

مروری بر مفصل‌های جهتی و کاربردهای آنها

نجیب‌الله کریمی^۱، علی دست‌برآورده^{۲*} و علی دولتی^۲

^۱ دانشجوی دکتری آمار، گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه یزد، یزد، ایران

^۲ گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه یزد، یزد، ایران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۱۱/۱۴

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۵/۰۴/۱۶

چکیده

داده‌های جهتی (زاویه‌ای)، شامل داده‌های دایره‌ای و کروی، در بسیاری از حوزه‌های علمی مانند بوم‌شناسی، پزشکی، زیست‌شناسی، هواشناسی، بخش‌های مالی، نجوم، علوم زمین، یادگیری ماشین و هوش مصنوعی کاربرد دارند. مدل‌سازی وابستگی بین چنین داده‌هایی به دلیل ماهیت تناوبی و غیرخطی زوایا، همواره با چالش‌های اساسی روبه‌رو بوده است. در دهه‌های اخیر، مفصل‌ها به‌عنوان ابزاری نیرومند برای جداسازی ساختارهای حاشیه‌ای از وابستگی توأم، جایگاه ویژه‌ای در آمار یافته‌اند. با این حال، تعمیم مفصل‌ها به داده‌های جهتی، شامل مفصل‌های دایره‌ای - خطی، دایره‌ای - دایره‌ای و کروی - کروی، مسیر پژوهشی پیچیده و پیوسته‌ای را طی کرده است. در این مقاله، با رویکرد زمانی-موضوعی، سیر تاریخی، روش‌های ساخت، کاربردها، معیارهای وابستگی، روش‌های برآوردیابی و آزمون‌های نیکویی برازش برای مفصل‌های جهتی مرور می‌شود. ابتدا پیشینه نظری و ریاضی مدل‌های جهتی و مفصل‌ها معرفی می‌گردند، سپس هر یک از سه خانواده اصلی مفصل‌های جهتی از منظر نظری و کاربردی بررسی می‌شوند. در پایان، با نتیجه‌گیری کلی به مسیرهای پژوهشی آینده اشاره می‌گردد.

واژه‌های کلیدی: داده‌های جهتی، مدل‌سازی وابستگی، مفصل‌های جهتی، مفصل‌های دایره‌ای-خطی، مفصل‌های دایره‌ای-دایره‌ای، دایره‌ای، مفصل‌های کروی.

رده‌بندی ریاضی: ۶۲H۱۱، ۶۲H۲۰.

۱ مقدمه

زمینه مدل‌سازی حرکت پرندگان و حیوانات [۸۶]، تحلیل حرکت باد [۱۳]، هوانوردی [۳۶]، علوم سیاسی [۶۴]، بیوانفورماتیک [۶۹]، اخترشناسی [۱۱]، علوم زمین [۱۴]، پزشکی [۸۹]، ژنتیک [۱۰]، علوم اعصاب [۵۷]، صوت‌شناسی [۱۰۰]، پردازش تصویر [۸۹، ۲۰]، متن‌کاوی [۷]، یادگیری ماشین [۳۲]، مدل‌سازی آتش‌سوزی‌های طبیعی [۴]، شرایط دریایی [۴۶، ۶۰] و حتی در تحلیل‌های مالی و بازاریابی مشاهده می‌شوند [۸۱].

داده‌های جهتی به مشاهداتی گفته می‌شوند که روی دایره، کره یا فضاها چندبعدی مشابه قرار دارند، به‌گونه‌ای که موقعیت هر داده تنها از طریق جهت آن، نه مقدار عددی مطلق، توصیف می‌شود. این داده‌ها معمولاً به‌صورت زاویه‌ای در بازه $[0, 2\pi)$ برای داده‌های دایره‌ای و به‌صورت بردارهای واحد در \mathbb{R}^3 برای داده‌های کروی نمایش داده می‌شوند [۷۰]. داده‌های جهتی در

شود. این ایده بعدها در آثار دیگر از جمله وهرلی و جانسون [۱۰۴]، فیشر و لی [۲۷، ۲۸]، ماردیا و جاپ [۷۰]، جمالاماداکا و سینگوپتا [۴۱]، دونز و ماردیا [۱۸]، فرناندز-دوران [۲۲]، شی و جانسون [۹۴]، پیوسی [۸۳] و ابی و پیوسی [۲] توسعه یافت و به ظهور مدل‌های دایره‌ای-دایره‌ای و دایره‌ای-خطی با ساختارهای مختلف انجامید.

افزون بر داده‌های دایره‌ای، داده‌های کروی نیز در بسیاری از داده‌های سه‌متغیره کاربرد گسترده‌ای دارند. مدل‌سازی این داده‌ها ابتدا با معرفی توزیع‌های کلاسیکی چون فیشر [۲۴]، بینگهام [۹] و سپس با کارهای جامع ماردیا و جاپ [۷۰] شکل گرفت. در ادامه، دونز [۱۷] به بررسی ساختارهای وابستگی بین متغیرهای کروی پرداخت و زمینه را برای توسعه چارچوب مفصل‌های کروی فراهم ساخت. کاتو [۵۲] در سال ۲۰۰۹ یک مفصل کروی را معرفی کرد و ویژگی‌ها و تعمیم‌های آن به داده‌های استوانه‌ای و چنبره‌ای را بررسی نمود. پس از آن، جاپ [۵۰] در سال ۲۰۱۵ با تعمیم مفهوم مفصل‌ها به حاصل‌ضرب‌های منیفولدهای ریمانی فشرده^۱، چارچوب نظری مفصل‌های کروی را توسعه داد.

مدل‌های دایره‌ای-خطی عمدتاً براساس توزیع‌های شرطی یا ساختارهای شبه‌مفصل شکل گرفتند تا وابستگی بین متغیرهای دایره‌ای و متغیرهای خطی را به‌طور انعطاف‌پذیری مدل‌سازی کنند [۱۲، ۲۸، ۳۴، ۴۵، ۱۰۳]. در مدل‌های دایره‌ای-دایره‌ای، استفاده از توزیع‌های توأم مانند توزیع‌های با حاشیه‌های هم‌توزیع فون‌میزس یا کوشی پوشارنده و ساختارهای مبتنی بر مفصل‌های کاردیوئید گسترش یافت [۴۰، ۴۸، ۶۴، ۶۷]. در سطح بالاتر، نظریه داده‌های کروی به‌عنوان تعمیم طبیعی مدل‌های دایره‌ای مطرح می‌شود و چارچوب عمومی‌تری برای تحلیل وابستگی‌ها در فضای چندبعدي جهتی فراهم می‌سازد [۵۲، ۶۴، ۷۰].

در دهه‌های اخیر، دو سیر اصلی در پژوهش‌های مفصل‌های جهتی پدیدار شده است. نخست، توسعه مدل‌های انعطاف‌پذیرتر با استفاده از روش‌های پارامتری [۴۵، ۴۸]، نیمه‌پارامتری [۲۱] و ناپارامتری شامل برآورد بر مبنای هسته‌ها (کرنل‌ها) [۱۲، ۳۰، ۶۵، ۹۰]. این مطالعات، با ساخت مفصل‌های انعطاف‌پذیر و با تمرکز بر برآورد چگالی‌های توأم، چارچوبی را

از آنجا که تحلیل داده‌های جهتی تفاوت قابل ملاحظه‌ای با تحلیل داده‌های خطی دارند، به‌کاربردن روش‌ها و اندازه‌گیری‌های آمار خطی (کلاسیک) برای آنها، اغلب به نتایج گمراه‌کننده‌ای منتج می‌شوند. بنابراین، به روش‌ها و اندازه‌گیری‌های جدیدی برای داده‌های جهتی مورد نیاز است. یکی از این موضوعات، مفهوم وابستگی در داده‌های زاویه‌ای است. به‌طور مثال، در تحلیل حرکت حیوانات، مسافت پیموده‌شده و زاویه تغییر جهت ممکن است با یکدیگر وابسته باشند و مدلی که این وابستگی را نادیده می‌گیرند، موجب بروز خطا در تحلیل حرکت می‌شوند [۳۵، ۷۶].

برای مدل‌سازی این نوع وابستگی‌ها، به‌ویژه بین متغیرهایی از نوع متفاوت (مثلاً یک متغیر خطی و دیگری دایره‌ای)، چارچوب مفصل‌ها روشی جذاب و انعطاف‌پذیر ارائه می‌دهد؛ زیرا مفصل‌ها امکان تفکیک ساختار وابستگی توأم از توزیع‌های حاشیه‌ای را فراهم می‌کنند [۷۹]. با این حال، مفصل‌های کلاسیک در فضای اقلیدسی تعریف می‌شوند و ویژگی‌هایی مانند تناوب یا تقارن دایره‌ای در متغیرهای جهتی را لحاظ نمی‌کنند. بنابراین، انتقال این مفهوم به داده‌های جهتی مستلزم بازنگری در تعریف تابع توزیع تجمعی، چگالی احتمال و نحوه برخورد با مرزهای جهتی است.

از اواخر دهه ۱۹۷۰، پژوهش‌های مهمی برای تعریف و تحلیل مفصل‌های جهتی آغاز شد. جانسون و وهرلی [۲۴] با تعمیم روش همبستگی متعارف، چارچوب نوآورانه‌ای برای مدل‌سازی وابستگی در داده‌های ترکیبی (دایره‌ای-خطی) ارائه نمودند و برای نخستین بار ایده کلی وابستگی بین داده‌های دایره‌ای و خطی را مطرح کردند. آن‌ها این چارچوب را برای داده‌های دایره‌ای-دایره‌ای نیز تعمیم دادند. همچنین، جانسون و وهرلی [۲۵] نخستین چارچوب صریح برای مدل‌سازی وابستگی بین متغیرهای خطی و دایره‌ای را با استفاده از اصل ماکسیمم آنتروپی و تعیین مشخصه‌های توزیع‌های حاشیه‌ای، ارائه کردند. آنها نشان دادند که می‌توان توزیع توأم یک متغیر دایره‌ای و یک متغیر خطی را به‌گونه‌ای ساخت که حاشیه‌های آنها دلخواه باشند و ساختار وابستگی بوسیله تابع پیوسته‌ای در بازه $[0, 2\pi]$ کنترل

¹Compact Riemannian manifolds

و به مسیرهای پژوهشی این حوزه اشاره شده است.

فراهم کردند که می‌تواند انواع مختلفی از وابستگی در داده‌های جهتی را بازنمایی کند.

۲ مبانی نظری

۱.۲ داده‌های جهتی

در برخی حوزه‌های علمی، کمیت‌های اندازه‌گیری شده جهت‌ها هستند. برای مثال، یک زیست‌شناس ممکن است جهت پرواز یک پرنده یا جهت حرکت یک حیوان را اندازه‌گیری کند، در حالی که یک زمین‌شناس ممکن است به جهت قطب مغناطیسی زمین علاقه‌مند باشد. چنین جهت‌هایی ممکن است دو بُعدی مانند دو مثال نخست یا سه بُعدی مانند مثال آخر باشند. مجموعه‌ای از این‌گونه مشاهدات مربوط به جهت‌ها، «داده‌های جهتی»^۲ نامیده می‌شود. داده‌های جهتی شامل داده‌های دایره‌ای، نیمه‌دایره‌ای، محوری، متقارن/نامتقارن، تک‌مُدی/دو مُدی، ترکیبی (استوانه‌ای و چنبره‌ای) و کروی می‌شوند که به چند مورد آن در اینجا پرداخته می‌شود [۴۱، ۸۶].

۱.۱.۲ داده‌های دایره‌ای

معرفی: جهت‌های دو بُعدی را می‌توان به صورت زاویه‌هایی نمایش داد که نسبت به یک «جهت صفر» مناسب به عنوان نقطه شروع و یک «جهت چرخش» (ساعت‌گرد یا پادساعت‌گرد) به عنوان جهت مثبت اندازه‌گیری می‌شوند. از آن‌جا که یک جهت فاقد اندازه (بزرگی) است، می‌توان آن را به‌طور مناسب به صورت نقاطی روی محیط یک دایره واحد با مرکز در مبدأ مختصات (S^1) یا به صورت بردارهای واحدی که مبدأ را به این نقاط متصل می‌کنند، نمایش داد. به دلیل این نمایش دایره‌ای، مشاهداتی مربوط به چنین جهت‌های دو بُعدی را «داده‌های دایره‌ای»^۳ می‌نامند. نمونه‌های متداول از این نوع داده‌ها شامل جهت باد و زمان وقوع رویدادها بر حسب ساعات شبانه‌روز (۲۴ ساعته) هستند. این داده‌ها با استفاده از یک توزیع تعریف شده بر روی دایره، موسوم به توزیع دایره‌ای، مدل‌سازی می‌شوند [۴۱، ۷۰].

دوم، گسترش کاربردهای عملی این مدل‌ها در داده‌های واقعی است. برای مثال، در زیست‌شناسی حرکتی، از مدل‌های دایره‌ای-خطی برای تحلیل وابستگی بین جهت و سرعت حرکت حیوانات، مسیرهای مهاجرتی و رفتارهای جستجوی غذا استفاده شده است [۳۵، ۷۶]. این مدل‌ها همچنین در اقلیم‌شناسی و علوم زیست‌محیطی برای تحلیل وابستگی بین جهت و شدت پدیده‌هایی مانند باد، جریان‌های اقیانوسی و شاخص‌های تغییرات اقلیمی [۱۲، ۲۹، ۳۷]، بیومکانیک [۷۷] و حتی در حوزه مالی برای توصیف نوسانات تناوبی و روابط پیچیده بین شاخص‌های اقتصادی به‌کار رفته‌اند [۸۱]. از سوی دیگر، مفصل‌های دایره‌ای-دایره‌ای برای مدل‌سازی وابستگی بین دو متغیر دایره‌ای، مانند جهت باد و جهت حرکت پرندگان، توسعه یافته‌اند [۱۲، ۵۳]. در ابعاد بالاتر، مفصل‌های کروی امکان مدل‌سازی وابستگی در داده‌های سه بُعدی را فراهم می‌کنند و در زمینه‌هایی چون فیزیک، تصویربرداری و ژئوفیزیک کاربرد دارند [۵۲].

همان‌طور که پیوسی و گارسیا-پورتوگوس [۸۴] اشاره کرده‌اند، از زمان انتشار کتاب مرجع ماردیا و جاپ [۷۰]، تعداد پژوهش‌ها در زمینه داده‌های جهتی چندمتغیره و مفصل‌های متناظر به صورت چشم‌گیری افزایش یافته است. به‌ویژه تحقیقات جدید بر توسعه معیارهای وابستگی مناسب برای داده‌های زاویه‌ای و ارزیابی روابط غیرخطی بین متغیرهای دایره‌ای و خطی تمرکز دارند [۳۵، ۴۸، ۱۰۵].

هدف این مقاله، مرور جامع و تحلیلی بر سیر ایجاد، توسعه و کاربردهای مفصل‌های جهتی شامل مفصل‌های دایره‌ای-خطی، دایره‌ای-دایره‌ای و کروی است. ساختار مقاله به شرح زیر است: در بخش دوم، به مبانی نظری پرداخته شده است. بخش‌های سوم، چهارم و پنجم هر کدام به ترتیب به بررسی مفصل‌های دایره‌ای-خطی، دایره‌ای-دایره‌ای و کروی اختصاص یافته است. در نهایت، در بخش ششم نتیجه‌گیری صورت گرفته

²Directional Data

³Circular Data

تصادفی خطی باشد، آنگاه $\Theta = X(\text{mod } 2\pi) \in [0, 2\pi)$ متناظر دایره‌ای پوشانده‌شده‌ی آن با تابع چگالی به صورت زیر است (هر متغیر تصادفی X روی خط حقیقی به پیمانه‌ی 2π به متغیر تصادفی دایره‌ای، Θ ، تبدیل می‌شود که آن را به صورت $\Theta = X(\text{mod } 2\pi)$ نشان می‌دهند. این عمل مانند این است که خط حقیقی را روی دایره به واحد رادیان بپوشانیم (بچرخانیم)، در این صورت تمام نقاط $x = \theta, \theta \pm 2\pi, \theta \pm 4\pi, \dots$ بر هم منطبق می‌شوند):

$$f_{\Theta}(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_X(\theta + 2k\pi), \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

توزیع کوشی پوشانده با چگالی زیر یکی دیگر از توزیع‌های دایره‌ای است [۷۰]:

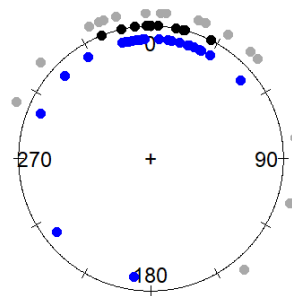
$$f_{\Theta}(\theta; \mu, \rho) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - \rho^2}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\theta - \mu)},$$

که در آن $\mu \in [-\pi, \pi)$ میانگین جهت و $\rho \in [0, 1]$ طول بردار میانگین است. پارامتر ρ تمرکز داده‌ها را کنترل می‌کند و $\rho = 0$ توزیع یکنواخت دایره‌ای را به دست می‌دهد. توزیع دیگری که بیشتر برای داده‌های دایره‌ای استفاده می‌شود، توزیع کاردیوئید با تابع چگالی زیر است [۷۰]:

$$f_{\Theta}(\theta; \mu, \rho) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \{1 + 2\rho \cos(\theta - \mu)\},$$

که در آن $\mu \in [-\pi, \pi)$ پارامتر مکان و $0 \leq \rho < 1/2$ پارامتر تمرکز است.

ترتیب دایره‌ای: ترتیب داده‌های خطی بر اساس مقادیر عددی آنها در نظر گرفته می‌شود. هر دنباله‌ای از داده‌های خطی را می‌توان مرتب کرد، زیرا این داده‌ها بر روی یک خط راست بیان می‌شوند. برای داده‌های دایره‌ای نیز لازم است رویکردی مشابه برای مرتب‌سازی پیشنهاد شود. با این حال، مهم‌ترین تفاوت بین داده‌های دایره‌ای و داده‌های خطی این است که داده‌های دایره‌ای روی یک دایره‌ی واحد نمایش داده می‌شوند و دارای ویژگی‌های تناوبی هستند. به طور شهودی، ترتیب در داده‌های دایره‌ای همواره با جهت ساعت‌گرد و پادساعت‌گرد توصیف می‌شود. هنگامی که تنها دو نقطه داده را روی محیط دایره در نظر بگیریم، این ترتیب یکتا نیست. از این رو، به طور پیش فرض ترتیب را با چرخاندن



شکل ۱: نمودار دایره‌ای داده‌های مربوط به جهت حرکت نوعی مورچه صحرایی تحت شرایط آزمایشی مختلف [۸۵].

مدل‌های توزیعی برای داده‌های دایره‌ای: تابع چگالی احتمال یک متغیر تصادفی دایره‌ای پیوسته، Θ ، که آن را با $f_{\Theta}(\theta)$ نشان می‌دهیم، به گونه‌ای است که برای $\theta \in \mathbb{R}$ ، $f_{\Theta}(\theta) \geq 0$ ، $f_{\Theta}(\theta + 2\pi) = f_{\Theta}(\theta)$ و $\int_{\theta}^{\theta+2\pi} f_{\Theta}(\omega) d\omega = 1$ بنا بر این، یک تابع نامنفی و با دوره تناوب 2π است و انتگرال آن در هر بازه‌ای به طول 2π برابر با ۱ می‌شود. در نتیجه، معمولاً چگالی احتمال دایره‌ای روی بازه‌ی $[0, 2\pi)$ یا $[-\pi, \pi)$ تعریف می‌شود. برای مثال، توزیع یکنواخت دایره‌ای، یکی از مهم‌ترین مدل‌ها برای داده‌های دایره‌ای، متناظر با حالتی است که هیچ جهت ترجیحی وجود ندارد. تابع چگالی احتمال این توزیع به صورت $f_{\Theta}(\theta) = 1/2\pi$ ، $\theta \in [0, 2\pi)$ است. تابع توزیع تجمعی دایره‌ای به عنوان یک تابع غیرتناوبی به صورت

$$F_{\Theta}(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} f(\omega) d\omega, \quad \theta \in [\theta_0, \theta_0 + 2\pi],$$

تعریف می‌گردد که در آن نقطه مرجع معمول (نقطه مبدأ قراردادی) θ_0 معمولاً برابر 0 یا $-\pi$ در نظر گرفته می‌شود [۸۴].

یکی دیگر از توزیع‌های دایره‌ای، توزیع فون میزس با تابع چگالی احتمال زیر است [۱۰۲]:

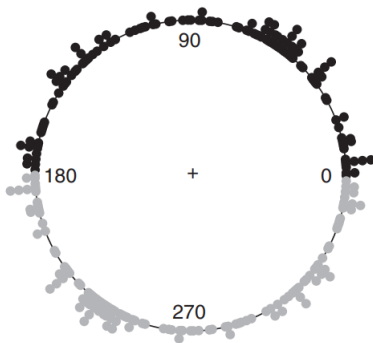
$$f_{\Theta}(\theta; \mu, k) = \frac{1}{2\pi \mathcal{I}_0(k)} e^{k \cos(\theta - \mu)},$$

که در آن $\mu \in [0, 2\pi)$ میانگین جهت، $k > 0$ پارامتر تمرکز و \mathcal{I}_v تابع بسل اصلاح شده نوع اول از مرتبه v است. توزیع‌های پوشانده نیز در این داده‌ها کاربرد هستند. اگر X یک متغیر

در این تابع، هنگامی که ترتیب از θ_1 به θ_2 ساعت‌گرد باشد، $h(\theta_1, \theta_2) > 0$ و زمانی که ترتیب از θ_1 به θ_2 پادساعت‌گرد باشد، $h(\theta_1, \theta_2) < 0$ است.

۲.۱.۲ داده‌های محوری

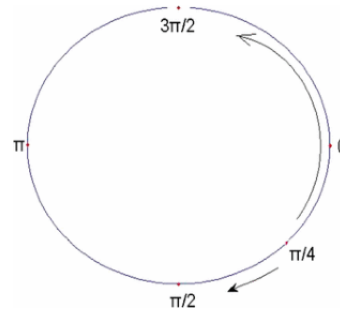
معرفی: در برخی مطالعات علمی مانند زمین‌شناسی، جهت‌گیری محورها اغلب از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. برای نمونه، یخچال‌شناسان در بررسی جهت‌گیری سنگ‌ها، ریگ‌ها یا صخره‌های رسوب‌گذاری شده توسط یخچال‌های طبیعی در حال عقب‌نشینی، معمولاً جهت‌گیری محور اصلی هر قطعه از رسوبات دست‌نخورده را اندازه‌گیری می‌کنند. به چنین مشاهده‌هایی از محورها، داده‌های محوری^۴ گفته می‌شود. داده‌های محوری از این جهت با داده‌های دایره‌ای تفاوت دارند که دو زاویه ψ و $\psi + \pi$ یک جهت محوری یکسان را تعریف می‌کنند. رویکرد استاندارد برای تحلیل داده‌های محوری این است که زوایای آنها را دو برابر کنیم تا داده‌های دایره‌ای به دست آیند، سپس هر نوع خلاصه آماری مورد نیاز را برای زوایای دوبرابر شده محاسبه کرده و در پایان برای به دست آوردن محور میانگین یا میانه، نتیجه را با تقسیم میانگین یا میانه‌ی زاویه‌ی دوبرابر شده



شکل ۳: نمودار داده‌های محوری: جهت‌گیری‌های اولیه محور طولی ۱۳۳ ورقه‌ی فلدسپات (نقاط سیاه) و مقادیر قرینه آنها (نقاط خاکستری) [۸۵].

