(x) G(x)^{a-1} \overline{G}(x)^{b-1}}{B(a, b) [c + (1-c)G(x)]^{a+b}}, \quad (10)$$

که در آن $g(x)$ تابع چگالی پایه است. رابطه (۱۰) زمانی کاربردی‌تر است که $G(x)$ و $g(x)$ عبارات تحلیلی ساده‌ای داشته باشند. با در نظر گرفتن توزیع لگ-لجستیک با تابع توزیع و تابع چگالی داده شده در روابط (۱) و (۲) به عنوان توزیع پایه در رابطه (۹)، توزیع لگ-لجستیک تعمیم‌یافته بتا مارشال-اولکین یا به اختصار BMO-LL به دست می‌آید. ابتدا توجه می‌کنیم که با $G(x)$ داده شده در رابطه (۱) داریم،

$$\frac{G(x)}{c + (1-c)G(x)} = \frac{\frac{x^\beta}{\alpha^\beta + x^\beta}}{c + (1-c)\frac{x^\beta}{\alpha^\beta + x^\beta}} \\ = \frac{\frac{x^\beta}{\alpha^\beta + x^\beta}}{\frac{c(\alpha^\beta + x^\beta) + (1-c)x^\beta}{\alpha^\beta + x^\beta}} = \frac{x^\beta}{c\alpha^\beta + x^\beta},$$

در نتیجه با استفاده از رابطه (۹)، تابع توزیع لگ-لجستیک تعمیم‌یافته بتا مارشال-اولکین به صورت زیر است،

$$F(x; a, b, c, \alpha, \beta) = I_{\frac{G(x)}{c+(1-c)G(x)}}(a, b) = I_{\frac{x^\beta}{c\alpha^\beta + x^\beta}}(a, b) \\ = \frac{1}{B(a, b)} \int_0^{\frac{x^\beta}{c\alpha^\beta + x^\beta}} t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt, \quad (11)$$

که یک توزیع پنج پارامتری است. با مشتق‌گیری از عبارت فوق، تابع چگالی لگ-لجستیک تعمیم‌یافته بتا مارشال-اولکین (BMO-LL)

ادبیات آمار را تعمیم می دهد. برخی از این موارد در جدول ۱ ارائه شده است. زیر است.

$$L = \prod_{i=1}^n \frac{\beta c^b \alpha^{b\beta}}{B(a, b)} \frac{x_i^{a\beta-1}}{(c\alpha^\beta + x_i^\beta)^{a+b}} \\ = \frac{\beta^n c^{nb} \alpha^{nb\beta}}{[B(a, b)]^n} \frac{e^{(a\beta-1) \sum_{i=1}^n \log x_i}}{\prod_{i=1}^n (c\alpha^\beta + x_i^\beta)^{a+b}},$$

در نتیجه لگاریتم تابع درستنمایی به صورت زیر است،

$$\log L = n \log \beta + nb \log c + nb\beta \log \alpha - n \log[B(a, b)] \\ + (a\beta - 1) \sum_{i=1}^n \log x_i - (a+b) \sum_{i=1}^n \log (c\alpha^\beta + x_i^\beta), \quad (15)$$

با مشتقگیری از رابطه (۱۵) نسبت به پارامترها به معادلات زیر می رسیم. برآورد ماکسیم درستنمایی پارامترها با حل این معادلات به دست می آید که حل آن ها به روش های عددی امکان پذیر است،

$$\frac{\partial \log L}{\partial a} = -\frac{n \frac{\partial}{\partial a} B(a, b)}{B(a, b)} + \beta \sum_{i=1}^n \log x_i \\ - \sum_{i=1}^n \log (c\alpha^\beta + x_i^\beta) = 0, \\ \frac{\partial \log L}{\partial b} = n \log c + n\beta \log \alpha - \frac{n \frac{\partial}{\partial b} B(a, b)}{B(a, b)} \\ - \sum_{i=1}^n \log (c\alpha^\beta + x_i^\beta) = 0, \\ \frac{\partial \log L}{\partial c} = \frac{nb}{c} - (a+b) \sum_{i=1}^n \frac{\alpha^\beta}{c\alpha^\beta + x_i^\beta} = 0, \\ \frac{\partial \log L}{\partial \alpha} = \frac{nb\beta}{\alpha} - (a+b) \sum_{i=1}^n \frac{c\beta \alpha^{b\beta-1}}{c\alpha^\beta + x_i^\beta} = 0, \\ \frac{\partial \log L}{\partial \beta} = \frac{n}{\beta} + nb \log \alpha + a \sum_{i=1}^n \log x_i \\ - (a+b) \sum_{i=1}^n \frac{c\alpha^\beta \log \alpha + x_i^\beta \log x_i}{c\alpha^\beta + x_i^\beta} = 0. \quad (16)$$

در زیر بخش (۳۴) برای داده های واقعی برآورد ماکسیم درستنمایی پارامترهای توزیع BMO-LL را به دست می آوریم.

۳.۳ روش بیزی

فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ نمونه ای از توزیع BMO-LL با پارامترهای (a, b, c, α, β) باشد. با فرض معلوم بودن a, b, c, α ، برآورد بیزی پارامتر β تحت توابع زیان مختلف ارائه می شود. اگر $x = (x_1, \dots, x_n)$ نمونه مشاهده شده باشد، توزیع توام

خانواده BMO-LL به راحتی با وارون کردن رابطه (۱۱) شبیه سازی می شود. اگر V یک متغیر تصادفی با توزیع بتا با پارامترهای $a, b > 0$ باشد، آنگاه

$$\left(\frac{c\alpha^\beta V}{1-V} \right)^{1/\beta} \sim BMO-LL(a, b, c, \alpha, \beta). \quad (13)$$

با استفاده از این رابطه می توان توزیع BMO-LL را با استفاده از توزیع بتا شبیه سازی کرد.

۳ برآورد پارامترها

در این بخش برآورد پارامترهای توزیع BMO-LL به روش گشتاوری، ماکسیم درستنمایی و بیزی محاسبه می شود. در این بخش فرض می شود $X_1, \dots, X_n$ نمونه ای تصادفی از توزیع BMO-LL با پارامترهای (a, b, c, α, β) است که در آن $x_1, \dots, x_n$ مقادیر مشاهده شده ای نمونه $X_1, \dots, X_n$ است. با استفاده از این نمونه، پارامترهای توزیع BMO-LL به روش های مختلف برآورد می شوند.

۱۰.۳ روش گشتاوری

گشتاور مرتبه r از توزیع BMO-LL به صورت زیر است،

$$\mu_r' = E(X^r) = \frac{\beta c^b \alpha^{b\beta}}{B(a, b)} \int_0^\infty \frac{x^{r+a\beta-1}}{(c\alpha^\beta + x^\beta)^{a+b}} dx.$$

با فرض همگرایی انتگرال، چون توزیع دارای پنج پارامتر است، بنابراین نیاز به پنج معادله گشتاوری داریم. این معادلات به صورت زیر هستند،

$$\mu_j' = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^j, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5. \quad (14)$$

با معلوم بودن نمونه ها، می توان این پنج معادله را تشکیل داده و به صورت عددی حل کرد. در زیر بخش (۳۴) برای داده های واقعی معادلات (۱۴) را تشکیل داده و حل می کنیم.