مدل‌های توزیعی برای داده‌های محوری: برای یک متغیر تصادفی محوری پیوسته Ψ ، تابع چگالی احتمال، f_Ψ ، یک تابع

نقاط در امتداد کمان کوتاه‌تر تعیین می‌کنیم. برای مثال، ترتیب از $\pi/4$ تا $\pi/2$ ساعت‌گرد است، در حالی که ترتیب از $\pi/4$ تا $3\pi/2$ پادساعت‌گرد می‌باشد که در شکل ۲ نشان داده شده است.



شکل ۲: ترتیب داده‌های دایره‌ای [۱۰۵].

برای تعیین ترتیب بین دو داده دایره‌ای که در بازه‌ی 2π قرار دارند، اختلاف بین دو نقطه‌ی داده را با π مقایسه می‌کنیم. بدیهی است ترتیبی که در بالا تعریف شد، مستقل از انتخاب مبدأ است، اما شایان توجه است که خاصیت تراگذری^۴ ندارد. این بدان معنا است که می‌توان دو داده‌ی دایره‌ای را مرتب کرد، اما نمی‌توان به یک دنباله شامل بیش از دو مشاهده رتبه اختصاص داد. برای مثال، در شکل ۲ ترتیب از $\pi/4$ تا π ساعت‌گرد است، ترتیب از π تا $3\pi/2$ نیز ساعت‌گرد است، اما ترتیب از $\pi/4$ تا $3\pi/2$ پادساعت‌گرد می‌باشد. افزون بر این، هنگامی که فاصله کمانی بین θ_1 و θ_2 برابر π باشد، ترتیب از θ_1 به θ_2 نه ساعت‌گرد و نه پادساعت‌گرد است. بنابراین، برای ترکیب این دو وضعیت به یک تابع نیاز داریم. با توجه به رفتار تناوبی داده‌های دایره‌ای، از عملگر باقی‌مانده^۵ که مقدار باقی‌مانده را بازمی‌گرداند، استفاده می‌کنیم [۱۰۵].

تعریف ۱.۲. (تابع ترتیب) فرض کنید $\theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi)$ دو داده‌ی دایره‌ای باشند. تابع ترتیب h به صورت زیر تعریف می‌شود:

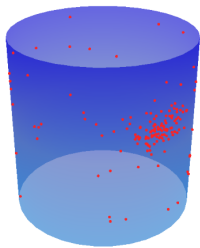
$$h(\theta_1, \theta_2) = [(\theta_1 - \theta_2 + 2\pi) \bmod 2\pi] - \pi = \begin{cases} \theta_1 - \theta_2 + \pi & -2\pi < \theta_1 - \theta_2 < 0, \\ \theta_1 - \theta_2 - \pi & 0 \leq \theta_1 - \theta_2 < 2\pi. \end{cases} \quad (1)$$

⁴Transitivity

⁵Modulus operator

⁶Axial data

است [۱]. نام «استوانه‌ای» از دامنه خاص این داده‌ها نشأت می‌گیرد، زیرا یک جفت داده زاویه‌ای و خطی را می‌توان به‌عنوان نقطه‌ای بر روی یک استوانه توصیف کرد [۶۰]. چنین داده‌هایی معمولاً در علوم طبیعی دیده می‌شوند. نمونه‌های معمول شامل جهت باد و سایر متغیرهای اقلیمی مانند سرعت باد یا دمای هوا، جهت حرکت یک حیوان و مسافت پیموده‌شده یا جهت موج و ارتفاع موج هستند.



شکل ۴: نمایش داده‌ها روی سطح یک استوانه واحد.

مدل‌های توزیعی برای داده‌های استوانه‌ای: تابع چگالی احتمال $f_{\Theta, X}$ برای یک بردار دایره‌ای-خطی، (Θ, X) ، تابع نامنفی است که بر روی یک استوانه تعریف می‌شود. این چگالی در بعد دایره‌ای دارای دوره تناوب 2π است، به این معنا که

$$f_{\Theta, X}(\theta, x) = f_{\Theta, X}(\theta + 2k\pi, x), \quad k \in \mathbb{Z}, \theta \in \mathbb{R},$$

و انتگرال آن روی $\mathbb{R} \times (\theta_0, \theta_0 + 2\pi)$ ، $\theta_0 \in \mathbb{R}$ ، برابر با یک است. بدیهی است که تابع توزیع تجمعی دومتغیره $F_{\Theta, X}$ نیز در بعد دایره‌ای دارای تناوب 2π بوده و در نقاط $(2k\pi, x)$ برای $k \in \mathbb{Z}$ و $x \in \mathbb{R}$ ناپیوستگی دارد [۱۲]. برای داده‌های استوانه‌ای مدل‌های زیادی ارائه شده است که از آن جمله می‌توان به توزیع‌های استوانه‌ای نوع ماردیا-ساتون و توزیع‌های استوانه‌ای نوع جانسون-وهرلی اشاره کرد (به کتاب لی و ویردیوت مراجعه شود [۶۴]). در اینجا به خانواده توزیع‌های جانسون-وهرلی [۴۵] اشاره می‌کنیم. فرض کنید (Θ, X) یک بردار تصادفی روی استوانه $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ باشد. در این صورت، تابع چگالی احتمال توأم این بردار تصادفی چنین است:

$$f_{\Theta, X}(\theta, x) = 2\pi g(2\pi[F_{\Theta}(\theta) \pm F_X(x)])f_{\Theta}(\theta)f_X(x), \quad (۴)$$

که در آن f_{Θ} و f_X ، $x \in \mathbb{R}$ ، $\theta \in [-\pi, \pi)$ ، به ترتیب توابع چگالی

نامنفی است که برای هر بازه به طول π ، انتگرال آن می‌شود و دوره تناوب آن π است؛ یعنی $f_{\Psi}(\psi + \pi) = f_{\Psi}(\psi)$. بنابراین، بازه $[0, \pi)$ دامنه‌ی متعارف Ψ است. بر این اساس، تابع توزیع تجمعی $F_{\Psi}(\psi) = \int_0^{\psi} f_{\Psi}(t)dt$ به ازای $0 \leq \psi < \pi$ ، نیم‌دایره را به بازه‌ی واحد تصویر می‌کند. آرنولد و سینگوپتا [۶] نشان دادند که اگر Θ یک متغیر تصادفی دایره‌ای باشد، آنگاه $\Psi = \Theta \pmod{\pi}$ یک متغیر تصادفی محوری است. از این رو، توابع چگالی احتمال محوری را با پوشاندن یک تابع چگالی دایره‌ای بر روی بازه $[0, \pi)$ می‌توان به‌دست آورد. به عبارت دیگر، اگر f_{Θ} یک چگالی دایره‌ای باشد، آنگاه چگالی محوری به‌دست‌آمده از آن به‌صورت زیر است:

$$f_{\Psi}(\psi) = f_{\Theta}(\psi) + f_{\Theta}(\psi + \pi), \quad 0 \leq \psi < \pi.$$

یکی از مهم‌ترین توزیع‌های محوری، توزیع فون میزس محوری با تابع چگالی احتمال زیر است:

$$f_{\Psi}(\psi) = \frac{1}{\pi \mathcal{I}_0(k)} \exp(k \cosh(\psi - \mu)), \quad (۲)$$

که در آن $0 \leq \mu < \pi$ و $k \geq 0$ است. یکی دیگر از توزیع‌های محوری پرکاربرد، توزیع کوشی پوشانده‌ی محوری با تابع چگالی زیر است:

$$f_{\Psi}(\psi) = \frac{1}{\pi} \frac{1 - k^2}{1 + k^2 - 2k^2 \cos(2(\psi - \mu))}, \quad (۳)$$

که در آن $0 \leq \mu < \pi$ و $0 \leq k < 1$ است. هر دو تابع چگالی در رابطه‌های (۲) و (۳) حول یک پارامتر مکان، μ ، متقارن هستند و k پارامتر شکل است. هنگامی که $k = 0$ باشد، هر دو چگالی به چگالی یکنواخت محوری، $f_{\Psi}(\psi) = 1/\pi$ ، تبدیل می‌شوند. [۷۴]

۳.۱.۲ داده‌های استوانه‌ای

معرفی: داده‌های استوانه‌ای^۷ مشاهداتی هستند که از دو بخش تشکیل شده‌اند: بخش جهتی (مجموعه‌ای از زوایا) که اغلب ماهیت دایره‌ای دارد و بخش خطی (که معمولاً یک عدد حقیقی مثبت است). این ساختار، دلیل به‌کارگیری اصطلاحات جایگزین برای «داده‌های جهتی-خطی» یا «دایره‌ای-خطی»

^۷Cylindrical data

دایره‌ای، (Θ_1, Θ_2) ، تابع نامنفی است که بر روی سطح یک چنبره، \mathbb{S}^2 ، تعریف می‌شود. این تابع در هر دو بعد خود دارای دوره تناوب 2π است، یعنی

$$f_{\Theta_1, \Theta_2}(\theta_1, \theta_2) = f_{\Theta_1, \Theta_2}(\theta_1 + 2k\pi, \theta_2 + 2j\pi), \quad k, j \in \mathbb{Z}, \theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi)$$

و انتگرال آن روی ناحیه $(\theta_2, \theta_2 + 2\pi) \times (\theta_1, \theta_1 + 2\pi)$ ، برابر با یک است. بدیهی است که تابع توزیع تجمعی دو متغیره F_{Θ_1, Θ_2} نیز در هر دو بعد دارای دوره تناوب 2π بوده و در نقاط $(\theta_1, 2k\pi)$ و $(2k\pi, \theta_2)$ برای $k \in \mathbb{Z}$ ، ناپیوستگی دارد [۱۲]. ساده‌ترین مدل برای داده‌های چنبره‌ای، توزیع یکنواخت پیوسته دو متغیره روی چنبره با تابع چگالی زیر است [۸۵]:

$$f_{\Theta_1, \Theta_2}(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{4\pi^2}, \quad 0 \leq \theta_1, \theta_2 < 2\pi,$$

که تابع چگالی توأم دو متغیر تصادفی پیوسته و مستقل با توزیع‌های حاشیه‌ای یکنواخت دایره‌ای است. ماردیا [۶۷] در سال ۱۹۷۵ توزیع چنبره‌ای دیگری از نوع فون‌میزس پیشنهاد کرد. وهرلی و جانسون [۱۰۴] در سال ۱۹۸۰ خانواده توزیع‌های کلی‌تری را برای توزیع‌های دایره‌ای دو متغیره با چگالی زیر معرفی کردند:

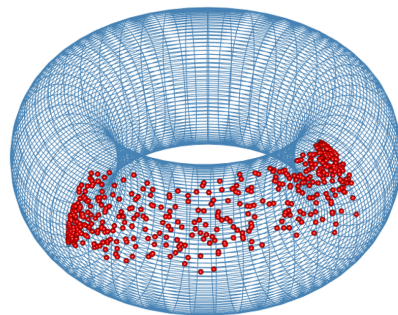
$$f_{\Theta_1, \Theta_2}(\theta_1, \theta_2) = 2\pi f_{\Theta_1}(\theta_1) f_{\Theta_2}(\theta_2) g(2\pi[F_{\Theta_2}(\theta_2) - qF_{\Theta_1}(\theta_1)]), \quad (5)$$

که در آن f_{Θ_j} و F_{Θ_j} به ترتیب چگالی احتمال حاشیه‌ای و تابع توزیع تجمعی حاشیه‌ای برای Θ_j ($j = 1, 2$) و g یک چگالی پیونددهنده دایره‌ای است و $q = \pm 1$ وابستگی مثبت یا منفی بین دو متغیر را تعیین می‌کند. جونز و همکاران [۴۸] حالت‌های خاصی از خانواده (۵) را مطالعه کردند. کاتو و پیوسی [۵۵] حالت خاصی از خانواده (۵) را بررسی کردند که دارای تابع چگالی احتمال با فرم بسته بوده و دارای ویژگی‌های تک‌مدی و تقارن نقطه‌ای است و توزیع‌های حاشیه‌ای و شرطی آن همگی از نوع کوشی پوشانده هستند.

احتمال Θ و X ، F_{Θ} و F_X توابع توزیع متناظر با آنها و g یک تابع چگالی روی دایره است. جانسون و وهرلی [۴۵] حالت‌های خاصی از این خانواده را بررسی کردند که در آن X دارای توزیع نرمال و Θ دارای توزیع یکنواخت دایره‌ای یا توزیع فون‌میزس است. جانسون و وهرلی [۴۴] در سال ۱۹۷۷ و ایشام [۳۹] در سال ۱۹۷۷ قبلاً از ساختارهای مشابه استفاده کرده بودند. در سال‌های اخیر، شکل‌های دیگری از این مدل برای تحلیل داده‌های استوانه‌ای در حوزه‌هایی مانند تحلیل انرژی بادی [۱۳]، مهندسی اقیانوس [۹۸] و پردازش تصاویر [۸۹] به کار گرفته شده است.

۴.۱.۲ داده‌های چنبره‌ای

معرفی: داده‌های چنبره‌ای^۸ نوعی از داده‌های جهتی دو بعدی شامل دو متغیر دایره‌ای (زاویه‌ای) هستند. هر مشاهده در چنین داده‌هایی را می‌توان به صورت یک نقطه بر روی سطح یک چنبره، یعنی سطح حاصل از دوران یک دایره در فضا، نمایش داد. این نوع داده‌ها زمانی پدید می‌آیند که دو پدیده زاویه‌ای (دایره‌ای) به صورت هم‌زمان اندازه‌گیری می‌شوند؛ مانند جهت باد در صبح و بعد از ظهر، زمان وقوع دو چرخه زیستی متوالی (نظیر زمان قله‌های فشار خون یا دمای بدن در طول روز) یا موقعیت ژن‌های همتا در ژنوم‌های دایره‌ای [۳۸].



شکل ۵: نمایش داده‌های دایره‌ای-دایره‌ای روی سطح یک چنبره‌ی واحد [۷۵].

مدل‌های توزیعی برای داده‌های چنبره‌ای: مشابه توزیع‌های استوانه‌ای، تابع چگالی احتمال f_{Θ_1, Θ_2} برای یک متغیر دایره‌ای-

⁸Toroidal data

۵.۱.۲ داده‌های کروی

توزیع نرمال چندمتغیره است) [۶۴]:

$$f_{\Xi}(\xi; \mu, k) = \frac{\left(\frac{k}{\gamma}\right)^{d/2-1}}{2\pi^{d/2} \mathcal{I}_{d/2-1}(k)} e^{k\xi' \mu}, \quad (۶)$$

که در آن $\mu \in \mathbb{S}^{d-1}$ بردار میانگین جهت، $k \geq 0$ پارامتر تمرکز و $\mathcal{I}_{d/2-1}$ تابع بسط اصلاح‌شده از نوع اول و مرتبه $d/2-1$ است. تابع چگالی در رابطه (۶) تک‌مُد حول پارامتر مکان μ است و تمرکز آن حول مُد توسط $k \geq 0$ تنظیم می‌شود. در حالت حدی $k \rightarrow 0$ به توزیع یکنواخت کروی میل می‌کند. حالت $d = 2$ چگالی فون میزس [۱۰۲]، حالت $d = 3$ چگالی فیشر [۲۴] و حالت d کلی چگالی‌های لانژوان [۶۴] را به‌دست می‌دهد. از دیگر مدل‌های کلاسیک می‌توان به توزیع‌های کنت، فیشر-واتسون، بینگهام-ماریا، بینگهام و واتسون اشاره کرد که دو مدل آخر، مدل‌هایی برای داده‌های محوری هستند [۷۰]. در سال‌های اخیر، توجه بیشتری به توزیع‌های متقارن چرخشی شده است (به کتاب لی و ویردیپوت [۶۴] مراجعه کنید).

۲.۲ مفصل و ویژگی‌های آن

تابع $C: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ با ویژگی‌های زیر یک مفصل است:

۰۱. برای هر $u, v \in [0, 1]$ ، $C(u, 1) = u$ ، $C(1, v) = v$ و

$$C(u, 0) = C(0, v) = 0.$$

۰۲. برای هر $u_1, u_2, v_1, v_2 \in [0, 1]$ که $u_1 \leq u_2$ ، $v_1 \leq v_2$:

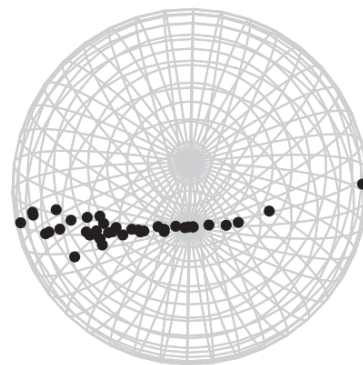
$$C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0.$$

قضیه ۲.۲. (قضیه اسکالر) فرض کنید که $F_{X,Y}$ یک تابع توزیع توأم دومتغیره با توابع توزیع حاشیه‌ای F_X و F_Y باشد. در این صورت، یک مفصل C وجود دارد به طوری که برای تمام $x, y \in \mathbb{R}^2$

$$F_{X,Y}(x, y) = C(F_X(x), F_Y(y)). \quad (۷)$$

اگر توابع توزیع حاشیه‌ای F_X و F_Y پیوسته باشند، آنگاه مفصل C یکتا است. برعکس، اگر C یک مفصل و F_X و F_Y توابع

معرفی: مشابه با جهت‌ها در دو بُعد، جهت‌ها در سه بُعد را می‌توان با دو زاویه (شبیبه به نمایش نقاط روی سطح زمین با طول و عرض جغرافیایی آنها)، یا به صورت بردارهای واحد در سه بُعد و یا به صورت نقاطی روی سطح یک کره واحد (\mathbb{S}^3)، نمایش داد. از این رو، داده‌های جهتی در سه بُعد را «داده‌های کروی»^۹ نیز می‌نامند (برای بیش‌تر از سه جهت، داده‌ها روی یک ابرکره^{۱۰} نمایش داده می‌شوند) [۴۱].



شکل ۶: نمودار کروی داده‌های مربوط به اندازه‌گیری‌های مغناطیس باقی‌مانده در لای سنگ‌های رسی در منطقه‌ای از استرالیا [۶۴].

مدل‌های توزیعی برای داده‌های کروی: شناخته‌شده‌ترین

و ساده‌ترین توزیع کروی، توزیع یکنواخت با چگالی $\frac{1}{A_{d-1}}$ روی \mathbb{S}^{d-1} است که در آن $A_{d-1} = 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$ و Γ تابع گاما است. (برای $d \geq 4$ از اصطلاح ابرکره استفاده می‌شود) [۶۴]. در توزیع یکنواخت کروی تمام جهت‌ها احتمال برابر دارند و هیچ جهت ترجیحی وجود ندارد. این توزیع تحت تبدیل‌های چرخش (اگر داده‌ها به یک مقدار معین انتقال داده شوند، توزیع نیز به همان مقدار تغییر می‌کند و مجدداً یک توزیع یکنواخت است) و بازتاب (دوران توزیع) ناوردا است. با این حال، اغلب داده‌های واقعی جهت‌دار دارای الگوی تمرکز حول یک یا چند جهت مشخص هستند و نیاز به مدل‌های غیریکنواخت دارند [۷۰]. یکی از مدل‌های کروی غیریکنواخت، توزیع فیشر-فون میزس-لانژوان (FvML)^{۱۱} با تابع چگالی زیر است (که هم‌تای کروی

⁹Spherical Data

¹⁰Hypersphere

¹¹Fisher-von Mises-Lavgevin

مقادیر دارای ماهیت تناوبی هستند. برای مثال، در داده‌های دایره‌ای، زوایای 0 و 2π در واقع یک نقطه واحد را نشان می‌دهند و بنابراین باید کاملاً برابر در نظر گرفته شوند. مفصل خطی این پیوستگی تناوبی را در نظر نمی‌گیرد که منجر به نتیجه‌گیری نادرست می‌شود. به همین دلیل، برای تحلیل چنین داده‌هایی باید از مفصل‌های مناسب برای داده‌های جهتی استفاده نمود.

۳ مفصل‌های دایره‌ای-خطی

۱.۳ توسعه و کاربردها

مفصل‌های دایره‌ای-خطی که با $C_{\Theta, X}$ نشان داده می‌شوند، می‌توانند با در نظر گرفتن ویژگی‌های توزیع‌های حاشیه‌ای دایره‌ای نیز تعریف شوند، به گونه‌ای که شرط زیر (ویژگی

تناوبی بودن) برای چگالی آنها برقرار باشد:

$$c_{\Theta, X}(0, v) = c_{\Theta, X}(1, v), \quad \forall v \in [0, 1], \quad (10)$$

که در آن چگالی مفصل دایره‌ای-خطی متناظر با (Θ, X) است. بنابراین، تابع چگالی دایره‌ای-خطی با چگالی‌های احتمال حاشیه‌ای f_{Θ} ، f_X به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f_{\Theta, X}(\theta, x) = c_{\Theta, X}(F_{\Theta}(\theta), F_X(x)) f_{\Theta}(\theta) f_X(x), \quad (11)$$

که در آن $\theta \in [0, 2\pi)$ و $x \in \mathbb{R}$.

مفصل‌های دایره‌ای-خطی از دهه ۱۹۷۰ در ادبیات آماری از جمله در آثار جانسون و وهرلی [۴۴، ۴۵] مطرح بوده‌اند. هرچند در آن زمان هنوز واژه «مفصل» به کار نمی‌رفت، اما آنها در عمل یک مفصل ساخته بودند. برای نخستین بار، فرناندز-دوران [۲۲] در سال ۲۰۰۴ در مقاله خود از واژه «مفصل» برای مدل‌سازی وابستگی بین متغیرهای دایره‌ای و خطی استفاده کرد. ایشان ساختار توزیع جانسون-وهرلی (۴) را در چارچوب نظریه توابع مفصل به‌ویژه رابطه (۱۱) شناسایی و به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$f_{\Theta, X}(\theta, x) = 2\pi c_{\Theta, X}(2\pi(F_{\Theta}(\theta) \pm F_X(x))) \times f_{\Theta}(\theta) f_X(x), \quad (12)$$

توزیع یک‌متغیره باشند، آنگاه تابع $F_{X, Y}$ در رابطه (۷)، یک تابع توزیع توأم دو متغیره با حاشیه‌های F_X و F_Y است.