۲۰.۳ روش ماکسیم درستنمایی

فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ نمونه ای تصادفی از توزیع BMO-LL با پارامترهای (a, b, c, α, β) باشد. تابع درستنمایی این نمونه به صورت

نمونه به صورت زیر است،

$$f(\mathbf{x}|\beta) \propto \prod_{i=1}^n \beta \alpha_i^{b_*\beta} \frac{x_i^{a_*\beta-1}}{(c_*\alpha_i^\beta + x_i^\beta)^{a_*+b_*}} I_{(\cdot, +\infty)}(\beta) \\ = \beta^n \alpha_*^{nb_*\beta} I_{(\cdot, +\infty)}(\beta) \prod_{i=1}^n \frac{x_i^{a_*\beta-1}}{(c_*\alpha_i^\beta + x_i^\beta)^{a_*+b_*}}.$$

با توجه به اینکه $\beta > 0$ ، یک توزیع پیشین مناسب برای β ، توزیع گاما است،

$$\pi(\beta) \propto \beta^{a-1} e^{-b\beta} I_{(\cdot, +\infty)}(\beta); \quad a > 0, \quad b > 0,$$

با این توزیع پیشین، توزیع پسین عبارتست از،

$$\pi(\beta|\mathbf{x}) = C \beta^{n+a-1} e^{-\beta(b-nb_*\log \alpha_*)} \left(\prod_{i=1}^n \frac{x_i^{a_*\beta-1}}{(c_*\alpha_i^\beta + x_i^\beta)^{a_*+b_*}} \right),$$

که در آن

$$C = \frac{1}{\int_0^{+\infty} \beta^{n+a-1} e^{-\beta(b-nb_*\log \alpha_*)} \left(\prod_{i=1}^n \frac{x_i^{a_*\beta-1}}{(c_*\alpha_i^\beta + x_i^\beta)^{a_*+b_*}} \right) d\beta}.$$

اکنون اگر تابع زیان توان دوم خطا $L(\beta, \delta) = (\delta - \beta)^2$ را در نظر بگیریم، برآورد بیز پارامتر β به صورت زیر است،

$$\delta_1(\mathbf{x}) = \frac{\int_0^{+\infty} \beta^{n+a} e^{-\beta(b-nb_*\log \alpha_*)} \left(\prod_{i=1}^n \frac{x_i^{a_*\beta-1}}{(c_*\alpha_i^\beta + x_i^\beta)^{a_*+b_*}} \right) d\beta}{\int_0^{+\infty} \beta^{n+a-1} e^{-\beta(b-nb_*\log \alpha_*)} \left(\prod_{i=1}^n \frac{x_i^{a_*\beta-1}}{(c_*\alpha_i^\beta + x_i^\beta)^{a_*+b_*}} \right) d\beta} \quad (17)$$

اگر تابع زیان توان دوم خطای وزنی $L(\beta, \delta) = w(\beta)(\delta - \beta)^2$ را در نظر بگیریم، آنگاه برآورد بیز پارامتر β به شکل زیر است،

$$\delta_2(\mathbf{x}) = \frac{\int_0^{+\infty} w(\beta) \beta^{n+a} e^{-\beta(b-nb_*\log \alpha_*)} \left(\prod_{i=1}^n \frac{x_i^{a_*\beta-1}}{(c_*\alpha_i^\beta + x_i^\beta)^{a_*+b_*}} \right) d\beta}{\int_0^{+\infty} w(\beta) \beta^{n+a-1} e^{-\beta(b-nb_*\log \alpha_*)} \left(\prod_{i=1}^n \frac{x_i^{a_*\beta-1}}{(c_*\alpha_i^\beta + x_i^\beta)^{a_*+b_*}} \right) d\beta}$$

اگر تابع زیان قدرمطلق خطا $L(\beta, \delta) = |\delta - \beta|$ را در نظر بگیریم آنگاه برآورد بیز در معادله $\int_{-\infty}^{\delta_2(\mathbf{x})} \pi(\beta|\mathbf{x}) d\beta = \frac{1}{2}$ صدق می‌کند که می‌توان آن را صورت زیر بازنویسی کرد، برآورد بیز از طریق حل این معادله حاصل می‌شود،

$$\frac{\int_0^{\delta_2(\mathbf{x})} \beta^{n+a-1} e^{-\beta(b-nb_*\log \alpha_*)} \left(\prod_{i=1}^n \frac{x_i^{a_*\beta-1}}{(c_*\alpha_i^\beta + x_i^\beta)^{a_*+b_*}} \right) d\beta}{\int_0^{+\infty} \beta^{n+a-1} e^{-\beta(b-nb_*\log \alpha_*)} \left(\prod_{i=1}^n \frac{x_i^{a_*\beta-1}}{(c_*\alpha_i^\beta + x_i^\beta)^{a_*+b_*}} \right) d\beta} = \frac{1}{2}.$$

اگر تابع زیان لاینکس $L(\beta, \delta) = e^{c(\delta-\beta)} - c(\delta - \beta) - 1$ را در نظر بگیریم، که در آن $c \neq 0$ مقدار معلومی است، برآورد بیز پارامتر β به صورت زیر است،

$$\delta_3(\mathbf{x}) = -\frac{1}{c} \log \frac{\int_0^{+\infty} e^{-c\beta} \beta^{n+a-1} e^{-\beta(b-nb_*\log \alpha_*)} \left(\prod_{i=1}^n \frac{x_i^{a_*\beta-1}}{(c_*\alpha_i^\beta + x_i^\beta)^{a_*+b_*}} \right) d\beta}{\int_0^{+\infty} \beta^{n+a-1} e^{-\beta(b-nb_*\log \alpha_*)} \left(\prod_{i=1}^n \frac{x_i^{a_*\beta-1}}{(c_*\alpha_i^\beta + x_i^\beta)^{a_*+b_*}} \right) d\beta}.$$

اگر تابع زیان قدرمطلق خطای وزنی $L(\beta, \delta) = \left| \frac{\delta}{\beta} - 1 \right|$ را در نظر بگیریم، آنگاه برآورد بیز در معادله زیر صدق می‌کند،

$$\int_{-\infty}^{\delta_2(\mathbf{x})} \frac{1}{\beta} \pi(\beta|\mathbf{x}) d\beta = \int_{\delta_2(\mathbf{x})}^{\infty} \frac{1}{\beta} \pi(\beta|\mathbf{x}) d\beta,$$

که می‌توان آن را به شکل زیر بازنویسی کرد،

$$\frac{\int_0^{\delta_2(\mathbf{x})} \beta^{n+a-2} e^{-\beta(b-nb_*\log \alpha_*)} \left(\prod_{i=1}^n \frac{x_i^{a_*\beta-1}}{(c_*\alpha_i^\beta + x_i^\beta)^{a_*+b_*}} \right) d\beta}{\int_0^{\infty} \beta^{n+a-2} e^{-\beta(b-nb_*\log \alpha_*)} \left(\prod_{i=1}^n \frac{x_i^{a_*\beta-1}}{(c_*\alpha_i^\beta + x_i^\beta)^{a_*+b_*}} \right) d\beta} = 1.$$

اگر تابع زیان دیگروت $L(\beta, \delta) = \left(\frac{\delta}{\beta} - 1 \right)^2 = \frac{1}{\beta^2} (\delta - \beta)^2$ را در نظر بگیریم، آنگاه این تابع زیان همان تابع زیان مربع خطای وزنی با $w(\beta) = \frac{1}{\beta^2}$ است. پس می‌توان از نتایج به دست آمده برای تابع زیان مربع خطای وزنی با وزن $w(\beta) = \frac{1}{\beta^2}$ استفاده کرد. بنابراین با این تابع زیان برآورد بیز پارامتر β به صورت زیر است،

$$\delta_4(\mathbf{x}) = \frac{\int_0^{+\infty} \beta^{n+a-2} e^{-\beta(b-nb_*\log \alpha_*)} \left(\prod_{i=1}^n \frac{x_i^{a_*\beta-1}}{(c_*\alpha_i^\beta + x_i^\beta)^{a_*+b_*}} \right) d\beta}{\int_0^{+\infty} \beta^{n+a-2} e^{-\beta(b-nb_*\log \alpha_*)} \left(\prod_{i=1}^n \frac{x_i^{a_*\beta-1}}{(c_*\alpha_i^\beta + x_i^\beta)^{a_*+b_*}} \right) d\beta}.$$