ویژگی‌های مفصل در قضیه اسکالر، آن را به ابزاری پرکاربرد برای مدل‌سازی در آمار چندمتغیره، مالی، بیمه، هیدرولوژی و علوم محیطی تبدیل می‌کنند. تابع چگالی احتمال توأم بردار (X, Y) از متغیرهای تصادفی پیوسته را می‌توان با استفاده از مفصل به صورت زیر به دست آورد:

$$f_{X, Y}(x, y) = c(F_X(x), F_Y(y)) f_X(x) f_Y(y), \quad (8)$$

که در آن $f_X(x)$ و $f_Y(y)$ به ترتیب نشان‌دهنده توابع چگالی احتمال حاشیه‌ای X و Y هستند و $c(u, v) = \frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u \partial v}$ چگالی مفصل است. هر مفصل در کران‌های فرشه-هافدینگ زیر صدق می‌کند [۷۹]:

$$W(u, v) \leq C(u, v) \leq M(u, v),$$

که توابع $W(u, v) = \max(u + v - M(u, v))$ و $M(u, v) = \min(u, v)$ نیز مفصل هستند. یکی از مفصل‌های معروف دیگر مفصل استقلال با چگالی زیر است:

$$\Pi(u, v) = uv.$$

تعریف ۳.۲. براساس یک نمونه تصادفی (X_i, Y_i) و رتبه‌های (R_i, S_i) ، $i = 1, \dots, n$ ، مفصل تجربی به صورت زیر تعریف می‌شود [۳۱]:

$$C_n(u, v) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I\left(\frac{R_i}{n+1} \leq u, \frac{S_i}{n+1} \leq v\right), \quad (9)$$

که در آن $I(\cdot)$ تابع نشانگر است.

هنگامی که یکی از متغیرهای تصادفی ماهیت دایره‌ای داشته باشد، می‌توان همان رویه را دنبال کرد، اما برای تعیین رتبه‌های متغیر دایره‌ای، نیاز به نقطه یک مرجع خواهیم داشت. در این مقاله، نقطه مرجع را $-\pi$ در نظر می‌گیریم. با این حال، کاربرد مفصل‌های خطی برای داده‌های جهتی نامناسب است، زیرا این مفصل‌ها براساس وابستگی بین داده‌های خطی در فضای اقلیدسی طراحی شده‌اند؛ در حالی که در داده‌های جهتی،

بازتاب یافته \bar{c} شناخته می‌شود. همچنین، گارسیو-پورتوگوس و همکاران [۲۹] یک مدل ناپارامتری برای هر سه خانواده ((۱۳)، (۱۴)، (۱۵)) پیشنهاد دادند که در آن هم توزیع‌های حاشیه‌ای و هم مفصل‌ها در حالت‌های مختلف، با استفاده از برآوردگرهای ناپارامتری چگالی هسته‌ای تقریب زده می‌شوند. با این حال، آنها خاطر نشان کردند که مفصل استفاده شده دارای ساختار تقارن ویژه‌ای است که آزمون‌های مناسبی برای ارزیابی کارایی آن در توصیف وابستگی بین متغیرها وجود ندارند. کارنیسرو و همکاران [۱۲] در سال ۲۰۱۳ روش ناپارامتری انعطاف‌پذیری را برای برآورد روابط وابستگی بین متغیرهای دایره‌ای و خطی معرفی کردند که بر پایه مفصل تجربی برنشتاین [۹۰] استوار است. چگالی مفصل ارائه شده آنها به صورت زیر است:

$$c_{\Theta, X}(u, v) = \sum_{j_1=1}^K \sum_{j_2=1}^K p_{j_1, j_2} \beta(u|j_1, k - j_1 + 1) \times \beta(v|j_2, k - j_2 + 1), \quad (16)$$

که در آن K مرتبه مفصل برنشتاین است که از ریشه سوم حجم نمونه به دست می‌آید [۹۰]، $\beta(\cdot; \cdot, \cdot)$ تابع چگالی توزیع بتا و ضریب آمیختگی p_{j_1, j_2} برابر است با

$$p_{j_1, j_2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I\left(\frac{j_1 - 1}{k} < \hat{F}_{\Theta}(\theta_i) \leq \frac{j_1}{k}, \frac{j_2 - 1}{k} < \hat{F}_X(x_i) \leq \frac{j_2}{k}\right), \quad j_1, j_2 = 1, \dots, k \quad (17)$$

که در آن n حجم نمونه و I تابع نشانگر هستند. برای داشتن ویژگی تناوبی رابطه (۱۰)، این ضریب باید شرط‌های

$$\bar{p}_{j_1 j_2} = \bar{p}_{k j_2} = (p_{i j_2} + p_{k j_2})/2$$

را برای $k, j_2 = 1, \dots, k$ و $\bar{p}_{j_1 j_2} = p_{j_1 j_2}$ را برای $k, j_2 \neq 1$ داشته باشد. با قراردادن این چگالی مفصل در رابطه (۱۱) و برآورد F_X و F_{Θ} و چگالی‌های متناظر آن، چگالی برنشتاین دومتغیره به دست می‌آید. این روش قادر است هر نوع ساختار وابستگی را تقریب زده و برآورد کند. در این مقاله، آنها به بررسی و تحلیل وابستگی بین داده‌های جهت باد (متغیر دایره‌ای) و میزان بارندگی (متغیر خطی) پرداختند.

که در آن $c_{\Theta, X}$ یک چگالی مفصل به صورت

$$c_{\Theta, X}(u, v) = 2\pi g(2\pi(u \pm v)), \quad (13)$$

و g چگالی یک متغیر تصادفی دایره‌ای در بازه $[0, 2\pi]$ است. رابطه (۱۳) خانواده‌ای از چگالی‌های یک مفصل دایره‌ای-خطی است که در آن u بعد دایره‌ای و v بعد خطی را نشان می‌دهند. نویسنده با استفاده از این مدل مفصل مبنا به بررسی و مدل‌سازی غلظت ازن در سطح زمین در مکزیکوسیتی پرداخت. در این تحقیق، ساعت روز به‌عنوان متغیر دایره‌ای و میزان آلودگی به‌عنوان متغیر خطی در نظر گرفته شدند. فرناندز-دوران [۲۱] در سال ۲۰۰۷ نیز مفصل در رابطه (۱۳) را برای بررسی رابطه بین غلظت ازن و جهت باد در شهر مکزیکوسیتی به‌کار بردند. کاتو [۵۲] در سال ۲۰۰۹ یک مفصل کروی را معرفی نمود که قابلیت تعمیم به داده‌های استوانه‌ای و چنبره‌ای را نیز دارد. به این مفصل در بخش «مفصل‌های کروی» پرداخته خواهد شد. گارسیو-پورتوگوس و همکاران [۲۹] در سال ۲۰۱۳ ضمن نام‌گذاری مفصل رابطه (۱۳) به نام مفصل جانسون و وهرلی، بر مبنای نتیجه (۳-۲-۵) کتاب نلسن [۷۹]، خانواده‌ای از مفصل‌های دایره‌ای-خطی مرتبه دو^{۱۲} را معرفی کردند. مفصل و چگالی متناظر این خانواده به صورت زیر هستند:

$$C_{\Theta, X}(u, v) = uv + \alpha \sin(2\pi u)v(1-v), \quad (14)$$

$$c_{\Theta, X}(u, v) = 1 + 2\pi\alpha \cos(2\pi u)(1-2v),$$

که در آن $|\alpha| \leq (2\pi)^{-1}$. این خانواده از مفصل‌ها بوسیله پارامتر α پارامترسازی می‌شود که بیانگر میزان انحراف از مفصل استقلال متناظر با $\alpha = 0$ است. یک روش ممکن برای ساخت مفصل‌های جدید دایره‌ای-خطی، ترکیب یک مفصل با مفصل‌های مناسب دیگر است [۷۹]. به‌عنوان مثال، برای هر چگالی مفصل دلخواه \bar{c} ، آمیخته‌ی

$$c_{\Theta, X}(u, v) = \frac{1}{4}(\bar{c}(u, v) + \bar{c}(1-u, v) + \bar{c}(u, 1-v) + \bar{c}(1-u, 1-v)), \quad (15)$$

چگالی مفصل جدیدی می‌سازد که در آن $c_{\Theta, X}(0, v) = c_{\Theta, X}(1, v)$. مفصل آمیخته‌ی رابطه (۱۵) به‌عنوان مفصل

پیشنهاد کرد که با چگالی‌های استوانه‌ای مبتنی بر مفصل مرتبط است. این مدل یک رویکرد مفید و قابل محاسبه ارائه می‌دهد که هم‌زمان همبستگی دایره‌ای-خطی و خودهمبستگی زمانی داده‌ها را در نظر می‌گیرد. مدل ارائه‌شده به صورت زیر است: فرض کنید $z = (z_t, t = 1, 2, \dots, T)$ ، $z_t = (\theta_t, x_t)$ یک سری زمانی استوانه‌ای باشد. همچنین، فرض کنید که توزیع داده‌ها بوسیله یک زنجیره مارکوف پنهان با K وضعیت توصیف می‌شود. این زنجیره نمایانگر کلاس‌های نهفته (وابسته به زمان) است و می‌تواند به صورت دنباله‌ی $u = (u_t, t = 1, \dots, T)$ از متغیرهای تصادفی با توزیع K جمله‌ای به صورت $u_t = (u_{t1}, \dots, u_{tK})$ تعریف شود، به طوری که متغیر برنولی t_i -ام نشان‌دهنده‌ی عضویت در کلاس i -ام در زمان t است. مشخصه‌ی مدل مارکوف پنهان با این فرض کامل می‌شود که مشاهدات، با شرطی کردن بر تحقق زنجیره‌ی مارکوف، از یکدیگر مستقل‌اند. در نتیجه، توزیع شرطی فرایند مشاهده‌شده با توجه به فرایند نهفته، شکل ضربی دارد که به صورت چگالی زیر قابل بیان است:

$$f(z|u; \eta_1, \dots, \eta_k) = \prod_{t=1}^T \prod_{k=1}^K f_q(z_t; \eta_k)^{u_{tk}},$$

و در آن $f(z; \eta)$ ، $k = 1, \dots, K$ چگالی‌های استوانه‌ای مربوط به رابطه (۴) هستند و با بردار پارامتر $\eta_k = (\alpha_k, \beta_k, \gamma_k)$ مشخص می‌شوند. این مدل برای تحلیل وابستگی بین متغیرهای جهت موج و ارتفاع موج برای یک مجموعه داده واقعی به‌کار برده شده است [۶۱].

هردیا-زاوونی و مونتیس-ایتوریزاگو [۳۳] در سال ۲۰۱۹ چارچوب جدیدی برای محاسبه ترازهای محیط‌زیستی جهت‌ی در اقیانوس‌ها و دریاها عمیق، ارائه کردند. آنها از مفصل‌های واین (درختی)^{۱۸} سه‌بعدی برای مدل‌سازی توزیع احتمال توأم متغیرهای خطی (مانند ارتفاع موج و دوره تناوب طیفی قله موج) به شرط متغیرهای دایره‌ای (مانند جهت موج یا باد)

روی و همکاران [۸۹] در سال ۲۰۱۷ مدلی به نام JCLMM^{۱۳} پیشنهاد کردند که یک مدل آمیخته‌ی متناهی برای خوشه‌بندی داده‌های استوانه‌ای است. در این مدل، برای توصیف رابطه بین فام^{۱۴} (متغیر دایره‌ای) و خلوص رنگ^{۱۵} (متغیر خطی) در یک پیکسل تصویر، از مفصل دایره‌ای-خطی رابطه (۱۳) استفاده شده است. در این مفصل به جای تابع g از چگالی توزیع فون‌میزس استفاده شده که پارامترهای آن با روش ماکسیم‌درستمایی در قالب الگوریتم EM^{۱۶} [۱۶] و بر پایه میانگین و بردار تمرکز دایره‌ای هر خوشه برآورد می‌شوند. با قرار دادن تابع به‌دست آمده در توزیع جانسون-وهرلی رابطه (۴)، یک توزیع توأم برای متغیرهای فام و خلوص رنگ به‌دست آوردند و برای بخش‌بندی پلاک‌های پسوریازیس در تصاویر پوست، به‌کار گرفتند. میندوزا-تورس و همکاران [۷۳] در سال ۲۰۱۷ نیز با استفاده از مفصل‌های برنشتاین، وابستگی بین جهت (متغیر دایره‌ای) و طول (متغیر خطی) شکاف‌ها در مخازن نفت و گاز را مدل‌سازی کردند که قبلاً به صورت مستقل در نظر گرفته می‌شدند. آنها با مثال‌هایی نشان دادند که وابستگی معناداری بین جهت و طول شکاف‌ها وجود دارد و روش پیشنهادی آنها قادر به بازتولید این وابستگی در مدل‌های شبکه‌ی گسسته شکاف است.

سرمینتو و همکاران [۹۱] در سال ۲۰۱۸ روشی برای شبیه‌سازی سری‌های زمانی دومتغیره سرعت و جهت باد ارائه کردند. در این روش، آنها از مفصل تجربی برنشتاین برای مدل‌سازی وابستگی‌های غیرخطی بین سری‌های زمانی سرعت و جهت باد استفاده نمودند. آنها در مفصل برنشتاین رابطه (۱۶) به جای z_1, z_2 ، اندیس‌های t_1, t_2 را به‌کار بردند که وابسته به زمان هستند. این رویکرد توانست وابستگی موجود در داده‌های واقعی را نسبت به روش‌های سنتی و مبتنی بر فرض نرمال بودن، به خوبی بازتولید کند. لگونا [۶۱] در سال ۲۰۱۹ یک مدل مارکوف پنهان (HMM)^{۱۷} برای بخش‌بندی سری‌های زمانی استوانه‌ای مبتنی بر تعداد محدودی از رده‌های پنهان

¹³Joint circular-linear mixture model

¹⁴Hue

¹⁵Chroma

¹⁶Expectation-maximization

¹⁷Hidden Markov model

¹⁸Vine Copulas

متغیر دایره‌ای Θ را در نظر بگیرید. بنا به رابطه (۱۸) داریم،

$$f_{X|\Theta}(x|\theta) = c_{\Theta,X}(F_{\Theta}(\theta), F_X(x))f_X(x), \quad (19)$$

$$f_{Y|\Theta}(y|\theta) = c_{\Theta,Y}(F_{\Theta}(\theta), F_Y(y))f_Y(y), \quad (20)$$

$$f_{Y|X,\Theta}(y|x,\theta) = c_{X,Y|\Theta}(F_{X|\Theta}(x|\theta), F_{Y|\Theta}(y|\theta)) \\ \times f_{Y|\Theta}(y|\theta). \quad (21)$$

روابط (۱۹-۲۱) شامل سه مفصل دومتغیره هستند: وابستگی زوجی بین هر متغیر خطی و متغیر دایره‌ای توسط مفصل‌های $C_{\Theta,X}(F_{\Theta}(\theta), F_X(x))$ و $C_{\Theta,Y}(F_{\Theta}(\theta), F_Y(y))$ و وابستگی بین دو متغیر خطی مشروط بر متغیر دایره‌ای توسط مفصل $C_{X,Y|\Theta}(F_{X|\Theta}(x|\theta), F_{Y|\Theta}(y|\theta))$ مشخص می‌شوند. توزیع‌های حاشیه‌ای شرطی X و Y به شرط $\Theta = \theta$ به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$F_{X|\Theta}(x|\theta) = C_{X|\Theta}(v|u) = \frac{\partial C_{\Theta,X}(u,v)}{\partial u},$$

$$F_{Y|\Theta}(y|\theta) = C_{Y|\Theta}(w|u) = \frac{\partial C_{\Theta,Y}(u,w)}{\partial u},$$

که در آن $u = F_{\Theta}(\theta)$ ، $v = F_X(x)$ ، $w = F_Y(y)$ و توزیع شرطی حاشیه‌ای $F_{Y|X,\Theta}(y|x,\theta)$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$F_{Y|X,\Theta}(y|x,\theta) = \frac{\partial C_{X,Y|\Theta}(v_{\theta}, w_{\theta})}{\partial v_{\theta}},$$

که در آن $v_{\theta} = F_{X|\Theta}(x|\theta)$ ، $w_{\theta} = F_{Y|\Theta}(y|\theta)$ است.

وانگ و همکاران [۱۰۳] در سال ۲۰۲۱ مدل‌سازی داده‌های استوانه‌ای را با استفاده از مفصل‌های واین (درختی) گسترش دادند. آنها مدل زیر را برای مدل‌سازی دو متغیر خطی و یک متغیر دایره‌ای ارائه نمودند و آن را C-L-L^{۱۹} نام نهادند:

$$c_{\Theta,X,Y}[F_{\Theta}(\theta), F_X(x), F_Y(y)] = c_{\Theta,X}[F_{\Theta}(\theta), F_X(x)] \\ \times c_{\Theta,Y}[F_{\Theta}(\theta), F_Y(y)]c_{X,Y|\Theta}[F_{X|\Theta}(x|\theta), F_{Y|\Theta}(y|\theta)],$$

و به بررسی ویژگی‌های این چگالی مفصل پرداختند و توزیع‌های شرطی استفاده‌شده در آن را برای مفصل جانسون-وهرلی در رابطه (۱۳)، مفصل مرتبه دو در رابطه (۱۴) و چگالی مفصل برنشتاین در رابطه (۱۶) نیز محاسبه کردند. همچنین، آنها به تحلیل وابستگی بین مشاهدات سالانه جهت باد، سرعت باد و

استفاده نمودند. هسته این روش، استفاده از دو مدل مفصلی دایره‌ای-خطی برای ساختار وابستگی بود. مدل جانسون-وهرلی با تابع چگالی رابطه (۱۳) و مفصل مرتبه دو که در رابطه (۱۴) بیان شده است.

آنها چارچوب ریاضی مقاله خود را بر مبنای تبدیلات روزنبلات و مفصل‌های واین (درختی) بنا نهادند. ابتدا با استفاده از تبدیلات روزنبلات توزیع‌های شرطی حاشیه‌ای را برای d متغیر خطی $(X = (X_1, X_2, \dots, X_d))$ و یک متغیر دایره‌ای (Θ) و سپس برای دو متغیر خطی و یک متغیر دایره‌ای بررسی نمودند. برای این کار، مفصل سه‌متغیره $C_{\Theta,X,Y}(u,v,w)$ را طوری در نظر گرفتند که در آن $u = F_{\Theta}(\theta)$ ، $v = F_X(x)$ و $w = F_Y(y)$ هستند.

از آنجایی که به دست آوردن توزیع‌های شرطی حاشیه‌ای در تبدیلات روزنبلات مستلزم شناخت مفصل سه متغیره Θ ، X و Y است، کار با این روش چندان ساده نیست. بنابراین، از فرمول‌بندی مفصل واین (درختی) برای ساخت توزیع‌های چندمتغیره به‌عنوان یک رویکرد جایگزین استفاده نمودند. در این رویکرد، توزیع‌های چندمتغیره با استفاده از مفصل‌های دومتغیره به‌عنوان بلوک‌های سازنده، ساخته می‌شوند. مزیت این رویکرد، انعطاف‌پذیری در فراهم‌آوردن توزیع‌های چندمتغیره از طریق مفصل‌های دومتغیره‌ای است که وابستگی بین زوج‌های متغیرهای تصادفی را مدل می‌کنند و روش‌های کارآمدی برای برآورد آنها در دسترس است.

در رویکرد مفصل واین (درختی)، چگالی شرطی $f(y|x)$ برحسب مفصل‌های شرطی دومتغیره به صورت زیر بیان می‌شود:

$$f(y|x) = c_{y,x_j|x_{-j}}(F(y|x_{-j}), F(x_j|x_{-j})) \\ \times f(y|x_{-j}), \quad (18)$$

که در آن x_j یک مؤلفه انتخاب‌شده دلخواه از بردار x ، x_{-j} بردار x بدون مؤلفه x_j و $c_{y,x_j|x_{-j}}$ چگالی مفصل دومتغیره شرطی x_j و x_{-j} به شرط x_{-j} هستند. حال دو متغیر خطی X و Y و

¹⁹Circular-linear-linear model

مرتبه سه متقارن (نسبت به u) هستند. قابل یادآوری است که مرتبه مفصل‌های دایره‌ای-خطی نسبت به v (بعد خطی مدل) ارزیابی می‌شود. آنها برای ساخت مفصل‌های دایره‌ای-خطی متقارن، ترکیب مفصل‌های خطی را به‌عنوان یک روش دیگر معرفی کردند. در این راستا، از دو ویژگی مفصل‌های خطی استفاده می‌شود [۷۹]:

- ترکیب خطی محدب چند مفصل نیز یک مفصل است.
 - بازتاب‌های متعامد چگالی یک مفصل $c(u, v)$ نسبت به خطوط $u = \frac{1}{2}$ یا $v = \frac{1}{2}$ نیز یک چگالی مفصل است.
- ترکیب مفصل‌ها به دو شیوه انجام می‌شود که در ادامه به آنها می‌پردازیم:

۱. ترکیب خطی مفصل‌های بازتابی^{۲۴}: در برخی موارد خاص، بازتاب‌های متعامد را می‌توان به‌صورت دوران‌هایی با مضرب‌هایی از $\frac{\pi}{4}$ در نظر گرفت. بنابراین، متداول است مفصلی را که از بازتاب مفصل C در امتداد خط $u = \frac{1}{2}$ به‌دست آمده است، با $C_{\frac{\pi}{4}}$ نشان دهیم. چنین مفصل‌هایی معمولاً با عنوان «مفصل‌های دوران‌یافته»^{۲۵} شناخته می‌شوند [۳۴]. چگالی و توزیع مفصلی که از بازتاب $c(u, v)$ نسبت به $u = \frac{1}{2}$ تولید می‌شوند، مانند چگالی و توزیع مفصلی هستند که در رابطه (۲۲) برای متقارن بودن مفصل حول u تعریف شد. از میانگین حسابی مفصل خطی-خطی C و دوران 90° آن، $C_{\frac{\pi}{2}}$ مفصل دایره‌ای-خطی

$$C_{\Theta, X}(u, v) = \frac{C(u, v) + v - C(1 - u, v)}{2},$$

با چگالی مفصل

$$c_{\Theta, X}(u, v) = \frac{c(u, v) + c(1 - u, v)}{2},$$

به‌دست می‌آید. چگالی به‌دست‌آمده نه تنها متناوب، بلکه نسبت به u متقارن نیز است.