اگر تابع زیان $L(\beta, \delta) = \left(\frac{\beta}{\delta} - 1 \right)^2 = \frac{1}{\delta^2} (\delta - \beta)^2$ را در نظر بگیریم، آنگاه برآورد بیز پارامتر β به شکل زیر است،

$$\delta_5(\mathbf{x}) = \frac{\int_0^{+\infty} \beta^{n+a+1} e^{-\beta(b-nb_*\log \alpha_*)} \left(\prod_{i=1}^n \frac{x_i^{a_*\beta-1}}{(c_*\alpha_i^\beta + x_i^\beta)^{a_*+b_*}} \right) d\beta}{\int_0^{+\infty} \beta^{n+a} e^{-\beta(b-nb_*\log \alpha_*)} \left(\prod_{i=1}^n \frac{x_i^{a_*\beta-1}}{(c_*\alpha_i^\beta + x_i^\beta)^{a_*+b_*}} \right) d\beta}.$$

اگر تابع زیان آنتروپی $L(\beta, \delta) = \frac{\delta}{\beta} - \log \frac{\delta}{\beta} - 1$ را در نظر بگیریم، آنگاه برآورد بیز پارامتر β به شکل زیر است،

$$\delta_6(\mathbf{x}) = \frac{\int_0^{+\infty} \beta^{n+a-1} e^{-\beta(b-nb_*\log \alpha_*)} \left(\prod_{i=1}^n \frac{x_i^{a_*\beta-1}}{(c_*\alpha_i^\beta + x_i^\beta)^{a_*+b_*}} \right) d\beta}{\int_0^{+\infty} \beta^{n+a-2} e^{-\beta(b-nb_*\log \alpha_*)} \left(\prod_{i=1}^n \frac{x_i^{a_*\beta-1}}{(c_*\alpha_i^\beta + x_i^\beta)^{a_*+b_*}} \right) d\beta}.$$

اگر تابع زیان اشتاین $L(\beta, \delta) = \frac{\beta}{\delta} - \log \frac{\beta}{\delta} - 1$ را در نظر بگیریم، آنگاه برآورد بیز پارامتر β به شکل زیر است،

$$\delta_7(\mathbf{x}) = \frac{\int_0^{+\infty} \beta^{n+a} e^{-\beta(b-nb_*\log \alpha_*)} \left(\prod_{i=1}^n \frac{x_i^{a_*\beta-1}}{(c_*\alpha_i^\beta + x_i^\beta)^{a_*+b_*}} \right) d\beta}{\int_0^{+\infty} \beta^{n+a-1} e^{-\beta(b-nb_*\log \alpha_*)} \left(\prod_{i=1}^n \frac{x_i^{a_*\beta-1}}{(c_*\alpha_i^\beta + x_i^\beta)^{a_*+b_*}} \right) d\beta}.$$

با فرض اینکه توزیع داده‌ها BMO-LL باشد، برای پیدا کردن برآورد گشتاوری پارامترهای توزیع، لازم است معادلات (۱۴) را تشکیل داده و حل کنیم. با استفاده از مقادیر پنج گشتاور اول نمونه و قرار دادن آن‌ها در رابطه (۱۴) پنج معادله‌ی پنج مجهولی حاصل می‌شود که برای حل این معادلات از تابع $multiroot()$ در R استفاده کردیم و برآورد گشتاوری پارامترها به صورت $\hat{a} = 42.08$, $\hat{b} = 71.38$, $\hat{c} = 18.54$, $\hat{\alpha} = 4.93$, $\hat{\beta} = 0.98$ به دست آمد.

برای پیدا کردن برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترهای توزیع BMO-LL، نتیجه استفاده از تابع $maxLik()$ در جدول ۲ آورده شده است. مشاهده می‌کنیم که تمام پارامترهای مدل معنی‌دار هستند. با استفاده از برآوردهای به دست آمده و همچنین خطای استاندارد برآوردها، به راحتی می‌توان برای تمام پارامترهای مدل فاصله اطمینان ساخت.

جدول ۲. برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترهای توزیع BMO-LL به همراه خطای استاندارد برآورد و آزمون صفر بودن پارامترها

پارامتر	برآورد	خطای استاندارد	آماره آزمون t	$P - value$
a	۴۳.۹۷۶۸	۱.۰۷۴۹	۴۰.۹۱۳	< 0.001
b	۷۲.۵۷۷۱	۰.۴۷۴۴	۱۵۲.۹۸۴	< 0.001
c	۱۷.۸۹۶۶	۲.۰۰۰۱	۸.۹۴۸	< 0.001
α	۵.۱۷۵۳	۰.۷۲۱۸	۷.۱۷۰	< 0.001
β	۰.۹۴۸۵	۰.۰۷۰۶	۱۳.۴۳۴	< 0.001

برای بدست آوردن برآورد بیز پارامتر β ، تحت تابع زیان مربع خطا، مقدار دو انتگرال موجود در رابطه‌ی (۱۷) را به ازای $a_0 = 44$, $b_0 = 7$, $c_0 = 18$, $\alpha_0 = 5$, $\beta_0 = 3$ و $a_0 = 44$, $b_0 = 73$, $c_0 = 18$, $\alpha_0 = 5$, $\beta_0 = 3$ (تقریب برآورد ماکسیمم درستنمایی این پارامترها)، مقادیر مختلف برای a , b (پارامترهای توزیع پیشین) با استفاده از تابع $integrate()$ در نرم افزار R محاسبه کرده‌ایم. این مقادیر در جدول ۳ ارائه شده است. با روندی مشابه می‌توان برآورد بیز پارامتر β در توزیع BMO-LL را با سایر توابع زیانی که مطرح شد به دست آورد. نتایج در جداول ۴ الی ۱۵ داده شده است. در شکل ۲ منحنی مخاطره برآوردهای مختلف بیزی برای پارامتر β رسم شده است. با توجه به این شکل مشخص می‌شود که برای β ‌های بزرگتر از یک، برآوردگر بیز با تابع زیان لاینکس دارای مخاطره کوچک‌تری نسبت به سایر توابع زیان است و در نتیجه برآوردگر بیز با تابع زیان لاینکس بهترین برآوردگر در بین برآوردهای بیزی پارامتر β برای مجموعه داده‌های پلاسما است.

اگر تابع زیان $L(\beta, \delta) = \frac{\beta}{\delta} - \log \frac{\beta}{\delta} - 1$ را در نظر بگیریم، آنگاه برآورد بیز پارامتر β به شکل زیر است،

$$\delta_{10}(x) = \frac{\int_0^{+\infty} \beta^{n+a} e^{-\beta(b-nb \log \alpha_0)} \left(\prod_{i=1}^n \frac{x_i^{a_i \beta - 1}}{(c_i \alpha_i^\beta + x_i^\beta)^{a_i + b_0}} \right) d\beta}{\int_0^{+\infty} \beta^{n+a-1} e^{-\beta(b-nb \log \alpha_0)} \left(\prod_{i=1}^n \frac{x_i^{a_i \beta - 1}}{(c_i \alpha_i^\beta + x_i^\beta)^{a_i + b_0}} \right) d\beta}$$

اگر تابع زیان مربع خطا در لگاریتم $L(\beta, \delta) = (\log \delta - \log \beta)^2$ را در نظر بگیریم، آنگاه برآورد بیز پارامتر β به شکل زیر است،

$$\delta_{11}(x) = \exp \left[\frac{\int_0^{+\infty} \log \beta \beta^{n+a-1} e^{-\beta(b-nb \log \alpha_0)} \left(\prod_{i=1}^n \frac{x_i^{a_i \beta - 1}}{(c_i \alpha_i^\beta + x_i^\beta)^{a_i + b_0}} \right) d\beta}{\int_0^{+\infty} \beta^{n+a-1} e^{-\beta(b-nb \log \alpha_0)} \left(\prod_{i=1}^n \frac{x_i^{a_i \beta - 1}}{(c_i \alpha_i^\beta + x_i^\beta)^{a_i + b_0}} \right) d\beta} \right]$$

اگر تابع زیان آنتروپی تعمیم یافته زیر را در نظر بگیریم:

$$L(\beta, \delta) = \left(\frac{\delta}{\beta} \right)^q - q \log \frac{\delta}{\beta} - 1, q \geq 1,$$

آنگاه برآورد بیز پارامتر β به شکل زیر است،

$$\delta_{12}(x) = \left[\frac{\int_0^{+\infty} \beta^{n+a-q-1} e^{-\beta(b-nb \log \alpha_0)} \left(\prod_{i=1}^n \frac{x_i^{a_i \beta - 1}}{(c_i \alpha_i^\beta + x_i^\beta)^{a_i + b_0}} \right) d\beta}{\int_0^{+\infty} \beta^{n+a-1} e^{-\beta(b-nb \log \alpha_0)} \left(\prod_{i=1}^n \frac{x_i^{a_i \beta - 1}}{(c_i \alpha_i^\beta + x_i^\beta)^{a_i + b_0}} \right) d\beta} \right]^{-1/q}$$

اگر تابع زیان لاینکس تعمیم یافته زیر را در نظر بگیریم:

$$L(\beta, \delta) = e^{c \left(\frac{\delta}{\beta} - 1 \right)} - c \left(\frac{\delta}{\beta} - 1 \right) - 1,$$

آنگاه برآورد بیز پارامتر β به شکل زیر است،

$$\delta_{13}(x) = \frac{e^c - 1}{c} \frac{\int_0^{+\infty} \beta^{n+a-1} e^{-\beta(b-nb \log \alpha_0)} \left(\prod_{i=1}^n \frac{x_i^{a_i \beta - 1}}{(c_i \alpha_i^\beta + x_i^\beta)^{a_i + b_0}} \right) d\beta}{\int_0^{+\infty} \beta^{n+a-1} e^{-\beta(b-nb \log \alpha_0)} \left(\prod_{i=1}^n \frac{x_i^{a_i \beta - 1}}{(c_i \alpha_i^\beta + x_i^\beta)^{a_i + b_0}} \right) d\beta}$$

در زیر بخش (۲۴) برای داده‌های واقعی برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترهای توزیع BMO-LL را به دست می‌آوریم.

۴.۳ پیاده‌سازی روش‌های برآورد روی داده‌های واقعی

به عنوان مثالی جهت پیاده‌سازی روش‌های برآورد، داده‌های پلاسما را در نظر می‌گیریم که در [۱۹] مورد بحث قرار گرفته است. داده‌ها نشان‌دهنده اطلاعات مربوط به ۲۰۲ ورزشکار انتخاب شده در موسسه ورزشی استرالیا است. متغیر ارزیابی شده در این مطالعه غلظت فریتین پلاسما (LBM) است. از این داده‌ها برای پیدا کردن برآورد گشتاوری، ماکسیمم درستنمایی و بیزی پارامترهای توزیع استفاده می‌کنیم.

جدول ۸. برآورد بیز پارامتر β با تابع زیان دیگرگوت به ازای مقادیر

مختلف a, b و با فرض $a_0 = 44, b_0 = 73, c_0 = 18, \alpha_0 = 5$.

b / a	۱	۲	۵	۱۰
۱	۰.۲۲۹۳	۰.۲۲۴۹	۰.۲۱۹۸	۰.۲۱۸۷
۲	۰.۷۶۲۲	۰.۷۶۲۰	۰.۷۶۰۸	۰.۷۴۰۰
۵	۰.۹۵۹۲	۰.۹۴۳۱	۰.۸۲۵۱	۰.۵۱۱۶
۱۰	۱.۶۶۳۰	۱.۶۳۵۱	۱.۴۸۳۰	۱.۲۵۰۱

جدول ۹. برآورد بیز پارامتر β با تابع زیان $(\frac{\beta}{\delta} - 1)^2$ به ازای مقادیر

مختلف a, b و با فرض $a_0 = 44, b_0 = 73, c_0 = 18, \alpha_0 = 5$.

b / a	۱	۲	۵	۱۰
۱	۰.۶۶۱۰	۰.۶۱۸۵	۰.۳۹۸۹	۰.۲۳۵۸
۲	۰.۷۶۲۳	۰.۷۶۲۳	۰.۷۶۲۳	۰.۷۶۲۲
۵	۰.۹۸۱۷	۰.۹۸۰۸	۰.۹۷۱۷	۰.۸۴۸۶
۱۰	۱.۶۹۵۹	۱.۶۸۵۲	۱.۵۱۶۶	۱.۳۲۲۵

جدول ۱۰. برآورد بیز پارامتر β با تابع زیان آنتروپی به ازای مقادیر

مختلف a, b و با فرض $a_0 = 44, b_0 = 73, c_0 = 18, \alpha_0 = 5$.

b / a	۱	۲	۵	۱۰
۱	۰.۲۷۷۳	۰.۲۵۴۳	۰.۲۵۵۹	۰.۲۱۹۱
۲	۰.۷۶۲۳	۰.۷۶۲۳	۰.۷۶۲۱	۰.۷۵۸۵
۵	۰.۹۷۳۹	۰.۹۶۷۴	۰.۹۱۱۰	۰.۵۱۱۰
۱۰	۱.۶۷۷۷	۱.۶۵۷۰	۱.۵۲۹۴	۱.۲۶۸۰

جدول ۱۱. برآورد بیز پارامتر β با تابع زیان اشتاین به ازای مقادیر

مختلف a, b و با فرض $a_0 = 44, b_0 = 73, c_0 = 18, \alpha_0 = 5$.

b / a	۱	۲	۵	۱۰
۱	۰.۴۴۷۵	۰.۳۸۰۰	۰.۲۶۰۱	۰.۲۲۱۵
۲	۰.۷۷۲۳	۰.۷۶۲۳	۰.۷۶۲۳	۰.۷۶۱۷
۵	۰.۹۷۹۶	۰.۹۷۷۱	۰.۹۵۳۷	۰.۷۲۸۳
۱۰	۱.۶۸۳۲	۱.۶۷۳۳	۱.۵۷۱۲	۱.۲۹۱۹

جدول ۱۲. برآورد بیز پارامتر β با تابع زیان $2 - \frac{\beta}{\delta} + \frac{\delta}{\beta}$ با فرض

$a_0 = 44, b_0 = 73, c_0 = 18, \alpha_0 = 5$

b / a	۱	۲	۵	۱۰
۱	۰.۳۴۷۶	۰.۳۰۷۳	۰.۲۴۱۹	۰.۲۲۰۳
۲	۰.۷۶۲۳	۰.۷۶۲۳	۰.۷۶۲۲	۰.۷۶۰۱
۵	۰.۹۷۶۷	۰.۹۷۲۲	۰.۹۳۲۱	۰.۶۶۰۴
۱۰	۱.۶۸۳۰	۱.۶۶۵۲	۱.۵۵۰۱	۱.۲۸۰۰