دمای هوا که از طریق سیستم پایش سلامت سازه پل جیانگین چین جمع‌آوری شده بودند، با استفاده از مدل فوق پرداختند. هودل و فیبرگ [۳۴] در سال ۲۰۲۱ یکی از مقالات مهم را در حوزه مفصل‌های دایره‌ای-خطی نوشتند. در این مقاله، آنها چندین مفصل دایره‌ای-خطی را برای متغیرهای تصادفی استوانه‌ای همبسته و در بعد دایره‌ای متقارن، ارائه کردند. هدف آنها مدل‌سازی حرکت حیوانات در زمان گسسته بود که در آن طول گام^{۲۰} (متغیر خطی) و زاویه چرخش^{۲۱} (متغیر دایره‌ای) اغلب با یکدیگر همبستگی دارند و توزیع زاویه چرخش معمولاً حول صفر متقارن است (یعنی حیوانات تمایل ذاتی به چپ یا راست پیچیدن ندارند). فرض متقارن بودن توزیع حاشیه‌ای دایره‌ای حول صفر معادل این است که چگالی مفصل دایره‌ای-خطی حول $u = \frac{1}{2}$ متقارن باشد، یعنی در شرط زیر صدق کند:

$$C_{\Theta, X}(u, v) = v - C_{\Theta, X}(1 - u, v), \quad (22)$$

$$c_{\Theta, X}(u, v) = c_{\Theta, X}(1 - u, v), \quad \forall u, v \in [0, 1].$$

آنها در ادامه، به ساخت مفصل‌های دایره‌ای-خطی متقارن پرداختند و پژوهش گارسو-پورتوگوس و همکاران [۲۹] در چگونگی ساخت مفصل‌های مرتبه دو را گسترش دادند. علاوه‌براین، بر اساس رابطه $(3 - 2 - 13)$ کتاب نلسن [۷۹]، مفصل متقارن مرتبه سه^{۲۲} را نیز معرفی کردند و مفصل‌های مرتبه دو و مرتبه سه را «مفصل‌هایی با بخش‌های ویژه»^{۲۳} نام‌گذاری نمودند. مفصل مرتبه سه معرفی‌شده توسط آنها به‌صورت زیر است:

$$C_{\Theta, X}(u, v) = v(1 - v)[\alpha \sin(2\pi u)(1 - v) - \beta \sin(2\pi u)v],$$

$$c_{\Theta, X}(u, v) = 1 + 2\pi\alpha \cos(2\pi u)(1 - 4v + 3v^2) + 2\pi\beta \cos(2\pi u)(2v - 3v^2),$$

که در آن $\alpha, \beta \in [-1/2\pi, 1/2\pi]$ مفصل‌های مرتبه دو و

²⁰Step length

²¹Turn angle

²²Cubic section

²³Copula with specific sections

²⁴Linear combinations of reflected copulas

²⁵Rotated copulas

²⁶Rectangular patchworks of copulas

می‌دهد. افزون بر این، بسته cylcop شامل توابع تخصصی برای برازش توزیع‌های حاشیه‌ای، انتخاب خودکار مدل و شبیه‌سازی مسیرهای حرکتی نیز هست که یک جعبه ابزار کامل و تخصصی برای تحلیل‌های بوم‌شناختی و آماری مرتبط با داده‌های جهتی را فراهم می‌کند.

هودل و فیبرگ [۳۵] در سال ۲۰۲۲ با استفاده از مفصل‌های ارائه‌شده در مقاله [۳۴] و بسته cylcop در نرم‌افزار R به تحلیل داده‌های ردیابی GPS از شش راسوی ماهی‌خوار آمریکایی^{۲۷} شامل ۴۳۵۰ مشاهده از طول گام و زاویه چرخش در فواصل زمانی ده دقیقه‌ای، پرداختند. نتایج نشان داد که بین طول گام و زاویه چرخش همبستگی معناداری وجود دارد؛ به طوری که گام‌های بلند معمولاً با زاویه‌های کوچک (حرکت جهت‌دار) و گام‌های کوتاه با زاویه‌های نزدیک به $\pm\pi$ (حرکت جستجوگرانه) همراه‌اند. از بین مدل‌های مقایسه‌شده، مفصل مرتبه سه بهترین برازش را داشت و نسبت به مدل‌های مستقل و مدل مارکوف پنهان می‌توانست ساختار وابستگی را دقیق‌تر بازنمایی کند. این نتیجه نشان می‌دهد که استفاده از مفصل‌های دایره‌ای-خطی می‌تواند الگوهای واقعی حرکت حیوانات را بهتر توصیف کند و در تحلیل رفتار حرکتی و پراکنش زمانی مؤثرتر واقع شود.

فرناندز-دوران و گرگوریو-دومینگز [۲۳] در سال ۲۰۲۳ یک آزمون استقلال دو متغیره جدید مبتنی بر تبدیل انتگرال احتمالی جهت‌ی توسعه دادند که به طور خاص برای داده‌های استوانه‌ای و چنبره‌ای طراحی شده است. در این چارچوب، از مدل جانسون-وهرفلی به عنوان پایه‌ای برای مفصل‌های دایره‌ای-خطی و مفصل‌های دایره‌ای-دایره‌ای استفاده شده است که در آن ساختار وابستگی بوسیله تابع چگالی دایره‌ای g مشخص می‌شود. این تابع با استفاده از توزیع‌های انعطاف‌پذیر مجموع مثلثاتی غیرمنفی تقریب زده می‌شود که شامل توزیع یکنواخت دایره‌ای (حالت استقلال) به عنوان حالت خاص است. کاربرد این روش روی داده‌های واقعی، از جمله داده‌های مربوط به جهت باد و غلظت ازن و جهت‌های باد در ساعت‌های متفاوت، توانایی مطلوب آن را در شناسایی وابستگی در داده‌های استوانه‌ای و چنبره‌ای به خوبی نشان می‌دهد.

۲. وصله‌های مستطیلی مفصل‌ها^{۲۶}: این روش برای ساخت مفصل‌های دایره‌ای-خطی متقارن شامل تقسیم مربع واحد به نواحی مستطیلی می‌شود که هر کدام حاوی مفصل تبدیل‌یافته‌ی مناسب خود است. روش ساخت وصله‌های مستطیلی مفصل‌ها را دورانته و همکاران [۱۹] در سال ۲۰۰۹ معرفی نمودند. به طور مشخص، دو مستطیلی را که نسبت به خط $u = \frac{1}{2}$ متقارن‌اند، به صورت $R_1 = [u_1, u_2] \times [0, 1]$ و $R_2 = [1-u_1, 1-u_2] \times [0, 1]$ در نظر بگیرید که در آن

$$0 \leq u_1 < u_2 \leq \frac{1}{2}.$$

فرض کنید C یک مفصل دلخواه و $F_i : R_i \rightarrow [0, 1]$ تابع دوسعودی (که از تبدیل روی یک مفصل دیگر مانند C_i به دست آمده است) به گونه‌ای که $F_i(u, v) = C(u, v)$, $i = 1, 2$ در مرزهای هر مستطیل R_i برقرار باشد. در این صورت، مفصل

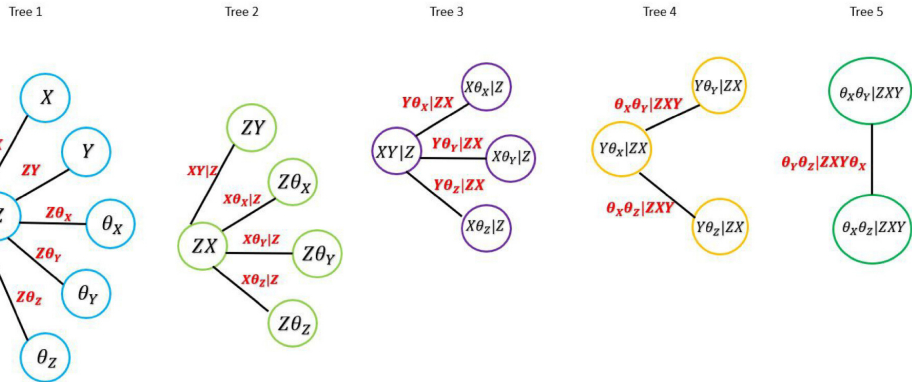
$$C_{patch}(u, v) = \begin{cases} F_i(u, v), & (u, v) \in R_i \\ C(u, v), & \text{در غیر این صورت.} \end{cases}$$

برای تولید یک مفصل C_{patch} که تناوبی و متقارن در u باشد، باید دو مفصل C_i که توابع F_i از آنها مشتق می‌شوند، بازتاب یکدیگر نسبت به خط $u = \frac{1}{2}$ باشند. این ویژگی با تعریف $C_2(u, v) = v - C_1(1-u, v)$ حاصل می‌شود.

همچنین، هودل و فیبرگ [۳۴] در سال ۲۰۲۱ برآورد پارامترها و معیارهای وابستگی برای این مفصل‌ها را بررسی کردند و کدهای لازم از نرم‌افزار R را تحت بسته cylcop ارائه نمودند. بسته cylcop یک افزونه تخصصی برای بسته پایه copula در محیط R ارائه می‌دهد. این بسته به طور ویژه برای کار با داده‌های استوانه‌ای متقارن طراحی شده است. در این بسته، چندین خانواده‌ی جدید از مفصل‌های دایره‌ای-خطی معرفی و پیاده‌سازی شده است که همگی از ویژگی تقارن حول u (بعد دایره‌ای) برخوردارند. این بسته مجموعه کاملی از روش‌ها را برای برآورد پارامترها از طریق ماکسیمم شبه‌درست‌نمایی یا روش‌های مبتنی بر همبستگی، شبیه‌سازی توزیع‌های توأم و محاسبه توابع چگالی احتمال و توزیع تجمعی در اختیار پژوهشگران قرار

به کارگیری یک ساختار مفصل و این (درختی) مدل سازی می کند. در این ساختار که در شکل ۷ نشان داده شده است، وابستگی چندمتغیره به صورت سلسله مراتبی و براساس مفصل های زوجی بین متغیرهای شرطی مدل بندی می شود.

نگار و همکاران [۷۷] در سال ۲۰۲۴ یک چارچوب مدل سازی وابستگی برای داده های چندمتغیره دایره ای-خطی معرفی کردند. مدل پیشنهادی آنها، توزیع توأم شش بعدی متغیرها شامل سه متغیر خطی X, Y, Z و سه متغیر دایره ای $\theta_X, \theta_Y, \theta_Z$ را با



شکل ۷: نمودار شماتیک از ساختار و این (درختی) کانونی برای مدل پیشنهادی [۷۷]

جهت باد ارائه دادند که به صورت تجربی با داده های چهار ایستگاه هواشناسی در مغولستان داخلی چین آزمون شده است. در این پژوهش، چگالی توأم متغیرها براساس رابطه (۲۳) به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$f(s, t) = c(\Psi(s), \Phi(t))\psi(s)\phi(t), \quad (23)$$

که در آن $\Psi(s)$ تابع توزیع فون میزس، $\Phi(t)$ تابع توزیع تجمی نرمال، $\psi(s)$ و $\phi(t)$ توابع چگالی آنها و $(s, t) = (\Psi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v))$ با استفاده از روش های چگالی کرنل برآورد می شود و سپس ساختار وابستگی توأم دو متغیر با چگالی مفصل ناپارامتری زیر توصیف شده است:

$$\hat{c}(u, v) = \frac{\hat{f}(\Psi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v))}{\psi(\Psi^{-1}(u))\phi(\Phi^{-1}(v))}, \quad (u, v) \in [0, 1]^2.$$

مقایسه این مدل با مدل های پارامتری و مستقل، نشان دهنده دقت و کارایی بالاتر در مدل سازی ساختار وابستگی و برآورد چگالی احتمال توأم و همچنین شناسایی جهت های غالب منبع باد است که دستاورد آن بهبود طراحی، جانمایی و ارزیابی انرژی در نیروگاه های بادی است.

کاتو و همکاران [۵۳] در سال ۲۰۲۴ مفصل کوشی پو شانده سه متغیره ای را به صورت زیر معرفی کردند که علاوه بر داده های دایره ای روی چنبره ی سه بعدی، قابلیت تعمیم به داده های ترکیبی دایره ای-دایره ای-خطی، دایره ای-خطی-خطی و یا داده هایی با

تابع چگالی احتمال توأم این مدل به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} f(x, y, z, \theta_x, \theta_y, \theta_z) = & f(x)f(y)f(z)f(\theta_x)f(\theta_y)f(\theta_z) \\ & \times c_{xz}(F_X, F_Z)c_{yz}(F_Y, F_Z)c_{z\theta_x}(F_Z, F_{\theta_x}) \\ & \times c_{z\theta_y}(F_Z, F_{\theta_y})c_{z\theta_z}(F_Z, F_{\theta_z}) \\ & \times c_{xy|z}(F_{X|Z}, F_{Y|Z})c_{x\theta_x|z}(F_{X|Z}, F_{\theta_x|Z}) \\ & \times c_{x\theta_y|z}(F_{X|Z}, F_{\theta_y|Z})c_{x\theta_z|z}(F_{X|Z}, F_{\theta_z|Z}) \\ & \times c_{y\theta_x|z}(F_{Y|Z}, F_{\theta_x|Z})c_{y\theta_y|z}(F_{Y|Z}, F_{\theta_y|Z}) \\ & \times c_{y\theta_z|z}(F_{Y|Z}, F_{\theta_z|Z})c_{\theta_x\theta_y|z}(F_{\theta_x|Z}, F_{\theta_y|Z}) \\ & \times c_{\theta_x\theta_z|z}(F_{\theta_x|Z}, F_{\theta_z|Z})c_{\theta_y\theta_z|z}(F_{\theta_y|Z}, F_{\theta_z|Z}), \end{aligned}$$

که در آن c چگالی مفصل های زوجی از انواع خطی-خطی، دایره ای-خطی و دایره ای-دایره ای است. این مدل روی داده های بیومیکانیک شامل سه متغیر خطی (جابجایی) و سه متغیر دایره ای (چرخش) اعتبارسنجی شده است. نتایج تحلیل نشان می دهد که مدل وابستگی پیشنهادی برازش به مراتب بهتری نسبت به مدل مستقل معمول دارد و می تواند ابزار دقیق تری برای تحلیل و درک رفتار وابستگی های پیچیده فراهم کند.

لیو و یان [۶۵] در سال ۲۰۲۴ یک مدل احتمالاتی دایره ای-خطی مبتنی بر مفصل ناپارامتری برای مدل سازی توأم سرعت و

سه مؤلفه خطی را دارد:

$$f(\theta; \rho) = (2\pi)^{-2} \gamma_1 \gamma_2 \left(\gamma_1 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \rho_{ij} \cos [2\pi F_i(\theta_i) - F_j(\theta_j)] \right)^{-1} \times \prod_{1 \leq k \leq 3} f_k(\theta_k),$$

که در آن $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ و هر θ_i در بازه $[0, 2\pi)$ قرار دارد یا متعلق به (زیرمجموعه‌ی از) اعداد حقیقی است، $\rho = (\rho_{12}, \rho_{13}, \rho_{23})$ ، $\rho_{12}, \rho_{13}, \rho_{23} \in [0, 1]$ ، $\rho_{12}\rho_{13}\rho_{23} > 0$ ، $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ حاشیه‌ای دلخواه F_i توزیع تجمعی متناظر هستند و

$$\gamma_1 = \frac{\rho_{12}\rho_{13}}{\rho_{23}} + \frac{\rho_{12}\rho_{23}}{\rho_{13}} + \frac{\rho_{13}\rho_{23}}{\rho_{12}},$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{(2\pi)^2} \left\{ \left(\frac{\rho_{12}\rho_{13}}{\rho_{23}} \right)^2 + \left(\frac{\rho_{12}\rho_{23}}{\rho_{13}} \right)^2 + \left(\frac{\rho_{13}\rho_{23}}{\rho_{12}} \right)^2 - 2\rho_{12}^2 - 2\rho_{13}^2 - 2\rho_{23}^2 \right\}.$$

آنها این مدل را برای تحلیل داده‌های دریای آدیاتیکی به‌کار بردند که شامل سه متغیر جهت باد و جهت موج به‌عنوان متغیرهای دایره‌ای و ارتفاع موج به‌عنوان متغیر خطی است. نتایج نشان داد که مدل آنها توانایی بالاتر و تفسیرپذیری بهتر نسبت به سایر مدل‌ها دارد و مراحل برآورد پارامترها و شبیه‌سازی با آن ساده و کارآمد است.

۲.۳ ضرایب همبستگی

ماریا [۶۸] در سال ۱۹۷۶ و جانسون و وهرلی [۴۴] در سال ۱۹۷۷ به‌طور مستقل یک ضریب همبستگی برای نمونه تصادفی $(x_1, \theta_1), \dots, (x_n, \theta_n)$ از مشاهداتی مربوط به بردار تصادفی (X, Θ) به‌صورت زیر معرفی نمودند:

$$R_{X\Theta}^2 = \frac{r_{xc}^2 + r_{xs}^2 - 2r_{xc}r_{xs}r_{cs}}{1 - r_{cs}^2},$$

که در آن

$$r_{xc} = r((x_1, \dots, x_n), (\cos \theta_1, \dots, \cos \theta_n)),$$

$$r_{xs} = r((x_1, \dots, x_n), (\sin \theta_1, \dots, \sin \theta_n)),$$

$$r_{cs} = r((\cos \theta_1, \dots, \cos \theta_n), (\sin \theta_1, \dots, \sin \theta_n)),$$

و $r(\cdot, \cdot)$ بیانگر همبستگی گشتاوری پیرسون بین مقادیر موجود است. مقدار $R_{X\Theta}^2$ در بازه $[0, 1]$ قرار می‌گیرد؛ هرچه مقدار آن بزرگ‌تر باشد، شدت وابستگی بین X و Θ بیشتر است.

علاوه‌براین، ضریب همبستگی ناپارامتری دایره‌ای-خطی نیز توسط ماریا [۶۸] در سال ۱۹۷۶ معرفی شد که مشابه ضریب همبستگی رتبه‌ای اسپیرمن برای دو متغیر تصادفی خطی، میزان وابستگی را از طریق رتبه‌ها اندازه‌گیری می‌کند. برای محاسبه این ضریب همبستگی، ابتدا باید به هر مقدار دایره‌ای θ_i رتبه‌ای اختصاص داده شود. پس از رتبه‌دهی به متغیر دایره‌ای، مقادیر متغیر خطی (x_i) از کوچک به بزرگ مرتب می‌شود. متغیر رتبه‌بندی‌شده، β_i ، به‌صورت $\beta_i = 2\pi(r_i)/n$ محاسبه می‌شود که در آن n تعداد کل زوج‌های دایره‌ای-خطی

(x_i, θ_i) و رتبه‌های دایره‌ای متناظر با $\theta_1, \dots, \theta_n$ هستند. سپس کمیت‌های

T_s و T_c به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$T_c = \sum_{i=1}^n s_i \cos(\beta_i), \quad T_s = \sum_{i=1}^n s_i \sin(\beta_i),$$

که در آن s_i رتبه‌ی x_i است (وقتی x_i دارای مقادیر تکراری است، برای تمام مقادیر تکراری از میانگین رتبه استفاده می‌شود). در نهایت، ضریب همبستگی مقیاس‌شده D_n به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$D_n = a_n(T_c^2 + T_s^2),$$

که در آن

$$a_n = \begin{cases} 1/\{1 + 5 \cot^2(\pi/n) + 4 \cot^4(\pi/n)\}, & \text{زوج } n \\ 2 \sin^4(\pi/n)/\{1 + \cos(\pi/n)\}^2, & \text{فرد } n. \end{cases}$$

این ضریب همبستگی می‌تواند مقادیری بین ۰ و ۱ را اختیار کند و قادر به تشخیص همبستگی مثبت از منفی نیست.

همچنین، جانسون و وهرلی [۴۴] در سال ۱۹۷۷ و جاپ و ماریا [۵۱] در سال ۱۹۸۰ ضریب همبستگی دیگری را برای متغیرهای دایره‌ای-خطی ارائه کردند. این ضریب بر ماکسیم‌سازی ضریب همبستگی خطی بین X و $(\cos(\theta - \theta_0), \sin(\theta - \theta_0))$ استوار است. فیشر و لی [۲۵] در سال ۱۹۸۱ ضریب همبستگی‌ای برای متغیرهای دایره‌ای-خطی ارائه دادند که از آن به‌عنوان وابستگی استوانه‌ای یاد می‌شود. برای اطلاعات بیشتر و پرداختن به جزئیات ضرایب همبستگی دایره‌ای-خطی به کتاب‌های ماریا و جاپ [۷۰] و جمالاماداکا و سینگویتا [۴۱] مراجعه کنید.

لیگوی و همکاران [۶۳] در سال ۲۰۱۹ یک معیار همبستگی را بر مبنای اطلاع متقابل 28 ارائه کرده‌اند که در واقع معیار واگرایی کولبک-لیبلر [۵۹] بین حاصل‌ضرب چگالی‌های حاشیه‌ای و چگالی توأم است. فرض کنید Θ یک متغیر دایره‌ای و X یک متغیر خطی باشد. اطلاع متقابل دایره‌ای-خطی (CLMI) [۲۹] به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{CLMI}(\Theta, X) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} f_{\Theta, X}(\theta, x) \times \log \left(\frac{f_{\Theta, X}(\theta, x)}{f_{\Theta}(\theta) f_X(x)} \right) d\theta dx, \quad (24)$$

که در آن $\theta \in [0, 2\pi)$ ، $x \in \mathbb{R}$ ، f_{Θ} چگالی حاشیه‌ای Θ ، f_X چگالی حاشیه‌ای X و $f_{\Theta, X}$ چگالی توأم (Θ, X) است. فرض کنید (Θ, X) دارای چگالی تعریف‌شده در رابطه (۴) باشد. در این صورت، CLMI بین Θ و X به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\text{CLMI}(\Theta, X) = 2\pi \int_0^{2\pi} g(t) \log\{g(t)\} dt.$$

به‌طور خاص، اگر g چگالی توزیع کوشی پوشانده باشد، آنگاه

$$\text{CLMI}(\Theta, X) = -\log(1 - \rho^2).$$

هودل و فیبرگ [۳۴] در سال ۲۰۲۱ رابطه (۲۴) را با جای‌گذاری رابطه (۱۲) در آن و تغییر متغیرهای $u = F_X(x)$ و $v = F_{\Theta}(\theta)$ به‌صورت زیر بازتعریف نمودند:

$$\text{CLMI}(\Theta, X) = \int_0^1 \int_0^1 c(u, v) \log(c(u, v)) du dv. \quad (25)$$

²⁸Mutual information

²⁹Circular-linear mutual information

از این عبارت، بلافاصله مشخص می‌شود که اطلاع متقابل برابر منفی آنتروپی تابع چگالی مفصل $c(u, v)$ است [۶۶]. از آنجایی که محاسبه انتگرال رابطه (۲۵) دشوار است، نمی‌توان پارامترهای خانواده مفصل انتخاب شده را به‌طور مستقیم تعیین کرد. با این حال، اطلاع متقابل نسبت به پارامتر وابستگی در دامنه‌ی وسیعی از مفصل‌های دومتغیره، رفتار یکنوا دارد. بنابراین، انتظار می‌رود که چارچوب بهینه‌سازی تقریبی توضیح‌داده شده، در استفاده از اطلاع متقابل به‌عنوان معیار وابستگی، به‌خوبی عمل کند. اطلاع متقابل را می‌توان با استفاده از آنتروپی H به‌بازوی [۱، ۵] طوری نرمال‌سازی کرد که مقدار \circ مفصل استقلال و مقدار ۱ کران بالایی فرسه-هافدینگ را اختیار کند:

$$CLMI_{norm}(u, v) = \frac{CLMI(u, v)}{\sqrt{H(u)H(v)}}.$$

۳.۳ استنباط آماری

۱.۳.۳ برآورد پارامترها

وانگ و همکاران [۱۰۳] در سال ۲۰۲۱، علاوه بر روش‌های MLE و شبه‌مشاهده، روش کمترین مربعات (LS) [۳۴] را نیز برای برآورد توزیع‌های حاشیه‌ای مدل به‌کار بردند. در این روش، برآورد پارامترهای مدل توزیع‌های حاشیه‌ای برای متغیر دایره‌ای یا خطی به‌صورت زیر انجام می‌گیرد:

$$\hat{p}_{LS} = \arg \min_p \sum_{i=1}^n [f_{c,i}(x \text{ یا } \theta; p) - \hat{f}_i(x \text{ یا } \theta)]^2,$$

که در آن $f_{c,i}$ مقدار محاسبه‌شده از تابع چگالی حاشیه‌ای، \hat{f}_i مقدار برآورد چگالی هسته‌ای (KDE) [۳۵] در هر نقطه نمونه، p بردار پارامترهای مدل توزیع احتمال حاشیه‌ای متغیر دایره‌ای یا خطی و \hat{p}_{LS} نتیجه برآورد کمترین مربعات p هستند. همچنین، وانگ و همکاران تابع لگاریتم درستنمایی در رابطه (۲۶) را برای مفصل‌های دایره‌ای-خطی-خطی گسترش داده و نشان دادند که این روش علاوه بر مفصل‌های جانسون-وهرلی، برای مفصل‌های مرتبه دو، مفصل‌های برنشتاین و مفصل‌هایی با چهار متغیر خطی نیز کاربرد دارد. آنها روش برآورد پارامترهای مفصل را مبتنی بر ماکسیم‌سازی تابع لگاریتم درستنمایی، $\ell(\alpha)$ ، ارائه دادند؛ یعنی

$$\hat{\alpha}_{MLE} = \arg \max_{\alpha} \ell(\alpha).$$

برای آشنایی بیشتر با روش‌های برآورد ناپارامتری و الگوریتم‌های بهینه‌سازی دیگر به مقاله لیو و یان [۶۵] مراجعه کنید.

برای بسیاری از مفصل‌های خطی-خطی، می‌توان برآوردهای پارامتر را به‌صورت تحلیلی و بر پایه برآورد یک معیار همبستگی مانند ρ -اسپیرمن یا τ -کندال به‌دست آورد. با این حال، برای اغلب مفصل‌های مقارنی که در مقاله هودل و فیبرگ [۳۴] معرفی شده‌اند، راه‌حل‌های تحلیلی در دسترس نیست و باید از روش‌های عددی بهینه‌سازی استفاده شود. یک استثنا، مفصل‌های وصله‌ای هستند که در آنها مستطیل‌ها کل مربع واحد را می‌پوشانند. پارامترهای این مفصل‌ها را می‌توان با استفاده از τ -کندال برآورد کرد. برای سایر مفصل‌های دایره‌ای-خطی، می‌توان یک جستجوی شبکه‌ای [۳۶] انجام داد تا آن دسته از پارامترهای مفصل را بیابد که اختلاف در یک معیار همبستگی میان مفصل تجربی و پارامتری را مینیمم کند. این رویکرد فرض می‌کند قدر مطلق پارامترهای

گاریسو-پورتوگوس و همکاران [۲۹] در سال ۲۰۱۳ با جزئیات به الگوریتم‌های برآورد به‌صورت پارامتری و ناپارامتری برای چگالی‌های حاشیه‌ای و توابع توزیع متناظر آنها، برآورد چگالی مفصل دایره‌ای-خطی و همچنین برآورد چگالی دایره‌ای-خطی پرداخته‌اند. از بین همه روش‌های برآوردیابی، روش برآورد ماکسیم درستنمایی (MLE) [۳۰] از معروف‌ترین روش‌هایی است که برای برآورد پارامترهای مفصل‌های دایره‌ای-خطی در مقالات متعدد، استفاده شده است. هودل و فیبرگ [۳۴] در سال ۲۰۲۱ روی این روش برآوردیابی بیشتر تمرکز کرده‌اند. با در اختیار داشتن مجموعه‌ای شامل n مشاهده مستقل و هم‌توزیع (i, i, d) از یک زوج متغیر دایره‌ای و خطی (θ_i, x_i) ، یک خانواده مفصل مفروض $C(u, v; \alpha)$ و توزیع‌های حاشیه‌ای مفروض $F_{\Theta}(\theta; \beta)$ و $F_X(x; \gamma)$ ، به‌طور نظری می‌توانیم بردار پارامترهای (α, β, γ) را از طریق ماکسیم‌سازی لگاریتم تابع درستنمایی مبتنی بر چگالی توأم ارائه‌شده در رابطه (۸) برآورد کنیم. با این حال، این رویکرد مستلزم بهینه‌سازی هم‌زمان تعداد زیادی از پارامترها است و مشخص‌سازی نادرست توزیع‌های حاشیه‌ای می‌تواند منجر به برآوردهای اریب برای پارامترهای مفصل شود و برعکس. اگر توزیع‌های حاشیه‌ای معلوم باشند، لگاریتم تابع درستنمایی به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\ell(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{i=1}^n \log [c(F_{\Theta}(\theta_i; \beta), F_X(x_i; \gamma); \alpha)]. \quad (26)$$

این رویکرد به دو شیوه جایگزین برای برآورد پارامترهای مفصل منتهی می‌شود که در آنها برآوردهایی از F_X و F_{Θ} در رابطه (۲۶) جای‌گذاری می‌شوند. این برآوردها، یعنی $\hat{F}_X(x)$ و $\hat{F}_{\Theta}(\theta)$ می‌توانند به‌صورت پارامتری با استفاده از روش ماکسیم درستنمایی [۱۶] و ناپارامتری به‌صورت شبه‌مشاهده [۳۱]، یعنی

³⁰Maximum likelihood estimation

³¹Pseudo-observation

³²Inference functions for margins

³³Maximum pseudo-likelihood Estimator

³⁴Least-squares

³⁵Kernel density estimation

³⁶Grid-search

مفصل با افزایش همبستگی دایره‌ای-خطی، به‌طور یکنواخت افزایش می‌یابد. این موارد در بسته‌ی cylcop پیاده‌سازی شده است. [۱۲]:

$$\begin{aligned} c_{\Theta_1, \Theta_2}(\circ, v) &= c_{\Theta_1, \Theta_2}(1, v), \quad v \in [0, 1], \\ c_{\Theta_1, \Theta_2}(u, \circ) &= c_{\Theta_1, \Theta_2}(u, 1), \quad u \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (28)$$

تاریخچه ساخت مفصل‌های دایره‌ای-دایره‌ای نیز به آخر دهه هفتاد و کارهای جانسون و وهرلی [۲۴] در سال ۱۹۷۷ و وهرلی و جانسون [۱۰۴] در سال ۱۹۸۰ در زمینه ساخت توزیع‌های دومتغیره دایره‌ای-دایره‌ای برمی‌گردد. گرچه در آن زمان نیز از واژه «مفصل» استفاده نمی‌کردند، اما آنها عملاً توزیعی ساخته بودند که ویژگی‌های یک مفصل دایره‌ای-دایره‌ای را داشت. شی و جانسون [۹۴] در سال ۲۰۰۵ ضمن بررسی توزیع‌های انعطاف‌پذیر دومتغیره دایره‌ای-دایره‌ای در آثار پژوهشگران قبلی از جمله ماریا [۶۷]، ساو [۹۲]، ریویست [۸۸] و سینگ و همکاران [۹۷]، به توزیع دومتغیره دایره‌ای-دایره‌ای ارائه‌شده توسط وهرلی و جانسون [۱۰۴] در سال ۱۹۸۰ که چگالی آن در رابطه (۵) آمده، توجه کردند. آنها به‌جای تابع g در این رابطه، چگالی توزیع فون‌میزس را قرار دادند و حاشیه‌ها را نیز فون‌میزس در نظر گرفتند و چگالی توأم زیر را به‌دست آوردند:

$$\begin{aligned} f_{\Theta_1, \Theta_2}(\theta_1, \theta_2) &= 2\pi f_{\Theta_1}(\theta_1) f_{\Theta_2}(\theta_2) \frac{1}{\sqrt{2\pi} \mathcal{I}_\circ(k)} \\ &\times e^{k_{12} \cos(2\pi [F_{\Theta_1}(\theta_1) - F_{\Theta_2}(\theta_2)] - \mu_{12})}, \end{aligned} \quad (29)$$

که در آن $0 \leq \theta_1, \theta_2 < 2\pi$ ، $0 \leq \mu_{12} < 2\pi$ ، $k_{12} > 0$ و \mathcal{I}_\circ تابع بسمل اصلاح‌شده از نوع مرتبه صفر است. آنها همچنین یادآوری کردند که این رده از توزیع‌های دایره‌ای دومتغیره می‌تواند توزیع‌های حاشیه‌ای عمومی‌تری مانند توزیع t را نیز شامل شود. از آنجا که تابع چگالی توزیع فون‌میزس فرم بسته‌ای دارد، آنها روی توزیع‌های حاشیه‌ای فون‌میزس تمرکز نمودند و با تعریف $U = F_{\Theta_1}(\theta_1)$ ، $V = F_{\Theta_2}(\theta_2)$ ، که زوج (U, V) متغیرهای تصادفی روی دایره واحد هستند، چگالی زیر را از رابطه (۲۹) به‌دست آوردند:

$$c(u, v) = e^{k_{12} \cos(2\pi [u - v] - \mu_{12})} / \mathcal{I}_\circ(k_{12}). \quad (30)$$

رابطه (۳۰) تابع چگالی یک مفصل دایره‌ای-دایره‌ای است که وابستگی دایره‌ای بین دو متغیر را با پارامتر k_{12} مدل‌بندی می‌کند. بنابراین، شی و جانسون [۹۴] در حقیقت با استفاده از رابطه (۵) و قضیه اسکالر در نظریه مفصل، مدل مفصل-مبنای دایره‌ای-دایره‌ای به‌صورت (۲۷) را به‌دست آورده بودند. آنها با استفاده از این مدل به تحلیل داده‌های جهت باد ثبت‌شده در ساعت ۶ صبح و ۱۲ ظهر در ایستگاه هواشناسی در میلواکی برای ۲۱ روز، پرداختند. نتایج آنها نشان داد که مدل به‌دست‌آمده به خوبی وابستگی دایره‌ای بین این داده‌ها را نشان می‌دهد. آزمون نسبت درست‌نمایی نیز نشان داد که وابستگی بین جهت‌ها در طول روز قابل توجه است و این مدل قدرت تشخیص بالاتری نسبت به آزمون‌های موجود در آن زمان دارد. الفونسی و بریگو [۳] در سال ۲۰۰۵ نیز روشی برای ساخت مفصل‌ها مبتنی بر توابع متناوب ارائه کردند، اما ساختار آن برای استفاده برای مفصل‌های معمولی خطی بود. فرناندز-دوران [۲۱] در سال ۲۰۰۷ توابع g ، f_{Θ_1} و f_{Θ_2} در رابطه (۲۹) را توزیع‌های دایره‌ای مبتنی بر مجموع‌های مثلثاتی

۲.۳.۳ نیکویی برازش

آزمون نیکویی برازش به‌منظور انتخاب مدل بهینه از بین مدل‌های نامزد انجام می‌شود. از بین منابع مرتبط، وانگ و همکاران [۱۰۳] در سال ۲۰۲۱، نگار و همکاران [۷۷] در سال ۲۰۲۴ و لیو و یان [۶۵] در سال ۲۰۲۴ بیشتر به این موضوع پرداخته‌اند. در این پژوهش‌ها، از چهار شاخص نیکویی برازش استفاده شده است: ضریب تعیین (R^2)، ریشه‌ی میانگین مربعات خطا (RMSE)، معیار اطلاع آکائیکه (AIC) و معیار اطلاع بیزی (BIC). مدل بهینه مدلی است که دارای بیشترین مقدار R^2 و کمترین مقادیر AIC، RMSE و BIC باشد. روابط مربوط به این چهار شاخص به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} R^2 &= \frac{\sum_{i=1}^n (f_{c,i} - \bar{f}_c)^2}{\sum_{i=1}^n (f_{c,i} - \bar{f}_c)^2 + \sum_{i=1}^n (f_{c,i} - f_{e,i})^2}, \\ \text{RMSE} &= \sqrt{\text{MSE}} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (f_{c,i} - f_{e,i})^2}, \\ \text{AIC} &= 2p - 2 \ln(\hat{L}), \\ \text{BIC} &= p \ln(n) - 2 \ln(\hat{L}), \end{aligned}$$

که در آنها n اندازه نمونه، $\bar{f}_c = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_{c,i}$ و $f_{e,i}$ به‌ترتیب چگالی محاسبه‌شده از مدل نظری توزیع حاشیه‌ای یا توأم و چگالی تجربی به‌دست‌آمده از روش KDE در نقطه نمونه i -ام، p تعداد پارامترهای مدل نظری توزیع احتمال و \hat{L} مقدار ماکسیمم تابع درست‌نمایی هستند. برای نشان دادن اعتبار مدل پیشنهادی در مقایسه با استفاده‌ی متعارف از یک مدل مستقل، نگار و همکاران [۷۷] از آزمون نسبت درست‌نمایی (LRT)^{۳۸} نیز استفاده کردند.

۴ مفصل‌های دایره‌ای-دایره‌ای

۱.۴ توسعه و کاربردها

در این بخش، بردار تصادفی دایره‌ای-دایره‌ای پیوسته، (Θ_1, Θ_2) ، را در نظر می‌گیریم. مشابه حالت دایره‌ای-خطی، در اینجا نیز یک مفصل یکتای C_{Θ_1, Θ_2} وجود دارد که ساختار وابستگی بین Θ_1 و Θ_2 را توصیف می‌کند. تابع چگالی دایره‌ای-دایره‌ای بر مبنای چگالی این مفصل، c_{Θ_1, Θ_2} ، به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} f_{\Theta_1, \Theta_2}(\theta_1, \theta_2) &= c_{\Theta_1, \Theta_2}(F_{\Theta_1}(\theta_1), F_{\Theta_2}(\theta_2)) \\ &\times f_{\Theta_1}(\theta_1) f_{\Theta_2}(\theta_2), \end{aligned} \quad (27)$$

که در آن F_{Θ_i} و f_{Θ_i} به‌ترتیب توابع توزیع تجمعی و چگالی احتمال متغیرهای Θ_i برای $i = 1, 2$ هستند. اگر بخواهیم یک تابع چگالی مطلقاً پیوسته به‌دست بیاوریم، چگالی مفصل باید شرایط زیر (ویژگی تناوبی بودن) را داشته باشد

³⁷Root mean square error

³⁸Likelihood ratio test

در رابطه (۵) هم توزیع‌های حاشیه‌ای و هم تابع پیونددهنده‌ی g را از نوع کوشی پوشانده انتخاب نمودند. چگالی این مدل مفصل-مبنا به صورت زیر است:

$$f_{\Theta_1, \Theta_2}(\theta_1, \theta_2) = \gamma \{ \gamma_0 - \gamma_1 \cos(\theta_1 - \mu_1) - \gamma_2 \cos(\theta_2 - \mu_2) - \gamma_3 \cos(\theta_1 - \mu_1) \cos(\theta_2 - \mu_2) - \gamma_4 \sin(\theta_1 - \mu_1) \times \sin(\theta_2 - \mu_2) \}^{-1}, \quad -\pi < \theta_1, \theta_2 \leq \pi, \quad (31)$$

که در آن ضرایب $\gamma, \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ به دو پارامتر تمرکز دایره‌ای و یک پارامتر وابستگی بستگی دارند. این توزیع از نظر محاسباتی ساده و انعطاف‌پذیر بوده و توزیع‌های حاشیه‌ای و شرطی آن نیز از نوع کوشی پوشانده هستند. آنها به تحلیل مجموعه‌ای از ۷۷ زوج زاویه دوجویی اسید آمینه‌ی تیروزین^{۳۹} پرداختند. نتایج آنها نشان داد که توزیع ارائه‌شده برازش مناسبی بر این داده‌های چنبره‌ای دارد و آزمون‌های نیکویی برازش و استقلال نیز مؤید کارایی و دقت مدل در توصیف ساختار زاویه‌ای تیروزین بودند.

جونز و همکاران [۴۸] در سال ۲۰۱۵ یکی از مقالات پراستناد را در حوزه‌ی مفصل‌های دایره‌ای-دایره‌ای نوشتند. آنها با معرفی کلاس جدیدی از مفصل‌های دایره‌ای-دایره‌ای و بررسی ویژگی‌های آنها، تحول بزرگی در این عرصه ایجاد کردند. قبل از آن، توجه پژوهشگران بیشتر به ساخت توزیع‌های دومتغیره دایره‌ای با حاشیه‌های انعطاف‌پذیر و کاربردهای آنها بود و توجه جدی به مفصل‌های دایره‌ای-دایره‌ای نمی‌کردند. در این مقاله نویسندگان به ساخت و بررسی ویژگی‌های مفصل‌های دایره‌ای-دایره‌ای پرداختند و مفصل‌های به‌دست‌آمده را «سیرکولا»^{۴۵} نامیدند که منظور همان «مفصل‌های دایره‌ای» است. در ادامه از مفصل‌های دایره‌ای-دایره‌ای به‌عنوان مفصل‌های دایره‌ای یاد خواهیم کرد. این مقاله بر مبنای کارهای انجام‌شده توسط فیشر و لی [۲۷] و ماردیا و جاپ [۷۰] در بررسی ویژگی‌های متغیرهای دایره‌ای نوشته شده است که در اینجا به آن می‌پردازیم.

فرض کنید Θ_1 دارای توزیع یکنواخت دایره‌ای باشد. برای هر زاویه ثابت $\omega, \Theta_1 + \omega \pmod{2\pi}$ نیز دارای توزیع یکنواخت دایره‌ای است. حال فرض کنید Ω با چگالی g از یک توزیع یکنواخت دایره‌ای پیروی کرده و از Θ_1 مستقل باشد، در این صورت بر مبنای نتیجه قبلی، $\Theta_2 = \Theta_1 + \Omega \pmod{2\pi}$ نیز از توزیع یکنواخت دایره‌ای پیروی می‌کند [۷۰]. بنابراین، (Θ_1, Θ_2) دارای توزیع دایره‌ای دومتغیره با حاشیه‌های یکنواخت دایره‌ای است (دو مثال از حالت‌های مثبت و منفی این موضوع در شکل ۸ ارائه شده است). علاوه‌براین، چگالی شرطی $\Theta_2 | \Theta_1 = \theta_1$ نیز به صورت $g(\theta_2 - \theta_1)$ به‌دست می‌آید که با توزیع حاشیه‌ای یکنواخت Θ_1 آمیخته شده است و یک چگالی مفصل دایره‌ای به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$c_{\Theta_1, \Theta_2}^*(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} g(\theta_2 - \theta_1). \quad (32)$$

نامنفی در نظر گرفت و به تحلیل داده‌های به‌دست‌آمده از زوج زوایای دوجویی^{۳۹} متوالی بین اسیدهای آمینه در یک پروتئین پرداخت.

شی و همکاران [۹۶] در سال ۲۰۱۱ برای رابطه (۲۹) توزیع‌های حاشیه‌ای فون میزس تعمیم‌یافته را در نظر گرفتند و چگالی به‌دست‌آمده را مدل فون میزس تعمیم‌یافته دومتغیره (BGVM)^{۴۰} نام‌گذاری نمودند. توابع چگالی حاشیه‌ای فون میزس تعمیم‌یافته به صورت زیر هستند:

$$f_j(\theta_j) = D_j^{-1} e^{k_j \cos(\theta_j - \mu_j) + \lambda_j \cos[2(\theta_j - \nu_j)]}, \quad j = 1, 2,$$

که در آن

$$D_j^{-1} = 2\pi \{ \mathcal{I}_0(k_j) \mathcal{I}_0(\lambda_j) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{I}_n(\lambda_j) \mathcal{I}_{2n}(k_j) \cdot \cos[2n(\mu_j - \nu_j)] \}^{-1}$$

و μ_j و ν_j پارامترهای مکان (پراکندگی) هستند. آنها با استفاده از این مدل به تحلیل مجموعه داده‌های مرتبط با موقعیت ژن‌های هم‌تای مشترک^{۴۱} در دو مجموعه ژنوم دایره‌ای پرداختند. نتایج نشان داد که بیشتر زوج‌ها دارای همبستگی معنادار در ساختار مکانی ژنوم‌ها هستند. گارسیو-پورتوگوس [۲۹] در سال ۲۰۱۳ علاوه‌بر بررسی چند مفصل دایره‌ای-خطی، بیان داشت که به آسانی می‌شود مفصل‌های ارائه‌شده در رابطه‌های (۱۳)، (۱۴) و (۱۵) را به متغیرهای دایره‌ای-دایره‌ای نیز تعمیم داد؛ از جمله مفصل رابطه (۱۵) هم‌زمان یک مفصل دایره‌ای-دایره‌ای نیز هست.

پیرلمن و ولتر [۸۲] در سال ۲۰۱۱ با مطرح‌کردن این سوال که «آیا مفصل‌های دایره‌ای و کروی در فضای \mathbb{R}^d وجود دارند؟ یا به عبارت دیگر، آیا توزیع‌های متقارن دایره‌ای روی دیسک^{۴۲} واحد در \mathbb{R}^2 و توزیع‌های متقارن کروی روی کره واحد در \mathbb{R}^d با $(d \geq 3)$ وجود دارند که توزیع‌های حاشیه‌ای یک‌بعدی آنها یکنواخت باشند؟»، خانواده‌ای از مفصل‌های دایره‌ای و بیضی‌شکل را معرفی کردند. جونز [۴۷] در سال ۲۰۱۳ نشان داد که این مفصل‌ها، جدید نیستند و تمام آنها را به‌جز یک مفصل، می‌توان به‌عنوان اعضای خاصی از خانواده‌های بیضوی مفصل بتا یا t شناسایی کرد.