جدول ۳. برآورد بیز پارامتر β با تابع زیان مربع خطا به ازای مقادیر

مختلف a, b و با فرض $a_0 = 44, b_0 = 73, c_0 = 18, \alpha_0 = 5$.

b / a	۱	۲	۵	۱۰
۱	۰.۴۴۷۵	۰.۳۸۰۰	۰.۲۶۰۱	۰.۲۲۱۵
۲	۰.۷۷۲۳	۰.۷۶۲۳	۰.۷۶۲۳	۰.۷۶۱۷
۵	۰.۹۷۹۶	۰.۹۷۷۱	۰.۹۵۳۷	۰.۷۲۸۳
۱۰	۱.۶۸۳۲	۱.۶۷۳۳	۱.۵۷۱۲	۱.۲۹۱۹

جدول ۴. برآورد بیز پارامتر β با تابع زیان مربع خطای وزنی با فرض

$w(\theta) = \beta^{-2}$ و $a_0 = 44, b_0 = 73, c_0 = 18, \alpha_0 = 5$.

b / a	۱	۲	۵	۱۰
۱	۰.۵۶۱۲	۰.۴۸۸۹	۰.۳۰۶۷	۰.۲۲۵۴
۲	۰.۷۶۲۳	۰.۷۶۲۳	۰.۷۶۲۴	۰.۷۶۲۱
۵	۰.۹۷۶۲	۰.۹۷۱۴	۰.۹۲۷۸	۰.۶۳۳۵
۱۰	۱.۷۱۰۲	۱.۷۰۸۳	۱.۶۹۲۴	۱.۵۳۶۸

جدول ۵. برآورد بیز پارامتر β با تابع زیان قدرمطلق خطا به ازای

مقادیر مختلف a, b و با فرض $a_0 = 44, b_0 = 73, c_0 = 18, \alpha_0 = 5$.

b / a	۱	۲	۵	۱۰
۱	۰.۳۶۵۸	۰.۳۶۲۳	۰.۳۵۴۲	۰.۳۴۴۳
۲	۰.۴۷۸۷	۰.۴۷۵۶	۰.۳۵۶۰	۰.۴۵۲۳
۵	۰.۷۳۴۸	۰.۷۳۰۱	۰.۷۱۵۶	۰.۶۹۲۴
۱۰	۱.۵۲۳۴	۱.۵۱۰۲	۱.۴۷۱۵	۱.۴۱۰۷

جدول ۶. برآورد بیز پارامتر β با تابع زیان لاینکس با فرض

$a_0 = 44, b_0 = 73, c_0 = 18, \alpha_0 = 5$

b / a	۱	۲	۵	۱۰
۱	۰.۴۱۲۸	۰.۳۵۱۵	۰.۲۵۱۱	۰.۲۲۰۸
۲	۰.۷۶۲۳	۰.۷۶۲۳	۰.۷۶۲۳	۰.۷۶۱۵
۵	۰.۹۷۸۴	۰.۹۷۵۲	۰.۹۴۴۷	۰.۶۹۱۱
۱۰	۱.۶۸۱۴	۱.۶۶۲۶	۱.۵۴۳۵	۱.۲۷۵۸

جدول ۷. برآورد بیز پارامتر β با تابع زیان قدرمطلق خطای وزنی با

فرض $a_0 = 44, b_0 = 73, c_0 = 18, \alpha_0 = 5$

b / a	۱	۲	۵	۱۰
۱	۰.۳۵۸۵	۰.۳۵۶۰	۰.۳۴۸۶	۰.۳۳۷۱
۲	۰.۴۷۰۸	۰.۴۶۷۸	۰.۴۵۹۰	۰.۴۴۴۷
۵	۰.۷۲۶۵	۰.۷۲۱۹	۰.۷۰۷۵	۰.۶۸۴۴
۱۰	۱.۵۱۴۱	۱.۵۰۰۷	۱.۴۶۲۲	۱.۴۱۶۸

جدول ۱۵. برآورد بیز پارامتر β با تابع زیان لاینکس تعمیم‌یافته یافرض $a_0 = 44, b_0 = 73, c_0 = 18, \alpha_0 = 5$

b/a	۱	۲	۵	۱۰
۱	۰.۲۳۵۵	۰.۲۳۰۸	۰.۲۲۵۵	۰.۲۲۴۳
۲	۰.۹۷۵۹	۰.۷۹۵۸	۰.۷۹۴۵	۰.۷۷۲۶
۵	۰.۹۹۳۱	۰.۹۸۶۲	۰.۸۶۲۱	۰.۵۳۲۳
۱۰	۱.۷۴۳۳	۱.۷۱۴۰	۱.۵۵۴۰	۱.۳۰۹۰

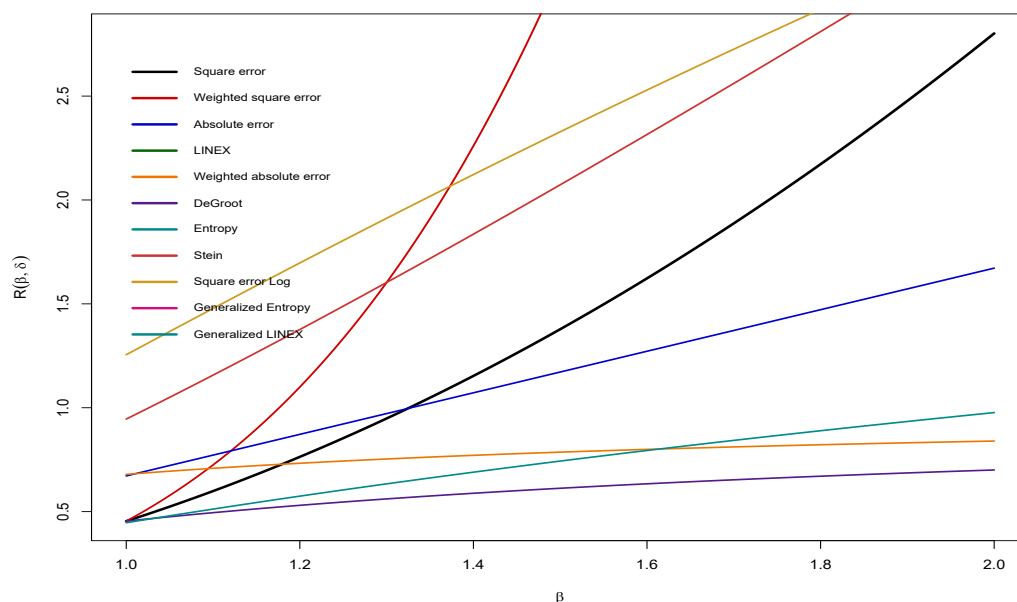
جدول ۱۳. برآورد بیز پارامتر β با تابع زیان مربع خطا در لگاریتم بافرض $a_0 = 44, b_0 = 73, c_0 = 18, \alpha_0 = 5$

b/a	۱	۲	۵	۱۰
۱	۰.۳۴۰۹	۰.۲۹۴۹	۰.۲۳۴۵	۰.۲۱۹۶
۲	۰.۷۶۲۳	۰.۷۶۲۳	۰.۷۶۲۲	۰.۷۶۱۰
۵	۰.۹۷۷۶	۰.۷۶۳۷	۰.۹۳۸۱	۰.۶۶۱۸
۱۰	۱.۶۸۳۶	۱.۶۶۶۰	۱.۵۵۱۳	۱.۲۷۸۹

لازم به ذکر است که می‌توان هر پنج پارامتر توزیع را نامعلوم در نظر گرفته و برآورد بیزی تمام آنها را با استفاده از روش‌های زنجیره مارکوف مونت‌کارلو (MCMC) به دست آورد. این روش‌ها استاندارد طلایی در محاسبات بیزی هستند. به جای حل مستقیم انتگرال، از توزیع پسین نمونه‌گیری می‌کنند. الگوریتم متروپلیس-هستینگز عمومی‌ترین الگوریتم MCMC است که می‌توان از آن برای پیدا کردن برآورد بیزی پارامترهای توزیع BMO-LL استفاده کرد، اما دلیل طولانی و خارج بودن آن از بحث این مقاله، محاسبات این روش انجام نشده است.