کارنسر و همکاران [۱۲] در سال ۲۰۱۳ همانند مفصل‌های دایره‌ای-خطی، روش ناپارامتری مبتنی بر مفصل‌های تجربی برنشتاین را برای برآورد وابستگی بین متغیرهای دایره‌ای-دایره‌ای ارائه کردند. چگالی مفصل ارائه‌شده شبیه چگالی مفصل در رابطه (۱۶) است، تنها در ضریب p_{j_1, j_2} رابطه (۱۷) کمی تغییر ایجاد نمودند تا ویژگی‌های تناوبی بودن در رابطه (۲۸) را داشته باشد. آنها این مدل را برای تحلیل داده‌های جهت باد که بوسیله دو بویه دریایی^{۴۳} در ساحل آتلانتیک آمریکا طی سال‌های ۲۰۰۷ و ۲۰۰۹ ثبت شده بودند، به‌کار بردند. نتایج آنها نشان داد که همبستگی قوی بین جهت بادها وجود دارد و مدل‌های شرطی نیز نشان داد که دانستن جهت باد در یک بویه، جهت باد در بویه دیگر را به‌خوبی پیش‌بینی می‌کند.

کاتو و پیوسی [۵۵] در سال ۲۰۱۵ یک توزیع کوشی پوشانده‌ی دومتغیره با پنج پارامتر را به‌عنوان یک مدل تک‌مدی برای داده‌های چنبره‌ای ارائه کردند. آنها

³⁹Dihedral

⁴⁰Bivariate generalized von Mises

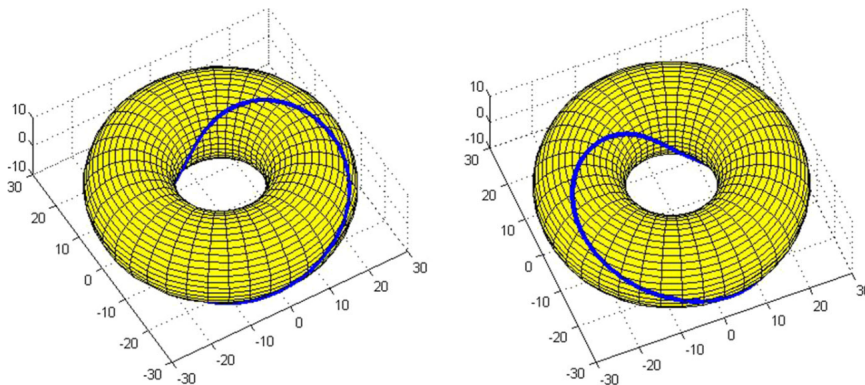
⁴¹Shared ortholog genes

⁴²Disk

⁴³Buoy

⁴⁴Tyrosine

⁴⁵Circula: Circular copula



شکل ۸: نمایش چگالی توزیع‌های یکنواخت دومتغیره روی چنبره برای دو تصویر زاویه‌ای متفاوت (چپ: $\Theta_2 = \Theta_1 + \pi \pmod{2\pi}$; راست: $\Theta_2 = -\Theta_1 + \pi \pmod{2\pi}$) [۱۰۵].

که همان توزیع وهرلی و جانسون در رابطه (۵) است. ویژگی‌های این مفصل‌های دایره‌ای از جمله رفتار چگالی‌ها، توابع توزیع و معیارهای وابستگی آنها در [۴۸] مورد بررسی قرار گرفته و به ویژگی‌های فرضی توزیع‌های متفاوت بر مبنای این مفصل‌های دایره‌ای از طریق انتقال به توزیع‌های حاشیه‌ای یکنواخت، پرداخته شده است. همچنین، برآورد ماکسیمم درستنمایی و آزمون نیکویی برازش نیز مورد ارزیابی قرار گرفته و چگالی مفصل رابطه (۳۴) به حالت d -متغیره ($d \geq 3$) گسترش یافته است. در نهایت، دو مجموعه داده شامل داده‌های باد تگزاس و داده‌های زلزله ژاپن تحلیل شده است. در مجموعه داده‌های نخست، جهت‌های باد در دو ساعت متفاوت و در مجموعه داده دوم، جهت شیب‌ترین فرود زمین قبل از وقوع زلزله و جهت حرکت جانبی زمین پس از وقوع زلزله به‌عنوان متغیرهای دایره‌ای در نظر گرفته شده است.

لگونا [۶۲] در سال ۲۰۱۹ یک مدل مارکوف پنهان مبتنی بر مفصل را برای تحلیل داده‌های سری زمانی چنبره‌ای معرفی کرد. این مدل به‌طور هم‌زمان، همبستگی دایره‌ای، چندمدی بودن و خودهمبستگی زمانی را بازنمایی می‌کند. این مدل، برای بخش‌بندی یک سری زمانی شامل ۱۳۲۶ مشاهده نیم‌ساعته از جهت باد و جهت امواج دریا به‌کار گرفته شده است.

اموتو و ایبی [۳۸] در سال ۲۰۲۱ یک ساختار ساده برای تعریف توزیع چنبره‌ای از طریق ترکیب توزیع‌های دایره‌ای مستقل، ارائه کردند. در این روش، توزیع‌های حاشیه‌ای به‌صورت

یک استدلال مشابه براساس $\Theta_2 = \Omega - \Theta_1$ ، چگالی دایره‌ای متمم را به‌صورت زیر به‌دست می‌دهد:

$$c_{\Theta_1, \Theta_2}^*(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} g(\theta_2 + \theta_1). \quad (33)$$

مفصل‌های رابطه‌های (۳۲) و (۳۳) به‌ترتیب به وابستگی‌های مثبت و منفی اشاره دارند [۲۷]. این دو چگالی را می‌توان به‌صورت زیر با هم ترکیب کرد:

$$c_{\Theta_1, \Theta_2}(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} g(\theta_2 - q\theta_1), \quad (34)$$

که در آن $q \in \{-1, 1\}$ است. رابطه (۳۴)، چگالی توزیع توأم Θ_1 و $\Theta_2 = \Omega - q\Theta_1$ را نشان می‌دهد. در این رابطه، اگر تابع چگالی یکنواخت دایره‌ای انتخاب شود، مفصل مورد نظر به مفصل دایره‌ای استقلال تبدیل می‌شود که چگالی آن به‌صورت $c_{\Theta_1, \Theta_2}(\theta_1, \theta_2) = 1/\sqrt{4\pi^2}$ است. از سوی دیگر، همانند رابطه (۸) می‌توان از طریق تعریف مستقیم مفصل برای هر متغیر تصادفی، به تعریف چگالی‌های دایره‌ای دومتغیره پرداخت. با استفاده از قضیه اسکالر، یک چگالی دایره‌ای دومتغیره روی یک چنبره‌ی واحد، \mathbb{S}^2 ، را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$f_{\Theta_1, \Theta_2}(\theta_1, \theta_2) = 4\pi^2 f_{\Theta_1}(\theta_1) f_{\Theta_2}(\theta_2) \times c_{\Theta_1, \Theta_2}(2\pi F_{\Theta_1}(\theta_1), 2\pi F_{\Theta_2}(\theta_2)). \quad (35)$$

از ترکیب توابع چگالی توأم (۳۴) و (۳۵) چگالی توأم زیر به‌دست می‌آید:

$$f_{\Theta_1, \Theta_2}(\theta_1, \theta_2) = 2\pi f_{\Theta_1}(\theta_1) f_{\Theta_2}(\theta_2) g(2\pi[F_{\Theta_2}(\theta_2) - qF_{\Theta_1}(\theta_1)]),$$

که در آن ضرایب مختلط $\phi(m, n)$ با انتخاب مناسب تعیین می‌شوند و $m, n \in \mathbb{Z}$ هستند. در رابطه (۳۷)، حالت $\phi(m, n) = 0$ توزیع یکنواخت دایره‌ای دومتغیره را به دست می‌دهد. نویسندگان با به‌کاربردن ضرایب مختلف در این رابطه، کلاس‌های زیادی از مفصل‌های دایره‌ای را به دست آوردند و دو مجموعه داده شامل داده‌های شبیه‌سازی شده از یک توزیع دایره‌ای دومتغیره و داده‌های مربوط به جهت باد را تحلیل کردند. اوگاتا [۸۰] در سال ۲۰۲۳، با تعریف تابع مفصل دایره‌ای به صورت

$$C_{\Theta_1, \Theta_2}(u, v) = F_{\Theta_1, \Theta_2}(F_{\Theta_1}^{-1}(u), F_{\Theta_2}^{-1}(v)),$$

کران‌های بالا و پایین فرشه-هافدینگ را برای یک مفصل دایره‌ای به دست آورد. کاتو و همکاران [۵۳] در سال ۲۰۲۴ مفصل کوشی پوشانده‌ی سه‌متغیره را معرفی کردند که در بخش مفصل‌های دایره‌ای-خطی شرح داده شد.

مینگویین و همکاران [۷۴] در سال ۲۰۲۵ یک چارچوب نوین برای مدل‌سازی همبستگی بین داده‌های محوری (جهت نوارهای پوشش گیاهی) و دایره‌ای (جهت باد) ارائه کردند که با بهره‌گیری از یک مفصل دایره‌ای مبتنی بر چگالی چنبره‌ای کاتو و پیوسی [۵۵] ساخته شده است. چگالی مدل پایه‌ای آنها که به نام چگالی دومتغیره دایره‌ای-محوری آمیخته یاد می‌شود، به صورت زیر است:

$$f_{\Theta, \Psi}(\theta, \psi) = c_\rho (F_\Theta(\theta), F_\Psi(\psi)) f_\Theta(\theta) f_\Psi(\psi), \quad (38)$$

که در آن $0 \leq \psi < \pi$ ، $0 \leq \theta < 2\pi$ و c_ρ چگالی مفصل دایره‌ای حاصل از چگالی کوشی پوشانده است. آنها این مدل را در قالب یک مدل آمیخته با متغیرهای همراه^{۴۷} بسط داده‌اند. چگالی دایره‌ای-محوری آمیخته این مدل با J پارامتر به صورت زیر است:

$$f_{\Theta, \Psi}(\theta, \psi) = \sum_{j=1}^J \pi_j f(\theta, \psi; \eta_j),$$

که در آن ضرایب احتمالی توزیع چندجمله‌ای هستند

مجزا مشخص می‌شوند و فرض می‌شود که میانگین جهت‌های چگالی‌های دایره‌ای f_{Θ_1} و f_{Θ_2} برابر صفر است. در نتیجه، توزیع چنبره‌ای با چگالی زیر تعریف می‌شود:

$$f(\theta_1, \theta_2) = \{1 + \lambda \sin(\theta_1 - \mu_1) \sin(\theta_2 - \mu_2)\} \times f_{\Theta_1}(\theta_1 - \mu_1) f_{\Theta_2}(\theta_2 - \mu_2), \quad (36)$$

که در آن $-\pi \leq \theta_1, \theta_2, \mu_1, \mu_2 < \pi$ و پارامترهای مکان $1 \leq \lambda \leq -1$ پارامتر وابستگی بین متغیرها هستند. دو متغیر در صورت صفر بودن λ از هم مستقل اند. از آنجا که گشتاورهای سینوسی چگالی‌های f_{Θ_1} و f_{Θ_2} برابر صفر هستند، این تابع یک تابع چگالی احتمال معتبر است. در رابطه (۳۶) حالت خاصی از مفصل‌های دایره‌ای معرفی شده در رابطه (۳۵) وجود دارد که به صورت زیر است:

$$c_{\Theta_1, \Theta_2}(u, v) = 1 + \lambda \sin \left[F_{\Theta_1}^{-1}(u/2\pi) \right] \sin \left[F_{\Theta_2}^{-1}(v/2\pi) \right] / 4\pi^2.$$

نویسندگان از این توزیع به عنوان توزیع چنبره‌ای سینوسی-همبسته (SCTD)^{۴۶} یاد کردند و آن را در تحلیل داده‌های مربوط به ساختار ژنوم‌های دو باکتری به کار بردند.

امیجیرس-الونسو و لی [۵] در سال ۲۰۲۲ توزیع کوشی پوشانده‌ی دومتغیره سینوسی-چوله را ارائه کردند که یک مدل مفصل-مبنا است و شباهت زیادی به مدل کاتو و پیوسی در رابطه (۳۱) دارد. این مدل به دلیل چوله‌بودن و دومی‌بودن بالقوه‌ی آن، احتمالاً یکی از منعطف‌ترین مدل‌های موجود برای داده‌های چنبره‌ای است. آنها این مدل را برای تحلیل داده‌های پروتئینی به کار بردند.

کاتو و همکاران [۵۶] در سال ۲۰۲۲ یک خانواده از چگالی‌های دایره‌ای مبتنی بر سری‌های فوریه به صورت زیر ارائه نمودند:

$$c_{\Theta_1, \Theta_2}(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{4\pi^2} \times \left[1 + 2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \phi(m, n) e^{-i(m\theta_1 + n\theta_2)} \right\} \right], \quad (37)$$

⁴⁶Sine-correlated toroidal distribution

⁴⁷Concomitant variables

که مجموع آنها برابر ۱ است و

۲.۴ ضرایب همبستگی

در پژوهش‌های مرتبط به مفصل‌های دایره‌ای-دایره‌ای نیز از ضرایب همبستگی تعریف شده برای متغیرهای دایره‌ای در آمار جهتی استفاده می‌شود. در اینجا به‌طور خلاصه به مرور این ضرایب همبستگی می‌پردازیم. در متغیرهای خطی دو رویکرد اصلی برای توصیف رابطه همبستگی وجود دارد. رویکرد نخست، همبستگی گشتاوری است که شناخته‌شده‌ترین آنها ضریب همبستگی پیرسون است. رویکرد دوم، همبستگی رتبه‌ای است که شامل ρ -اسپیرمن و τ -کندال می‌شود. به‌طور طبیعی، می‌توان این دو رویکرد را برای مطالعه همبستگی در داده‌های دایره‌ای نیز در نظر گرفت.

$$f(\theta, \psi; \eta_j) = c_{\rho_j}(F(\theta; \gamma), F(\psi; \alpha)) f(\theta; \gamma) f(\psi; \alpha),$$

چگالی دایره‌ای-محوری مربوط به رابطه (۳۸) است. در اینجا، بردار γ_j شامل پارامترهای توزیع دایره‌ای حاشیه‌ای مؤلفه j -ام و α_j شامل پارامترهای توزیع محوری حاشیه‌ای مؤلفه j -ام هستند و ρ_j میزان همبستگی بین متغیرهای دایره‌ای و محوری را در درون مؤلفه j -ام نشان می‌دهد.

۱.۲.۴ ضرایب همبستگی گشتاوری

چندین ضریب همبستگی دایره‌ای دومتغیره که از نوع گشتاوری هستند توسط ماردیا [۶۷] در سال ۱۹۷۵، جانسون و وهرلی [۴۴] در سال ۱۹۷۷، ماردیا و پوری [۷۲] در سال ۱۹۷۸، استیفنز [۹۹] و ماردیا و همکاران [۷۱] در سال ۱۹۷۹ تعریف شده‌اند. جاپ و ماردیا [۵۱] در سال ۱۹۸۰ مرور جامعی بر این ضرایب همبستگی ارائه کردند و با گسترش ضریب همبستگی، ماردیا و همکاران [۷۱] در سال ۱۹۷۹ یک ضریب همبستگی کلی مبتنی بر همبستگی‌های کانونی پیشنهاد دادند. ریویست [۸۷] در سال ۱۹۸۲ یک معیار علامت‌دار^{۵۱} که علاوه بر شدت، جهت همبستگی (مثبت یا منفی) را نیز اندازه می‌گیرد، پیشنهاد کرد. جمالاماداکا و سرما [۴۰] در سال ۱۹۸۸ ضریب مشابهی را تعریف نمودند. فیشر و لی [۲۷] در سال ۱۹۸۳ معیار دیگری را برای اندازه‌گیری وابستگی بین متغیرهای دایره‌ای معرفی کردند. فرض کنید (Θ_1, Ψ_1) و (Θ_2, Ψ_2) دو بردار تصادفی مستقل و هم‌توزیع با بردار (Θ, Ψ) از متغیرهای تصادفی دایره‌ای با توزیع توأم بر روی سطح یک چنبره باشند. ضریب همبستگی فیشر و لی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

مونتیسینوس-وازکس و نونیز-آنتونیو [۷۵] در سال ۲۰۲۵ مدل‌های چندمتغیره بیزی را برای داده‌های جهتی روی ربع اول دایره واحد (زاویه‌های θ در بازه $[0, \pi/2]$) ارائه کرده‌اند. به چنین داده‌هایی، داده‌های جهتی کران‌دار نیز گفته می‌شود. روش پیشنهادی آنها مبتنی بر توابع مفصل، به‌ویژه مفصل ضمنی^{۴۸} است، به‌طوری‌که چگالی‌های حاشیه‌ای این مدل‌ها توزیع‌های گامای تصویر شده^{۴۹} هستند. آنها روش پیشنهادی را هم روی داده‌های شبیه‌سازی شده و هم روی یک مجموعه داده واقعی از زاویه‌های مرتبط با حرکات ارتوپدی (زاویه‌های الگوی راه‌رفتن/حرکت) به‌کار برده‌اند تا توان مدل در برازش و توصیف ساختار وابستگی بین زاویه‌های محدود شده نشان داده شود. کاتو و همکاران [۵۴] در سال ۲۰۲۵ دو خانواده‌ای از توزیع‌های احتمال را برای تحلیل بیزی داده‌های ابرچنبره‌ای معرفی کردند. خانواده‌ی اول، توزیع نرمال تصویر شده روی چنبره (TPN)^{۵۰}، از طریق تصویر توزیع‌های نرمال چندمتغیره تحت قیود پارامتری خاص به‌دست می‌آید. خانواده‌ی دوم، تعمیمی از حالت مفصل خانواده‌ی اول است که امکان استفاده از هر توزیع حاشیه‌ای دلخواه را فراهم می‌کند. این توزیع‌های پیشنهادی برای تحلیل داده‌های هواشناسی شامل سری‌های زمانی مربوط به جهت باد و جهت موج استفاده شده است.

⁴⁸Implicit copula

⁴⁹Projected gamma

⁵⁰Toroidal projected normal

⁵¹Signed measure

$$\Sigma_{12} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \alpha_g & \beta_g \\ -q\beta_g & q\alpha_g \end{pmatrix}.$$

جونز و همکاران [۴۸] در سال ۲۰۱۵ چند ضریب همبستگی دایره‌ای معرفی شده را برای مفصل‌های دایره‌ای به‌ویژه مفصل‌هایی با چگالی c_{Θ_1, Θ_2} در رابطه (۳۴) گسترش دادند. نخستین معیار وابستگی علامت‌دار معیار ریویست [۸۷] به‌صورت $\rho_R = 2\lambda_2$ است که در آن کوچک‌ترین مقدار ویژه ماتریس Σ_{12} ضرب در $\text{sgn}(\det \Sigma_{12})$ را نشان می‌دهد. این مقدار برای مفصل دایره‌ای به $\rho_R = q\rho_g$ ساده می‌شود. دومین معیار وابستگی علامت‌دار، معیار فیشر و لی [۲۷] است که برای یک مفصل دایره‌ای به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\rho_{FL} = \det \Sigma_{12} / \sqrt{\det \Sigma_{11} \det \Sigma_{22}}.$$

بنابراین، برای مفصل دایره‌ای با چگالی c_q داریم:

$$\rho_{FL} = q(\alpha_g^2 + \beta_g^2) = q\rho_g^2.$$

معیار وابستگی علامت‌دار سوم، معیار جمالاماداکا و سرما [۴۰] است که برای یک مفصل دایره‌ای به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\rho_{JS} = \left| E \left(e^{i(\Theta_1 - \Theta_2)} \right) \right| - \left| E \left(e^{i(\Theta_1 + \Theta_2)} \right) \right|.$$

برای مفصل دایره‌ای با چگالی g ، مقدار ρ_{JS} نیز به‌صورت $\rho_{JS} = q\rho_g$ ساده می‌شود.

علاوه بر این معیارها، معیارهای وابستگی بدون علامت متعلق به جانسون و وهرلی [۴۴] و جاپ و ماردیا [۵۱] نیز وجود دارند که بر کمیت زیر متکی‌اند:

$$S = \Sigma_{11}^{-1} \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{12}^T,$$

و برای مفصل دایره‌ای به‌صورت $S = \rho_g^2 I_2$ ساده می‌شود. از این‌رو، معیار وابستگی جانسون و وهرلی، ρ_{JW} ، برابر با ریشه مربع بزرگ‌ترین مقدار ویژه‌ی ماتریس S است که برای مفصل دایره‌ای برابر با ρ_g به‌دست می‌آید. همچنین، معیار وابستگی جاپ و ماردیا، ρ_{JM} ، برابر با اثر ماتریس S است که برای مفصل دایره‌ای برابر با $2\rho_g^2$ به‌دست می‌آید. نکته کلیدی در

$$\rho_{FL} = \frac{E\{\sin(\Theta_1 - \Theta_2) \sin(\Psi_1 - \Psi_2)\}}{\sqrt{E\{\sin^2(\Theta_1 - \Theta_2)\} E\{\sin^2(\Psi_1 - \Psi_2)\}}}.$$

ضریب همبستگی تعریف‌شده توسط جمالاماداکا و سرما [۴۰] به‌صورت زیر است:

$$\rho_{JS} = \frac{E\{\sin(\Theta - \mu) \sin(\Psi - \nu)\}}{\sqrt{\text{Var}\{\sin(\Theta - \mu)\} \text{Var}\{\sin(\Psi - \nu)\}}},$$

که در آن μ و ν به‌ترتیب میانگین‌های دایره‌ای متغیرهای Θ و Ψ هستند. همان‌طور که مشاهده می‌شود، ρ_{FL} و ρ_{JS} دارای فرم‌های مشابهی هستند، اما ρ_{JS} به ضریب همبستگی گشتاوری پیروسون نزدیک‌تر است. هر دو معیار می‌توانند مقدار ۱ یا -۱ را بگیرند که به‌ترتیب متناظر با وابستگی مثبت/منفی اکید در متغیرهای خطی هستند.

برای تعمیم این ضرایب همبستگی به مفصل‌های دایره‌ای به‌ویژه مفصل‌های دایره‌ای با چگالی c_{Θ_1, Θ_2} در رابطه (۳۴)، مفاهیم زیر را نیاز داریم [۴۸]: از نظر مفهومی در این مفصل‌ها، تمرکز توزیع g وابستگی c_q را کنترل می‌کند؛ زمانی که g بسیار متمرکز باشد، وابستگی مفصل دایره‌ای بالا و زمانی که g پراکنده‌تر باشد، وابستگی آن پایین است. همچنین، طول برآیند میانگین به‌صورت $\rho_g = \sqrt{\alpha_g^2 + \beta_g^2}$ است که در آن $\alpha_g = E_g(\cos \Omega)$ و $\beta_g = E_g(\sin \Omega)$ تمرکز g را اندازه‌گیری می‌کند. با استفاده از بخش ۳-۸ مقاله کاتو و پیوسی [۵۵] و با توجه به این‌که

$$E(\cos \Theta_1) = E(\sin \Theta_1) = E(\cos \Theta_2) = E(\sin \Theta_2) = 0$$

به‌دلیل یکنواختی دایره‌ای، تمامی (به جز یکی) معیارهای وابستگی به توابعی از ماتریس‌های 2×2 به‌صورت $\Sigma_{kl} = E(X_k X_l^T)$ برای $k, l = 1, 2$ وابسته‌اند که در آن $X_1 = (\cos \Theta_1, \sin \Theta_1)^T$ و $X_2 = (\cos \Theta_2, \sin \Theta_2)^T$. از آنجا که Σ_{11} و Σ_{22} فقط به توزیع‌های حاشیه‌های یکنواخت دایره‌ای وابسته‌اند، $\Sigma_{11} = \Sigma_{22} = \frac{1}{2} I_2$ که در آن I_2 ماتریس همانی 2×2 است. با اندکی محاسبات و به‌کارگیری اتحادهای مثلثاتی پایه و رابطه کلی $\Theta_2 = \Omega + q\Theta_1$ ، نتیجه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$\rho_0 > 0$ نشان می‌دهد که دو متغیر Θ و Ψ روی محیط دایره در یک جهت حرکت می‌کنند، در حالی که $\rho_0 < 0$ بیانگر حرکت آنها در جهت‌های مخالف است.

۲۰۲۰۴ ضرایب همبستگی رتبه‌ای

فیشر و لی [۲۶] در سال ۱۹۸۲ یک معیار ناپارامتری برای وابستگی دایره‌ای-دایره‌ای را معرفی کردند. در مقاله آنها مفهومی با عنوان «T-همهانگ^{۵۳}» بر اساس رابطه‌ای به صورت $\varphi = g(\theta)$ تعریف شده است. وقتی θ در یک جهت مشخص، چه در جهت ساعت‌گرد و چه پادساعت‌گرد، به‌طور پیوسته یک دور کامل را طی می‌کند، φ نیز در همان جهت به‌طور پیوسته یک دور کامل را طی می‌کند. اگر جهت حرکت در هر دو متغیر یکسان باشد، رابطه $\varphi = g(\theta)$ را T-همهانگ می‌نامند. در غیر این صورت، یعنی اگر یک جهت ساعت‌گرد و جهت دیگر پادساعت‌گرد باشد، آنگاه $\varphi = g(\theta)$ را T-ناهمهانگ می‌گویند. فرض کنید $P_i = (\theta_i, \varphi_i)$ برای $i = 1, \dots, n$ نمایانگر n نقطه بر روی چنبره باشد. نقاطی را T-همهانگ می‌نامیم هرگاه رابطه T-همهانگ به صورت $\varphi = g(\theta)$ وجود داشته باشد به طوری که $\varphi_i = g(\theta_i)$ برای $i = 1, \dots, n$ برقرار شود. به‌طور مشابه، نقاطی را در حالت ناهمهانگ تعریف می‌کنیم. همچنین، فرض کنید $P = (\theta, \varphi)$ به‌طور تصادفی روی چنبره توزیع شده باشد. وابستگی بین θ و φ به‌صورت زیر اندازه‌گیری می‌شود:

$$\Delta = \Pr(P_1, P_2, P_3 \text{ که T-همهانگ هستند}) - \Pr(P_1, P_2, P_3 \text{ که T-ناهمهانگ هستند}),$$

که در آن P_1, P_2, P_3 و P_4 نقاط تصادفی مستقلی هستند که همانند P بر روی چنبره توزیع شده‌اند.

یک همتهای ρ -اسپیرمن برای ارزیابی T-همهانگی نیز توسط فیشر و لی [۲۶] در سال ۱۹۸۲ مطالعه شده است. در این مقاله، رتبه‌های خطی برای داده‌های دایره‌ای در نظر گرفته شده و از توابع مثلثاتی برای تأمین ویژگی تناوبی استفاده شده است. شی و همکاران [۹۵] در سال ۱۹۹۴ آماره‌های تباهنده‌ی وزنی را پیشنهاد کردند که در حالت خطی، τ -کندال و ρ -اسپیرمن را با

تمام مشاهدات فوق، نحوه ارتباط این پنج معیار وابستگی به ρ_g است؛ موضوعی که نقش ρ_g را به‌عنوان پارامتر وابستگی در مفصل‌های دایره‌ای با چگالی c_q توجیه می‌کند.

جونز و همکاران [۴۸] در سال ۲۰۱۵ وابستگی موضعی^{۵۴} را براساس تابع وابستگی موضعی $\gamma_f(x, y) = \partial^2 \log f(x, y) / \partial x \partial y$ تعریف نمودند. تابع وابستگی موضعی برای کلاسی از مفصل‌های دایره‌ای با چگالی رابطه (۳۴) به‌صورت زیر است:

$$\gamma_c(\theta_1, \theta_2) = -q(\log g)''(\theta_2 - q\theta_1).$$

برای تابع g تک‌مدی، مشتق دوم $(\log g)''$ معمولاً در مد و نواحی نزدیک به آن منفی است؛ از این‌رو، تابع وابستگی موضعی متناظر نیز به‌طور طبیعی و معقول، در نواحی‌ای از مفصل دایره‌ای که دارای بیشترین چگالی هستند، هم‌علامت با q است. با انتگرال‌گیری از γ_c نسبت به چگالی مفصل دایره‌ای، می‌توان معیار وابستگی علامت‌دار دیگری به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$\gamma = q \int_0^{2\pi} \frac{\{g'(\phi)\}^2}{g(\phi)} d\phi = qI_g,$$

که در آن I_g اطلاع فیشر برای پارامتر مکان چگالی g است. از آن‌جا که I_g یک مقدار مثبت است، γ نیز همانند ρ_{FL} دارای علامت q خواهد بود. اندازه این معیار، به ρ_g وابسته است، نه به μ_g ؛ از این‌رو، انتظار می‌رود با افزایش ρ_g مقدار آن افزایش یابد (اطلاع بیشتر \Rightarrow تمرکز بیشتر). به‌عنوان مثال، برای تابع g کاردیوئید، $I_g = 1 - \sqrt{1 - 4\rho^2}$ ، برای g کوشی پوشانده، $I_g = 2\rho_g^2 / (1 - \rho_g^2)^2$ و برای g فون میزس با پارامتر تمرکز k و طول برابری میانگین $A(k)$ [۷۰]، $I_g = kA(k)$ به‌دست می‌آیند. فرض کنید دو بردار تصادفی (Θ_1, Ψ_1) و (Θ_2, Ψ_2) مستقل و هم‌توزیع با بردار (Θ, Ψ) باشند. ژان و همکاران [۱۰۵] در سال ۲۰۱۹ یک ضریب همبستگی دایره‌ای گشتاوری بر پایه تابع ترتیب به‌صورت زیر معرفی نمودند:

$$\rho_o = \frac{E\{h(\Theta_1, \Theta_2)h(\Psi_1, \Psi_2)\}}{\sqrt{E\{[h(\Theta_1, \Theta_2)]^2\}E\{[h(\Psi_1, \Psi_2)]^2\}}},$$

که در آن h تابع ترتیب تعریف‌شده در رابطه (۱) است. اگر $h(\Theta_1, \Theta_2)h(\Psi_1, \Psi_2) > 0$ ، آنگاه $\rho_o > 0$ خواهد بود. در اینجا

⁵³T-concordant

که در آن f_{Θ} چگالی حاشیه‌ای Θ ، f_{Ψ} چگالی حاشیه‌ای Ψ و $f_{\Theta, \Psi}$ چگالی توأم زوج (Θ, Ψ) است. اگر (Θ, Ψ) دارای توزیع داده‌شده در رابطه (۵) باشد، آنگاه اطلاع متقابل دایره‌ای در رابطه (۳۹) به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\text{CMI}(\Theta, \Psi) = 2\pi \int_0^{2\pi} g(t) \log\{g(t)\} dt.$$

به طور خاص، اگر g چگالی توزیع کوشی پوشانده باشد، آنگاه $\text{CMI}(\Theta, \Psi) = -\log(1 - \rho^2)$ در رابطه (۳۹) اگر چگالی ارائه‌شده در رابطه (۲۷) قرار داده شود، آنگاه CMI بر مبنای مفصل به دست می‌آید.

۳.۴ استنباط آماری

۱.۳.۴ برآورد پارامترها

باتاچاچی و داس [۸] در سال ۲۰۱۸ یک الگوریتم برآورد برای چگالی توأم دو متغیر تصادفی دایره‌ای مانند چگالی در رابطه (۲۷) ارائه کردند. این الگوریتم روش‌های برآورد زیادی از جمله روش برآورد گشتاوری (MME)^{۵۵}، روش MLE و روش امتیازبندی را شامل می‌شود. در صورتی که هیچ یک از توزیع‌های دایره‌ای موجود قادر به برازش مناسب داده‌ها نباشد، برای برآورد چگالی‌های حاشیه‌ای از روش ناپارامتری برآورد چگالی هسته‌ای به عنوان راهکار جایگزین استفاده می‌شود.

روش گشتاوری (که در آن برآوردها با برابر قراردن گشتاورهای مثلثاتی نمونه با گشتاورهای مثلثاتی جامعه حاصل می‌شوند) بیشتر برای برآورد پارامترها در مفصل‌های دایره‌ای استفاده می‌شود. کاتو و پیوسی [۵۵] در سال ۲۰۱۵ نشان دادند که روش گشتاورها نسبت به ماکسیمم درست‌نمایی کارآمدتر است؛ زیرا برای اکثر برآوردهای ماکسیمم درست‌نمایی، فرم بسته وجود ندارد. از سوی دیگر، روش گشتاورها از نظر محاسباتی بسیار سریع، پیاده‌سازی آن ساده و دارای فرمول‌های بسته برای برآورد پارامترها است. کاتو و پیوسی این روش را برای برآورد پارامترهای مدل رابطه (۳۱) به کار برده‌اند. علاوه بر این، این روش در مقالاتی مانند موتو و ابی [۳۸] در سال ۲۰۲۱، کاتو و همکاران

هم ترکیب می‌کند. پس از ضرب این آماره در یک ثابت وابسته به اندازه‌ی نمونه، با آماره Δ_n در کار فیشر و لی [۲۶] منطبق می‌شود.

ژان و همکاران [۱۰۵] در سال ۲۰۱۹ یک هم‌تای τ -کندال برای داده‌های دایره‌ای ارائه کردند. فرض کنید (Θ_1, Ψ_1) و (Θ_2, Ψ_2) مستقل و هم‌توزیع با (Θ, Ψ) باشند. هم‌تای چنبره‌ای τ -کندال، به صورت تفاضل بین احتمال هماهنگی و ناهماهنگی زوج‌های (Θ_1, Ψ_1) و (Θ_2, Ψ_2) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tau_0 = \tau_{\Theta, \Psi} = \Pr [h(\Theta_1, \Theta_2)h(\Phi_1, \Phi_2) > 0] - \Pr [h(\Theta_1, \Theta_2)h(\Phi_1, \Phi_2) < 0].$$

از آن جا که دامنه‌ی τ_0 بازه‌ی $[-1, 1]$ است، مقدار مثبت آن نشان می‌دهد که احتمال چرخش هم‌جهت Θ و Ψ در جهت ساعت‌گرد (یا پادساعت‌گرد) زیاد است، در حالی که احتمال وقوع وضعیت چرخش Θ به صورت ساعت‌گرد همراه با چرخش پادساعت‌گرد Ψ یا برعکس، پایین است. ضریب همبستگی τ_0 بر مبنای مفصل به صورت زیر به دست آید:

$$\tau_0 = 4 \int_0^1 \int_0^1 C_{\Psi}(u, v) dC_{\Theta}(u, v) - 1,$$

که در آن C_{Ψ} و C_{Θ} به ترتیب مفصل‌های (Θ_1, Ψ_1) و (Θ_2, Ψ_2) هستند. اگر داده‌ها از یک توزیع توأم یکسان باشند، آنگاه نسخه‌ی جامعه‌ای τ -کندال برای Θ و Ψ (که آن را با τ_C نمایش می‌دهیم) به صورت زیر است:

$$\tau_C = 4E(C(U, V)) - 1,$$

که در آن $U = F(\Theta)$ و $V = G(\Psi)$ هستند.

لگوی و همکاران [۶۳] در سال ۲۰۱۹ معیار اطلاع متقابل دایره‌ای (CMI)^{۵۴} را معرفی کردند. اگر (Θ, Ψ) یک زوج متغیر دایره‌ای باشد، آنگاه CMI بین Θ و Ψ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{CMI}(\Theta, \Psi) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_{\Theta, \Psi}(\theta, \psi) \times \log \left\{ \frac{f_{\Theta, \Psi}(\theta, \psi)}{f_{\Theta}(\theta)f_{\Psi}(\psi)} \right\} d\psi d\theta, \quad (39)$$

⁵⁴Circular mutual information

⁵⁵Method of moment estimation

[۵۶] در سال ۲۰۲۲ و کاتو و همکاران [۵۳] در سال ۲۰۲۴ استفاده شده است.

روش MLE مانند بخش مفصل‌های دایره‌ای-خطی است. تنها در روش امتیازبندی (که در آن برآوردها از طریق حل عددی معادلات ماکسیمم درستنمایی به دست می‌آیند)، بعضی تفاوت‌ها وجود دارند. کاتو و پیوسی [۵۵] روش MLE را نیز برای برآورد پارامترهای رابطه (۳۱) به کار بردند؛ اما از آنجایی که فرم بسته‌ای برای برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی وجود ندارد، از روش‌های عددی بهینه‌سازی مانند نلدر-مید [۷۸] و شبه-نیوتن [۹۳] استفاده کردند. یک روش موجود برای برآورد چگالی توأم در رابطه (۵) که توسط جونز و همکاران [۴۸] در سال ۲۰۱۵ ارائه شده است، برآورد پارامترهای توزیع توأم از طریق ماکسیمم‌سازی تابع لگاریتم درستنمایی نسبت به تغییرات در پارامترهای توزیع و سپس جایگزینی پارامترهای برآورده شده و فرم‌های چگالی و تابع توزیع حاشیه‌ای در چگالی رابطه (۵) است. در این روش، پارامتر میانگین جهت در چگالی پیونددهنده روی مقدار صفر تنظیم می‌شود. تابع لگاریتم درستنمایی یک نمونه تصادفی $(\theta_{11}, \theta_{21}), \dots, (\theta_{1n}, \theta_{2n})$ از توزیعی با چگالی رابطه (۵) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\ell(\tau) = n \log(\gamma\pi) + \sum_{i=1}^n \log(f_{\Theta_1}(\theta_{1i})) + \sum_{i=1}^n \log(f_{\Theta_2}(\theta_{2i})) + \sum_{i=1}^n \log(g(\gamma\pi(F_{\Theta_2}(\theta_{2i}) - qF_{\Theta_1}(\theta_{1i})))) ,$$

که در آن τ بردار پارامترهای توزیع است.

لگونا [۶۲] در سال ۲۰۱۹ و مینگوین و همکاران [۷۴] در سال ۲۰۲۵ روش تابع استنباط برای حاشیه‌ها (IFM)^{۵۶} [۵۸] را برای بهینه‌سازی روش ماکسیمم درستنمایی استفاده نموده‌اند. کاتو و همکاران [۵۴] در سال ۲۰۲۵ پارامترهای مدل‌ها را با روش زنجیره‌ی مارکوف مونت کارلویی (MCMC)^{۵۷} برآورد کرده‌اند. اخیراً، مونتیسینوس-وازکس و نونیز-آنتونیو [۷۵] در سال ۲۰۲۵ از روش بیزی برای برآورد پارامترهای مفصل ارائه شده استفاده نمودند.

۲۰۳۰۴ نیکویی برازش

آزمون‌های نیکویی برازش در مفصل‌های دایره‌ای-دایره‌ای نیز مانند آزمون‌ها در مفصل‌های دایره‌ای-خطی هستند. به طور نمونه، به کاتو و پیوسی [۵۵] در سال ۲۰۱۵، اموتو و ابی [۳۸] در سال ۲۰۲۱، فرناندز-دوران و گرگوریو-دومینگز [۲۳] در سال ۲۰۲۳ و مینگوین و همکاران [۷۴] در سال ۲۰۲۵ مراجعه کنید.

۵ مفصل‌های کروی

۱۰۵ توسعه و کاربردها

مفصل‌های کروی با مدل ارائه شده توسط کاتو [۵۲] در سال ۲۰۰۹، گسترش یافتند. این مدل برای زوجی از بردارهای واحد وابسته بر پایه‌ی حرکت براونی^{۵۸} در فضای چندبعدی، ساخته شده است. فرض کنید $\{B_t; t \geq 0\}$ یک حرکت براونی در فضای \mathbb{R}^d باشد، که در آن $d \geq 2$. چون مسیر حرکت از نقطه $0 = B_0$ آغاز می‌شود، ذره براونی نهایتاً به کره d -بعدی با شعاع $\rho \in (0, 1)$ خواهد رسید. مینیمم زمانی را که در آن ذره از کره خارج می‌شود با t_1 نشان می‌دهیم؛ یعنی $t_1 = \inf\{t; \|B_t\| = \rho\}$ که در آن $\|\cdot\|$ نرم اقلیدسی است. پس از خروج از کره‌ای با شعاع ρ ، ذره نخستین بار در زمان t_2 به کره‌ی واحد می‌رسد؛ یعنی $t_2 = \inf\{t; \|B_t\| = 1\}$. مدل پیشنهادی بر پایه توزیع توأم بردار تصادفی زیر بنا شده است:

$$\left(Q \frac{B_{t_1}}{\|B_{t_1}\|}, B_{t_2} \right),$$

که در آن Q عضوی از گروه تبدیلات متعامد $O(d)$ [۱۵] در \mathbb{R}^d است. دلیل ضرب کردن Q در $B_{t_1}/\|B_{t_1}\|$ این است که مدل از انعطاف‌پذیری بیشتر برخوردار شود، بدون آن که قابلیت تحلیل‌پذیری خود را از دست بدهد.

برای سهولت، به صورت $(U, V) = (QB_{t_1}/\|B_{t_1}\|, B_{t_2})$ می‌نویسیم که یک بردار تصادفی است و هر متغیر آن روی کره واحد مقدار می‌گیرد. توزیع توأم (U, V) دارای تابع چگالی زیر

⁵⁶Inference function for margins

⁵⁷Markov chain Monte Carlo

⁵⁸Brownian motion

است:

(۴۰)

$$c(u, v) = \frac{1}{A_{d-1}} \frac{1 - \rho^2}{(1 - 2\rho u'Qv + \rho^2)^{d/2}}, \quad u, v \in \mathbb{S}^{d-1},$$

که در آن $Q \in O(d)$ ، $\rho \in [0, 1)$ ، $x \in \mathbb{R}^d$ ؛ $\|x\| = 1$ ، x' ترانهاد x و A_{d-1} مساحت سطح کره \mathbb{S}^{d-1} است؛ به گونه‌ای که $A_{d-1} = 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$. پارامتر ρ میزان وابستگی بین U و V را تعیین می‌کند. وقتی $\rho = 0$ باشد، متغیرهای U و V مستقل و دارای توزیع یکنواخت روی کره هستند؛ یعنی $c(u, v) = 1/A_{d-1}$ برای $u, v \in \mathbb{S}^{d-1}$ و وقتی $\rho \rightarrow 1$ ، بردارها تقریباً هم‌جهت می‌شوند.

یکی از ویژگی‌های مهم مدل ارائه‌شده در رابطه (۴۰) این است که دارای توزیع‌های حاشیه‌ای و شرطی خوش‌تعریف و شناخته‌شده است. اگر بردار تصادفی (U, V) دارای چگالی (۴۰) باشد، می‌نویسیم $(U, V) \sim BS_d(\rho Q)$. چگالی این بردار تصادفی تحت گروه $O(d)$ متقارن است. در نتیجه، توزیع‌های حاشیه‌ای U و V ، توزیع‌های یکنواخت روی ابرکره واحد \mathbb{S}^{d-1} هستند. هر دو توزیع شرطی $(U \text{ به شرط } V = v)$ و $(V \text{ به شرط } U = u)$ توزیع‌های خروج^{۵۹} برای کره هستند. بنابراین، مدل رابطه (۴۰) را می‌توان به‌عنوان چگالی یک مفصل روی $\mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{S}^{d-1}$ در نظر گرفت. یک تفاوت این مفصل خاص با مفصل‌های معمولی، تناوبی بودن متغیرهای آن است. همان‌طور که در بخش ۴ مقاله ساو [۹۲] بحث شده است، می‌توان مدلی با توزیع‌های حاشیه‌ای متقارن دوران‌یافته را از مدلی با توزیع‌های حاشیه‌ای یکنواخت به‌دست آورد. چگالی مفصل رابطه (۴۰) برای حالت $d = 2$ به یک مفصل دایره‌ای تبدیل می‌شود که چگالی آن در مرجع [۵۲] آورده شده است. این مفصل، نمایش مختلط یک توزیع دو متغیره مشابه توزیع کوشی پوشانده را دارد.

همچنین، نویسنده تعمیم‌هایی از مدل پیشنهادی از جمله شروع حرکت براونی از نقطه‌ای غیر از مبدا $(B_0 = \xi(\xi < \rho))$ ، برای ساخت خانواده‌هایی از توزیع‌های توأم با حاشیه‌ای‌های دلخواه (مثلاً توزیع فون‌میزس) و توزیع‌های متناظر در صفحه \mathbb{R}^2 و روی استوانه با توزیع‌های حاشیه‌ای و توزیع‌های شرطی گاوسی-

فون‌میزس پوشانده، ارائه کرده است. در این مقاله، دو مجموعه از داده‌های جهت باد با استفاده از مدل‌های تعمیم‌یافته‌ی دایره‌ای پیشنهادی، مورد تحلیل قرار گرفته‌اند.

جاپ [۵۰] در سال ۲۰۱۵ با تعمیم مفهوم مفصل‌ها به حاصل‌ضرب‌های منیفدهای ریمانی فشرده، چارچوب نظری مناسبی برای تحلیل وابستگی بین متغیرهای مبتنی بر منیفدها، ارائه نمود. نویسنده ابتدا توزیع‌های یکنواخت و توابع مفصل را روی منیفدهای ریمانی فشرده تعریف می‌کند و سپس دو ساختار عمومی برای تعریف مفصل‌ها روی منیفدهای همگن فشرده، ارائه می‌کند.