جدول ۱۴. برآورد بیز پارامتر β با تابع زیان آنتروپی تعمیم‌یافته بافرض $a_0 = 44, b_0 = 73, c_0 = 18, \alpha_0 = 5$

b/a	۱	۲	۵	۱۰
۱	۰.۳۰۲۶	۰.۲۶۹۸	۰.۲۲۹۱	۰.۲۱۹۳
۲	۰.۷۶۲۳	۰.۷۶۲۳	۰.۷۶۲۲	۰.۷۶۰۱
۵	۰.۹۷۶۱	۰.۹۷۱۱	۰.۹۲۶۴	۰.۶۲۹۴
۱۰	۱.۶۸۰۸	۱.۶۶۱۷	۱.۵۴۰۶	۱.۲۷۳۲



شکل ۲. نمودار مخاطره برآوردهای مختلف بیزی برای داده‌های پلاسما

جدول ۱۶. مقدار میانگین توان دوم خطای برآوردهای مختلف به ازای حجم‌های نمونه‌ای مختلف

برآوردگر / حجم نمونه	$n = 5$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 50$	$n = 100$
MME	۰/۵۰۱۳	۰/۴۸۲۴	۰/۴۶۹۸	۰/۴۲۵۸	۰/۴۰۲۸
MLE	۰/۴۹۴۳	۰/۴۳۰۹	۰/۴۰۲۸	۰/۳۵۸۲	۰/۳۲۹۱
δ_1	۰/۴۵۸۸	۰/۴۴۷۹	۰/۴۳۳۹	۰/۴۱۰۹	۰/۴۰۴۰
δ_2	۰/۶۷۶۷	۰/۴۶۹۹	۰/۴۵۱۹	۰/۴۱۳۹	۰/۴۰۸۳
δ_3	۰/۴۹۱۴	۰/۴۸۷۵	۰/۴۸۵۱	۰/۴۴۰۶	۰/۴۱۶۲
δ_4	۰/۴۶۵۵	۰/۴۵۵۲	۰/۴۴۶۱	۰/۴۱۱۰	۰/۴۰۲۳
δ_5	۰/۵۳۶۶	۰/۵۳۱۴	۰/۵۲۷۳	۰/۵۰۴۲	۰/۴۴۰۲
δ_6	۰/۳۷۰۷	۰/۳۰۱۶	۰/۲۷۶۰	۰/۲۵۴۴	۰/۲۲۸۷
δ_7	۰/۴۷۹۵	۰/۴۶۷۳	۰/۴۵۶۴	۰/۴۳۲۴	۰/۴۱۲۲
δ_8	۰/۵۰۴۸	۰/۴۸۸۶	۰/۴۷۵۸	۰/۴۲۲۵	۰/۳۹۲۶
δ_9	۰/۴۵۸۸	۰/۴۳۷۸	۰/۴۱۳۹	۰/۴۰۸۸	۰/۳۸۴۰
δ_{10}	۰/۴۸۳۲	۰/۴۶۳۹	۰/۴۲۰۰	۰/۴۱۲۹	۰/۳۸۱۸
δ_{11}	۰/۴۷۷۱	۰/۴۵۶۵	۰/۴۲۹۱	۰/۴۰۹۱	۰/۳۷۸۳
δ_{12}	۰/۷۸۲۱	۰/۴۹۳۲	۰/۴۷۱۷	۰/۴۶۵۶	۰/۴۲۵۵
δ_{13}	۰/۴۰۴۲	۰/۳۱۱۰	۰/۲۹۶۵	۰/۲۸۳۱	۰/۲۵۹۵

خطای هر برآوردگر را با استفاده از رابطه زیر محاسبه کرد،

۴ مقایسه برآوردهای β با شبیه‌سازی

$$MSE = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (\hat{\beta} - \beta)^2 = \frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} (\hat{\beta} - 1)^2.$$

با توجه به اینکه کوچک بودن این معیار مطلوب است، بنابراین با داشتن مقدار MSE مربوط به تمام برآوردها، می‌توان آن‌ها را با هم مقایسه کرده و بهترین برآوردگر را انتخاب کرد. جهت سنجش حساسیت این روش نسبت به حجم نمونه، این عمل با حجم‌های نمونه‌ای $n = 5, 10, 20, 50, 100$ انجام شده است. نتیجه در جدول ۱۶ ارائه شده است. با توجه به این جدول مشاهده می‌کنیم که برای تمامی مقادیر n ، برآوردگر δ_6 دارای MSE کوچک‌تری نسبت به سایر برآوردها است. پس δ_6 یعنی برآوردگر بیز با تابع زیان دیگروت، به عنوان بهترین برآوردگر برای پارامتر β انتخاب می‌شود.

در این بخش با استفاده از شبیه‌سازی، کارایی برآوردهای بیزی، گشتاوری و ماکسیم درست‌نمایی پارامتر β با هم مقایسه شده و بهترین برآوردگر به ازای حجم‌های نمونه‌ای مختلف انتخاب شده است. برای انجام مقایسه مورد نظر، به تعداد $m = 1000$ بار نمونه‌هایی با حجم n از توزیع BMO-LL با در نظر گرفتن پارامترهای معلوم $(a, b, c, \alpha, \beta) = (1, 10, 2, 1, 1)$ تولید می‌کنیم. در روش بیزی، مقادیر پارامترهای توزیع پیشین را برابر با $a = 1, b = 2$ در نظر می‌گیریم. پس از مشخص شدن نمونه‌ها، فرض می‌کنیم پارامتر β نامعلوم است و برای هر نمونه‌ای تولید شده، برآوردهای مختلف را برای پارامتر β محاسبه می‌کنیم. با انجام این عمل، $m = 1000$ برآورد مختلف خواهیم داشت که با استفاده از آن‌ها می‌توان میانگین توان دوم

جدول ۱۷. مدل‌های در نظر گرفته شده برای مقایسه با مدل BMO-LL

مدل	تابع چگالی	مقادیر پارامترهای توزیع BMO-LL
بتا لگ-لجستیک [۱۴]	$f(x; a, b, \alpha, \beta) = \frac{\beta \alpha^b x^{\alpha\beta-1}}{B(a, b)(\alpha^\beta + x^\beta)^{a+b}}, x > 0$	$c = 1$
سینگ-مدالا [۱۳]	$f(x; b, \alpha, \beta) = \frac{b \beta \alpha^b x^{\beta-1}}{(\alpha^\beta + x^\beta)^{b+1}}, x > 0$	$a = c = 1$
داگوم [۱۲]	$f(x; a, \alpha, \beta) = \frac{a \beta \alpha^a x^{\alpha\beta-1}}{(\alpha^\beta + x^\beta)^{a+1}}, x > 0$	$b = c = 1$
لگ-لجستیک [۱۵]	$f(x; \alpha, \beta) = \frac{\beta \alpha^\beta x^{\beta-1}}{(\alpha^\beta + x^\beta)^2}, x > 0$	$a = b = c = 1$

۵ بررسی عملکرد توزیع با استفاده از داده‌های واقعی

برآزش مدل BMO-LL به داده‌های زمان شکست را با نتیجه برآزش مدل‌های LL، BLL، SM و Da به این داده‌ها مقایسه می‌کنیم.

در جدول ۱۸ برآوردهای درستنمایی ماکسیمم پارامترها و خطاهای استاندارد (SE) آن‌ها (داخل پرانتز) برای پنج مدل مورد نظر آورده شده است. همچنین لگاریتم تابع درستنمایی (LogL)، مقدار معیار اطلاع آکائیک (AIC)، معیار اطلاع آکائیک سازگار (CAIC) و معیار اطلاع بیزی (BIC) نیز در این جدول ارائه شده است. با توجه به اینکه کوچک بودن معیارهای AIC، CAIC و BIC مطلوب است، نتیجه می‌گیریم که مدل BMO-LL می‌تواند به عنوان بهترین مدل در میان پنج مدل برآزش داده شده برای داده‌های زمان شکست انتخاب شود. در شکل ۳ هیستوگرام داده‌های زمان شکست به همراه ۵ چگالی برآزش شده به این داده‌ها آورده شده است. در این شکل نیز مشاهده می‌شود که مدل BMO-LL برآزش بهتری به داده‌های زمان شکست دارد.

آزمون‌های معمول برای پارامترهای شکل اضافی در توزیع BMO-LL می‌تواند براساس آماره‌های آزمون نسبت درستنمایی انجام شود. نتایج مقایسه مدل‌های ذکر شده در جدول ۱۹ ارائه شده است. برای هر چهار آزمون نسبت درستنمایی، فرض صفر رد شده که نشان می‌دهد توزیع BMO-LL نسبت به چهار مدل رقیب برآزش بهتری به داده‌های زمان شکست دارد. بنابراین، شواهدی از نیاز بالقوه به سه پارامتر توزیع BMO-LL برای داده‌های زمان شکست وجود دارد.

در این بخش با استفاده از یک مجموعه داده واقعی، انعطاف‌پذیری توزیع‌های BMO-LL را در برآزش به داده‌های طول عمر نشان می‌دهیم. کلیه محاسبات این بخش با استفاده از نرم‌افزار R بسته $maxLik$ انجام شده‌اند. مدل‌هایی که جهت مقایسه با مدل BMO-LL در نظر می‌گیریم عبارتند از مدل لگ-لجستیک (LL)، مدل بتا لگ-لجستیک (BLL)، مدل سینگ-مادالا (SM) و مدل داگوم (Da) که اطلاعات آن‌ها در جدول ۱۷ ارائه شده است.

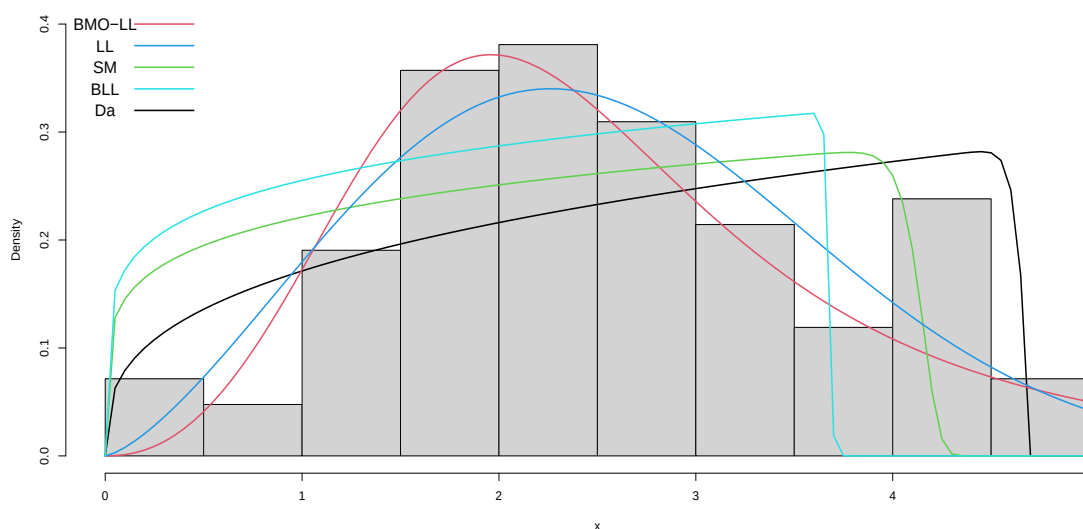
داده‌های زمان شکست که توسط [۱۸] مورد مطالعه قرار گرفته را در نظر می‌گیریم. این داده‌ها نشان‌دهنده زمان‌های شکست (خرابی) شیشه جلوی هواپیما هستند. شیشه جلوی هواپیماهای بزرگ یک قطعه پیچیده است که اساساً از چند لایه تشکیل شده است، از جمله یک پوسته خارجی بسیار محکم با یک لایه حرارتی که همه آن‌ها تحت دما و فشار بالا لایه‌بندی شده‌اند. خرابی‌های این قطعات خرابی‌های ساختاری نیستند، بلکه معمولاً شامل آسیب یا جداسازی لایه بیرونی یا خرابی سیستم گرمایشی هستند که جزء خرابی‌های غیرساختاری محسوب می‌شوند. این نوع خرابی‌ها منجر به آسیب به هواپیما نمی‌شوند اما در صورت وقوع خرابی، نیاز به تعویض شیشه خواهد بود. در این بخش نتیجه

جدول ۱۸. برآوردهای درستنمایی ماکسیمم (خطای استاندارد داخل پرانتز) برای برخی مدل‌های برآزش داده شده به داده‌های زمان شکست به همراه مقادیر لگاریتم تابع درستنمایی، AIC، CAIC و BIC.

مدل	a	b	c	α	β	LogL	AIC	CAIC	BIC
LL	—	—	—	۲/۳۹۱ (۰/۱۳۷)	۳/۲۲۴ (۰/۲۹۷)	-۱۳۹/۵۸	۲۸۳/۲	۲۸۳/۳	۲۸۸/۰
BLL	۰/۰۱۹ (۰/۰۰۲)	۶/۵۲۲ (۰/۰۹۰)	—	۴/۷۹۱ (۰/۰۵۸)	۶۸/۷۸ (۰/۰۳۹)	-۱۲۷/۱۰	۲۶۲/۲	۲۶۲/۷	۲۷۱/۸
SM	—	۴۲/۶۲ (۰/۴۸۳)	—	۱۳/۶۱ (۱/۰۲۹)	۲۳/۹۷ (۰/۱۳۸)	-۱۳۰/۲۷	۲۶۶/۵	۲۶۶/۸	۲۷۳/۸
Da	۰/۰۰۳ (۰/۰۰۰)	—	—	۴/۶۷۵ (۰/۰۲۴)	۴۵۵/۰ (۸۵۱۱)	-۱۲۶/۷۴	۲۵۹/۵	۲۵۹/۸	۲۶۶/۸
BMO-LL	۰/۰۱۱ (۰/۰۰۱)	۳/۶۵۸ (۰/۱۰۷)	۶۱/۹۵ (۳/۷۵۳)	۴/۵۶۵ (۰/۰۴۲)	۱۲۳/۷۵ (۰/۰۲۹)	-۱۲۰/۹۵	۲۵۱/۸	۲۵۲/۷	۲۶۴/۱

جدول ۱۹. آزمون‌های نسبت درستنمایی برای داده‌های زمان شکست

آزمون	فرض صفر	آماره آزمون نسبت درستنمایی	درجه آزادی	$P - value$
BMO-LL vs LL	$H_0 : a = b = c = 1$	۳۷/۲۶	۳	< 0.001
BMO-LL vs BLL	$H_0 : c = 1$	۱۲/۲۹	۱	< 0.001
BMO-LL vs SM	$H_0 : a = c = 1$	۱۸/۶۳	۲	< 0.001
BMO-LL vs Da	$H_0 : b = c = 1$	۱۱/۵۸	۲	< 0.001



شکل ۳. چگالی‌های برازش شده به داده‌های زمان شکست

شکل معرفی شد. این خانواده جدید برخی توزیع‌های شناخته شده در ادبیات آماری مانند توزیع لگ-لجستیک را تعمیم می‌دهد. برآورد پارامترهای مدل با استفاده از روش‌های گشتاوری، ماکسیمم درستنمایی و بیزی به دست آمد. نتایج حاصل از شبیه‌سازی عددی بیانگر دقت و پایداری قابل قبول برای سه برآورد بدست آمده است. در روش برآورد بیزی نیز با اجرای شبیه‌سازی و مقایسه عملکرد برآوردهای متناظر با توابع زیان مختلف، کاراترین برآوردهای بیزی شناسایی و انتخاب شد. مقایسه نتایج حاصل از هر سه برآورد شبیه‌سازی شده نشان داد که برآوردهای بیزی نسبت به دو روش دیگر از دقت بالاتری در برآورد پارامترها برخوردار است. در نهایت، چند مدل خاص در خانواده جدید به دو مجموعه داده واقعی برازش داده شد تا انعطاف‌پذیری آن‌ها در برازش به داده‌های طول عمر مورد بررسی قرار گیرد. مشخص شد که مدل BMO-LL نسبت به مدل‌های رقیب، برازش بهتری به این داده‌ها دارد.

به عنوان مثال اگر هدف انجام آزمون $H_0 : X \sim LL$ (یا به طور معادل $H_0 : a = b = c = 1$) در برابر $H_1 : X \sim BMO-LL$ باشد، با توجه به مقادیر لگاریتم تابع درستنمایی در جدول ۱۹، مقدار آماره آزمون $\chi^2 = -2[(-139.58) - (-120.95)] = 37.26$ است. χ^2 درجه آزادی این آماره برابر است با تعداد پارامترهای مدل تحت فرض H_0 منهای تعداد پارامترهای مدل تحت فرض H_1 ، یعنی $df = 5 - 2 = 3$ ، در نتیجه $P - value = P(\chi^2_3 > 37.26) = 0.00000000406$. نتایج نشان‌دهنده این است که توزیع BMO-LL، نسبت به سایر مدل‌های مطرح شده، برازش بهتری برای داده‌های زمان شکست فراهم می‌کند.

۶ نتیجه‌گیری

یک خانواده جدید از مدل‌ها به نام خانواده توزیع‌های لگ-لجستیک تعمیم یافته بتا مارشال-اولکین (BMO-LL) با اضافه کردن سه پارامتر

مراجع

- [1] Alexander, C., Cordeiro, G. M., Ortega, E. M., & Sarabia, J. M. (2012). Generalized beta-generated distributions. *Computational Statistics & Data Analysis*, 56(6), 1880-1897.
- [2] Alizadeh, M., Ozel, G., Altun, E., Abdi, M., & Hamedani, G. G. (2017). The odd log-logistic Marshall-Olkin Lindley model for lifetime data. *Journal of Statistical Theory and Applications*, 16(3), 382-400.
- [3] Alfaer, N. M., Gemeay, A. M., Aljohani, H. M., & Afify, A. Z. (2021). The extended log-logistic distribution: inference and actuarial applications. *Mathematics*, 9(12), 1386.
- [4] Alzaatreh, A., Lee, C., & Famoye, F. (2013). A new method for generating families of continuous distributions. *Metron*, 71(1), 63-79.
- [5] Bourguignon, M., Silva, R. B., & Cordeiro, G. M. (2014). The Weibull-G family of probability distributions. *Journal of Data Science*, 12(1), 53-68.
- [6] Cakmakyapan, S., Ozel, G., Gebaly, Y. M. H. E., & Hamedani, G. G. (2018). The Kumaraswamy Marshall-Olkin log-logistic distribution with application. *Journal of Statistical Theory and Applications*, 17(1), 59-76.
- [7] Cordeiro, G. M., & De Castro, M. (2011). A new family of generalized distributions. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 81(7), 883-898.
- [8] Cordeiro, G. M., Alizadeh, M., & Ortega, E. M. (2014). The exponentiated half-logistic family of distributions: properties and applications. *Journal of Probability and Statistics*, 2014(1), 864396.
- [9] Eugene, N., Lee, C., & Famoye, F. (2002). Beta-normal distribution and its applications. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 31(4), 497-512.
- [10] Gui, W. (2013). Marshall-Olkin extended log-logistic distribution and its application in minification processes. *Applied Mathematical Sciences*, 7(77-80), 3947-3961.
- [11] Handique, L., & Chakraborty, S. (2016). The beta generalized Marshall-Olkin-G family of distributions. *arXiv preprint arXiv:1608.05985*.
- [12] Kleiber, C. (2008). A guide to the Dagum distributions. In *modeling income distributions and Lorenz curves* (pp. 97-117). New York, NY: Springer New York.
- [13] Kumar, D. (2017). The Singh-Maddala distribution: properties and estimation. *International Journal of System Assurance Engineering and Management*, 8(Suppl 2), 1297-1311.
- [14] Lemonte, A. J. (2014). The beta log-logistic distribution. *Brazilian Journal of Probability and Statistics*, 28 (3) 313 - 332.
- [15] Lomax, K. S. (1954). Business failures: Another example of the analysis of failure data. *Journal of the American Statistical Association*, 49(268), 847-852.

- [16] Mahmoud, M. R., & Mohammed, S. M. (2013). Estimation of parameters of the Marshall-Olkin extended log-logistic distribution from progressively censored samples. *European Journal of Statistics and Probability*, 2(3), 1-13.
- [17] Marshall, A. W., & Olkin, I. (1997). A new method for adding a parameter to a family of distributions with application to the exponential and Weibull families. *Biometrika*, 84(3), 641-652.
- [18] Murthy, D. P., Xie, M., & Jiang, R. (2004). *Weibull models*. John Wiley & Sons.
- [19] Weisberg, S. (2005). *Applied linear regression*. John Wiley & Sons.
- [20] Zografos, K., & Balakrishnan, N. (2009). On families of beta-and generalized gamma-generated distributions and associated inference. *Statistical Methodology*, 6(4), 344-362.

Parameters Estimation of the Beta Marshall-Olkin Extended Log-Logistic Distribution

Nahid Sanjari Farsipour^{1*}, Zahra Moradi²

^{1,2}*Department of Statistics, Faculty of Mathematical Sciences, Alzahra University, Tehran, Iran*

Received: 2025/10/19

Accepted: 2026/07/07

Abstract

In this article, we define a new family of models, called the beta Marshall-Olkin extended log-logistic family of distributions (BMO-LL), by adding three shape parameters that generalize some well-known distributions in statistics, such as the log-logistic distribution. We obtain estimates of the model parameters using the methods of moments, maximum likelihood, and Bayesian. Finally, we fit some specific models in the new family to a real datasets to demonstrate their flexibility in fitting to the life data. It is found that the BMO-LL model fits better than competing models, so it can be considered as a suitable distribution for fitting to the life data.

Keywords: Bayesian estimation, Log-logistic distribution, Marshall-Olkin distribution, Maximum likelihood estimation, Moment estimation.

Mathematics Subject Classification: 62F10, 62F15.

*Corresponding author, nsanjari@alzahra.ac.ir