۲.۵ ضرایب همبستگی

ضریب‌های همبستگی برای متغیرهای تصادفی کروی می‌توانند از طریق تعمیم‌های ساده‌ای از ضریب‌های همبستگی دایره‌ای-دایره‌ای به‌دست آیند که در زیربخش ۲.۴ شرح داده شد. به‌طور نمونه، فرض کنید $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ مشاهدات مستقل بر روی بردارهای X و Y در فضای کروی \mathbb{S}^{d-1} و \mathbb{S}^{q-1} با ماتریس کواریانس زیر هستند:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}.$$

ضریب همبستگی جانسون و وهلی [۴۴] به‌صورت بزرگ‌ترین مقدار ویژه ماتریس $S = \Sigma_{11}^{-1} \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{21}$ تعریف می‌شود. یا ضریب همبستگی جاپ و ماردیا [۵۱] که به‌روش نشانیدنی^{۶۰} به‌دست می‌آید، به‌صورت زیر تعمیم می‌یابد:

$$r^2 = \text{tr}(S) = \text{tr}(\Sigma_{11}^{-1} \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{21}),$$

که در آن $\text{tr}(S)$ اثر ماتریس S است. اگر Σ^* را به‌صورت زیر تعریف کنیم:

$$\Sigma^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} x_i x_i^T & x_i y_i^T \\ y_i x_i^T & y_i y_i^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma_{11}^* & \Sigma_{12}^* \\ \Sigma_{21}^* & \Sigma_{22}^* \end{pmatrix},$$

⁵⁹Exit distribution

⁶⁰Embedding

جمله AIC و BIC برای ارزیابی مدل‌های به‌دست‌آمده استفاده می‌کنند. کاتو [۵۲] در سال ۲۰۰۹ یک آماره محوری^{۶۱} را برای مدل ارائه‌شده در رابطه (۴۰) به‌دست آورد. مدل‌هایی که بر روی حاصل‌ضرب منیفدهای ریمانی فشرده تعریف می‌شوند، با روش‌های دیگر مورد ارزیابی قرار می‌گیرند. در مقاله جاپ [۵۰] به این روش‌ها پرداخته شده است.

۶ نتیجه‌گیری و مسیرهای پژوهشی

در این مقاله، مرور جامعی بر مفصل‌های جهتی و کاربرد آنها در مدل‌سازی وابستگی میان داده‌های جهتی ارائه شد. مبانی نظری، توسعه‌های تاریخی، و کاربردهای عملی سه چارچوب اصلی شامل مفصل‌های دایره‌ای-خطی، دایره‌ای-دایره‌ای و کروی بررسی گردید. همچنین، معیارهای وابستگی (نظیر اطلاع متقابل دایره‌ای و تعمیم‌های ضریب همبستگی رتبه‌ای) و روش‌های استنباط (از برآورد ماکسیم شبه‌درست‌نمایی تا الگوریتم‌های بهینه‌سازی فراابتکاری) مورد بحث قرار گرفتند. نتایج این مرور به وضوح نشان می‌دهد که مفصل‌های جهتی به ابزاری قدرتمند و انعطاف‌پذیر برای کشف وابستگی‌های پنهان در داده‌های تناوبی و غیرخطی تبدیل شده‌اند. با وجود پیشرفت‌های قابل توجه، به‌ویژه در دهه اخیر (از مفصل‌های چنبره‌ای [۵۵] و [۴۸] تا مدل‌های مبتنی بر حرکت براونی [۵۲] و فضا‌های همگن [۵۰])، هنوز پژوهش در این حوزه با چالش‌های بنیادین و فرصت‌های تحقیقاتی متعددی روبرو است که مسیر پژوهش‌های آینده را شکل می‌دهند:

۱. چالش تعمیم به ابعاد بالا (بیش از دو متغیر): اغلب مدل‌های موجود بر حالت دومتغیره متمرکزند. تعمیم مفصل‌های جهتی به ابعاد بالاتر (مثلاً مدل‌سازی وابستگی همزمان جهت باد، سرعت باد، دما و رطوبت) با حفظ خاصیت تناوبی و چگالی حاشیه‌ای دلخواه، همچنان یک مسئله باز است. رویکردهای نوین مانند مفصل‌های واین (درختی) در فضای چنبره‌ای [۱۰۳] یا مدل‌های ابرچنبره‌ای [۵۴] می‌توانند مسیرگشا باشند.

آنگاه بسیاری از ضرایب همبستگی تعمیم‌یافته زیربخش ۲.۴ و چند ضریب همبستگی جدید بر مبنای Σ و Σ^* به‌دست می‌آیند (به منبع [۷۰] مراجعه شود).

کاتو [۵۲] در سال ۲۰۰۹، ضریب همبستگی جانسون و وهرلی را برای مفصل کروی معرفی‌شده به‌دست آورده است. فرض کنید (U, V) دارای چگالی رابطه (۴۰) باشند. آنگاه

$$E(U) = E(V) = 0, \quad E(UU^T) = E(VV^T) = d^{-1}I,$$

$$E(UV^T) = d^{-1}\rho Q.$$

ضریب همبستگی جانسون و وهرلی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\rho_{JW} \equiv \lambda_1^{1/2} = \rho,$$

که در آن λ_2 بزرگ‌ترین مقدار ویژه ماتریس $\Sigma_{UU}^{-1}\Sigma_{UV}\Sigma_{VV}^{-1}\Sigma_{UV}^T$ است و

$$\Sigma_{UU} = E(UU^T) - E(U)E(U^T),$$

$$\Sigma_{UV} = E(UV^T) - E(U)E(V^T),$$

$$\Sigma_{VV} = E(VV^T) - E(V)E(V^T).$$

جاپ [۵۰] در سال ۲۰۱۵ برای محاسبه ضریب همبستگی مدل ارائه‌شده، ضریب همبستگی جاپ و ماردیا را به‌کار برده است.

۳.۵ استنباط آماری

۱.۳.۵ برآورد پارامترها

در برآورد پارامترهای مدل‌های کروی نیز از روش‌های گشتاوری و ماکسیم درست‌نمایی استفاده می‌شود. به‌طور نمونه، کاتو [۵۲] در سال ۲۰۰۹ برای برآورد پارامترهای مدل رابطه (۴۰) از این دو روش استفاده کرده است. در این پژوهش، برای بهینه‌سازی تابع لگاریتم درست‌نمایی از روش LSE استفاده شده است. جاپ [۵۰] در سال ۲۰۱۵ نیز روش MLE را به‌کار برده است.

۲.۳.۵ نیکویی برازش

برای مقادیر مشخص که مدل‌های کروی به دایره‌ای تبدیل می‌شوند، از شاخص‌های معرفی‌شده در زیربخش ۲.۳.۳ از

⁶¹Pivotal statistic

علی‌رغم اشاره به مدل‌های مارکوف پنهان [۶۲] در مقاله، ادغام مفصل‌های جهتی در مدل‌های فضایی (نظیر فرایندهای گاوسی چنبره‌ای [۴۶]) برای پیش‌بینی میدان‌های برداری (مانند پیش‌بینی جهت جریان اقیانوسی یا ترک‌های زمین‌شناختی) هنوز در مراحل اولیه است.

۵. کاربرد در یادگیری ماشین و هوش مصنوعی: با ظهور شبکه‌های عصبی چرخشی^{۶۴} [۲۰] و یادگیری بازنمایی، ترکیب مفصل‌های جهتی با چارچوب‌های یادگیری عمیق برای تولید داده‌های ساختاریافته (مانند جهات پروتئین‌ها یا وضعیت جسم در رباتیک) یک زمینه پژوهشی جدید است.

در مجموع، آینده پژوهش در حوزه مفصل‌های جهتی به سمت مدل‌های چندمتغیره مقیاس‌پذیر، روش‌های استنباطی هوشمند، کاربردهای میان‌رشته‌ای در علوم داده و یادگیری ماشین حرکت خواهد کرد. این مقاله مروری، با مستندسازی وضعیت کنونی موضوع، نقشه راهی برای پژوهشگران علاقه‌مند به این حوزه رو به رشد و بین‌رشته‌ای فراهم می‌آورد.

۲. توسعه روش‌های محاسباتی کارآمد و مقیاس‌پذیر: بسیاری از روش‌های برآورد (به‌ویژه ماکسیمم درست‌نمایی) برای مدل‌های پیچیده‌تر مانند مفصل‌های سوبولف [۴۹] یا مدل‌های آمیخته مبتنی بر مفصل [۷۴]، از نظر محاسباتی سنگین و برای داده‌های حجیم (مانند کلان‌داده‌های زیست‌محیطی) عملاً ناکارآمد هستند. طراحی الگوریتم‌های برآورد سریع‌تر (نظیر نسخه‌های پیشرفته الگوریتم EM [۱۶]) و روش‌های تقریب بیزی (مانند MCMC با همگرایی بهبودیافته) یک ضرورت محسوب می‌شود.

۳. آزمون‌های استنباطی دقیق‌تر و پُر توان: آزمون‌های نیکویی برازش موجود برای مفصل‌های جهتی عمدتاً مبتنی بر روش‌های باز نمونه‌گیری^{۶۲} هستند که وابستگی‌های دم‌ها را به خوبی تشخیص نمی‌دهند. توسعه آزمون‌های تحلیلی یا نیمه‌تحلیلی برای تشخیص وابستگی دمی^{۶۳} در فضای دایره‌ای [۲۳]، از زمینه‌های مهم پژوهشی باقی مانده است.

۴. مدل‌های فضایی-زمانی مبتنی بر مفصل جهتی:

مراجع

- [1] Abe, T., and Ley, C. (2016). A tractable, parsimonious and flexible model for cylindrical data, with applications. *Econometrics and Statistics*, **4**, 91-104.
- [2] Abe, T., and Pewsey, A. (2011). Sine-skewed circular distributions. *Statistical Papers*, **52**(3), 683-707.
- [3] Alfonsi, A., and Brigo, D. (2005). New families of copulas based on periodic functions. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **34**(7), 1437-1447.
- [4] Ameijeiras-Alonso, J., and Crujeiras, R.M. (2018). Directional statistics for wildfires. In *Applied Directional Statistics* (pp. 203-226). Chapman and Hall/CRC.
- [5] Ameijeiras-Alonso, J., and Ley, C. (2022). Sine-skewed toroidal distributions and their application in protein bioinformatics. *Biostatistics*, **23**(3), 685-704.

⁶²Bootstrap

⁶³Tail dependence

⁶⁴Equivariant networks

- [6] Arnold, B.C., and SenGupta, A. (2006). Probability distributions and statistical inference for axial data. *Environmental and Ecological Statistics*, **13**(3), 271-285.
- [7] Banerjee, A., Dhillon, I.S., Ghosh, J., Sra, S., and Ridgeway, G. (2005). Clustering on the Unit Hypersphere using von Mises-Fisher Distributions. *Journal of Machine Learning Research*, **6**(9), 1345-1382.
- [8] Bhattacharjee, S., and Das, K.K. (2018). Estimation of circular-circular probability distribution. *Electronic Journal of Applied Statistical Analysis*, **11**(01), 155-167.
- [9] Bingham, C. (1974). An antipodally symmetric distribution on the sphere. *The Annals of Statistics*, **2**(6), 1201-1225.
- [10] Boomsma, W., Mardia, K.V., Taylor, C.C., Ferkinghoff-Borg, J., Krogh, A., and Hamelryck, T. (2008). A generative, probabilistic model of local protein structure. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **105**(26), 8932-8937.
- [11] Cabella, P., and Marinucci, D. (2009). Statistical challenges in the analysis of cosmic microwave background radiation. *The Annals of Applied Statistics*, **3**(1), 61-97.
- [12] Carnicero, J.A., Ausín, M.C., and Wiper, M.P. (2013). Non-parametric copulas for circular-linear and circular-circular data: an application to wind directions. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, **27**(8), 1991-2002.
- [13] Carta, J.A., Ramirez, P., and Bueno, C. (2008). A joint probability density function of wind speed and direction for wind energy analysis. *Energy Conversion and Management*, **49**(6), 1309-1320.
- [14] Chang, T. (1993). Spherical regression and the statistics of tectonic plate reconstructions. *International Statistical Review/Revue Internationale de Statistique*, **61**(2), 299-316.
- [15] Chikuse, Y. (2003). *Statistics on Special Manifolds*. Springer Science and Business Media.
- [16] Dempster, A.P., Laird, N.M., and Rubin, D.B. (1977). Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, **39**(1), 1-22.
- [17] Downs, T.D. (2003). Spherical regression. *Biometrika*, **90**(3), 655-668.
- [18] Downs, T.D., and Mardia, K.V. (2002). Circular regression. *Biometrika*, **89**(3), 683-698.
- [19] Durante, F., Saminger-Platz, S., and Sarkoci, P. (2009). Rectangular patchwork for bivariate copulas and tail dependence. *Communications in Statistics—Theory and Methods*, **38**(15), 2515-2527.

- [20] Esteves, C., Allen-Blanchette, C., Makadia, A., and Daniilidis, K. (2018). Learning $so(3)$ equivariant representations with spherical cnns. *In Proceedings of the European Conference on Computer Vision (ECCV)*, (pp: 52-68).
- [21] Fernández-Durán, J.J. (2007). Models for circular-linear and circular-circular data constructed from circular distributions based on nonnegative trigonometric sums. *Biometrics*, **63**(2), 579-585.
- [22] Fernández-Durán, J. J. (2004). Circular distributions based on nonnegative trigonometric sums. *Biometrics*, **60**(2), 499-503.
- [23] Fernández-Durán, J.J., and Gregorio-Domínguez, M.M. (2023). Test of bivariate independence based on angular probability integral transform with emphasis on circular-circular and circular-linear data. *Dependence Modeling*, **11**(1), 20230103.
- [24] Fisher, R.A. (1953). Dispersion on a sphere. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, **217**(1130), 295-305.
- [25] Fisher, N.I., and Lee, A.J. (1981). Nonparametric measures of angular-linear association. *Biometrika*, **68**(3), 629-636.
- [26] Fisher, N., and Lee, A.J. (1982). Nonparametric measures of angular-angular association. *Biometrika*, **69**(2), 315-321.
- [27] Fisher, N.I., and Lee, A.J. (1983). A correlation coefficient for circular data. *Biometrika*, **70**(2), 327-332.
- [28] Fisher, N.I., and Lee, A.J. (1992). Regression models for an angular response. *Biometrics*, **48**(3), 665-677.
- [29] García-Portugués, E., Crujeiras, R.M., and González-Manteiga, W. (2013). Exploring wind direction and SO₂ concentration by circular-linear density estimation. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, **27**(5), 1055-1067.
- [30] García-Portugués, E., and Meilán-Vila, A. (2025). Kernel density estimation with polyspherical data and its applications. *Journal of the American Statistical Association*, (just-accepted), 1-25.
- [31] Genest, C., and Favre, A.C. (2007). Everything you always wanted to know about copula modeling but were afraid to ask. *Journal of Hydrologic Engineering*, **12**(4), 347-368.
- [32] Hamsici, O.C., and Martinez, A.M. (2007). Spherical-homoscedastic distributions: The equivalency of spherical and normal distributions in classification. *Journal of Machine Learning Research*, **8**(7), 1583-1623.
- [33] Heredia-Zavoni, E., and Montes-Iturrizaga, R. (2019). Modeling directional environmental contours using three dimensional vine copulas. *Ocean Engineering*, **187**, 106102.

- [34] Hodel, F.H., and Fieberg, J.R. (2021). Cylcop: An r package for circular-linear copulae with angular symmetry. *BioRxiv*, 2021-07. <https://www.biorxiv.org/content/10.1101/2021.07.14.452253v1>
- [35] Hodel, F.H., and Fieberg, J.R. (2022). Circular-linear copulae for animal movement data. *Methods in Ecology and Evolution*, **13**(5), 1001-1013.
- [36] Horwood, J.T., and Poore, A.B. (2014). Gauss von Mises distribution for improved uncertainty realism in space situational awareness. *SIAM/ASA Journal on Uncertainty Quantification*, **2**(1), 276-304.
- [37] Huang, S., Li, Q., Shu, Z., and Chan, P.W. (2023). Copula-based joint distribution analysis of wind speed and wind direction: Wind energy development for Hong Kong. *Wind Energy*, **26**(9), 900-922.
- [38] Imoto, T., and Abe, T. (2021). Simple construction of a toroidal distribution from independent circular distributions. *Journal of Multivariate Analysis*, **186**, 104799.
- [39] Isham, V. (1977). A Markov construction for a multidimensional point process. *Journal of Applied Probability*, **14**(3), 507-515.
- [40] Jammalamadaka, S.R., and Sarma, Y. (1988). A correlation coefficient for angular variables. *Statistical Theory and Data Analysis II, In Proceedings of the Second Pacific Area Statistical Conference*. Amsterdam, The Netherlands: North Holland (pp. 349-364).
- [41] Jammalamadaka, S.R., and Sengupta, A. (2001). *Topics in Circular Statistics* (Vol. 5). world scientific.
- [42] Joe, H. (1997). *Multivariate models and multivariate dependence concepts*. Chapman and Hall.
- [43] Joe, H. (2005). Asymptotic efficiency of the two-stage estimation method for copula-based models. *Journal of Multivariate Analysis*, **94**(2), 401-419.
- [44] Johnson, R.A., and Wehrly, T. (1977). Measures and models for angular correlation and angular-linear correlation. *Journal of the Royal Statistical Society Series B: Statistical Methodology*, **39**(2), 222-229.
- [45] Johnson, R.A., and Wehrly, T.E. (1978). Some angular-linear distributions and related regression models. *Journal of the American Statistical Association*, **73**(363), 602-606.
- [46] Jona-Lasinio, G., Gelfand, A., and Jona-Lasinio, M. (2012). Spatial analysis of wave direction data using wrapped Gaussian processes. *The Annals of Applied Statistics*, **6**(4), 1478-1498.
- [47] Jones, M.C. (2013). Perlman and Wellner's circular and transformed circular copulas are particular beta and t copulas. *Symmetry*, **5**(1), 81-85.
- [48] Jones, M.C., Pewsey, A., and Kato, S. (2015). On a class of circulars: copulas for circular distributions. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **67**(5), 843-862.

- [49] Jupp, P.E. (2005). Sobolev tests of goodness of fit of distributions on compact Riemannian manifolds. *The Annals of Statistics*, **33**(6), 2957-2966.
- [50] Jupp, P.E. (2015). Copulae on products of compact Riemannian manifolds. *Journal of Multivariate Analysis*, **140**(1), 92-98.
- [51] Jupp, P.E., and Mardia, K.V. (1980). A general correlation coefficient for directional data and related regression problems. *Biometrika*, **67**(1), 163-173.
- [52] Kato, S. (2009). A distribution for a pair of unit vectors generated by Brownian motion. *Bernoulli Society for Mathematical Statistics and Probability*, **15**(3), 898-921.
- [53] Kato, S., Ley, C., Loizidou, S., and Mardia, K.V. (2024). A versatile trivariate wrapped Cauchy copula with applications to toroidal and cylindrical data. *arXiv Preprint ArXiv:2401.10824*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2401.10824>
- [54] Kato, S., Mastrantonio, G., and Ishikawa, M. (2025). An interpretable family of projected normal distributions and a related copula model for Bayesian analysis of hypertoroidal data. *ArXiv Preprint ArXiv:2508.16432*.
- [55] Kato, S., and Pewsey, A. (2015). A Möbius transformation-induced distribution on the torus. *Biometrika*, **102**(2), 359-370.
- [56] Kato, S., Pewsey, A., and Jones, M.C. (2022). Tractable circular densities from Fourier series. *TEST*, **31**(3), 595-618.
- [57] Kaufman, C.G., Ventura, V., and Kass, R.E. (2005). Spline-based non-parametric regression for periodic functions and its application to directional tuning of neurons. *Statistics in Medicine*, **24**(14), 2255-2265.
- [58] Kim, G., Silvapulle, M.J., and Silvapulle, P. (2007). Comparison of semiparametric and parametric methods for estimating copulas. *Computational Statistics and Data Analysis*, **51**(6), 2836-2850.
- [59] Kullback, S. (1997). *Information Theory and Statistics*. Courier Corporation.
- [60] Lagona, F. (2018). Correlated cylindrical data. In *Applied Directional Statistics* (pp: 61-76). Chapman and Hall/CRC.
- [61] Lagona, F. (2019). Copula-based segmentation of cylindrical time series. *Statistics and Probability Letters*, **144**, 16-22.
- [62] Lagona, F. (2019). A copula-based hidden Markov model for toroidal time series. In: Petrucci A, Racioppi F, Verde R, eds. *New Statistical Developments in Data Science* (pp. 435-446). Cham, CH: Springer.

- [63] Leguey, I., Larrañaga, P., Bielza, C., and Kato, S. (2019). A circular-linear dependence measure under Johnson–Wehrly distributions and its application in Bayesian networks. *Information Sciences*, **486**, 240-253.
- [64] Ley, C., and Verdebout, T. (2017). *Modern Directional Statistics*. Chapman and Hall/CRC.
- [65] Liu, J., and Yan, Z. (2024). A circular-linear probabilistic model based on nonparametric copula with applications to directional wind energy assessment. *Entropy*, **26**(6), 487.
- [66] Ma, J., and Sun, Z. (2011). Mutual information is copula entropy. *Tsinghua Science and Technology*, **16**(1), 51-54.
- [67] Mardia, K.V. (1975). Statistics of directional data. *Journal of the Royal Statistical Society Series B: Statistical Methodology*, **37**(3), 349-371.
- [68] Mardia, K.V. (1976). Linear-circular correlation coefficients and rhythmometry. *Biometrika*, **63**(2), 403-405.
- [69] Mardia, K.V., Foldager, J.I., and Frelsen, J. (2018). Directional statistics in protein bioinformatics. In *Applied Directional Statistics* (pp. 17-40). Chapman and Hall/CRC.
- [70] Mardia, K.V., and Jupp, P.E. (2000). *Directional Statistics*. John Wiley and Sons.
- [71] Mardia, K.V., Kent, J.T., and Bibby, J.M. (1979). *Multivariate Analysis*. Academic Press, London.
- [72] Mardia, K.V., and Puri, M.L. (1978). A spherical correlation coefficient robust against scale. *Biometrika*, **65**(2), 391-395.
- [73] Mendoza-Torres, F., Díaz-Viera, M.A., and Erdely, A. (2017). Bernstein copula modeling for 2D discrete fracture network simulations. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, **156**, 710-720.
- [74] Mingione, M., Lagona, F., Nagar, P., von Holtzhausen, F., Bekker, A., Schoombie, J., and le Roux, P.C. (2025). Does wind affect the orientation of vegetation stripes? A copula-based mixture model for axial and circular data. *Environmetrics*, **36**(5), e70021.
- [75] Montesinos-Vazquez, J., and Núñez-Antonio, G. (2025). Bayesian multivariate models for bounded directional data. *ArXiv Preprint ArXiv:2507.11784*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2507.11784>
- [76] Morales, J.M., Haydon, D.T., Frair, J., Holsinger, K.E., and Fryxell, J.M. (2004). Extracting more out of relocation data: building movement models as mixtures of random walks. *Ecology*, **85**(9), 2436-2445.

- [77] Nagar, P., Bekker, A., Arashi, M., Kat, C.J., and Barnard, A.C. (2024). A dependent circular-linear model for multivariate biomechanical data: Ilizarov ring fixator study. *Statistical Methods in Medical Research*, **33**(9), 1660-1672.
- [78] Nelder, J.A., and Mead, R. (1965). A simplex method for function minimization. *The Computer Journal*, **7**(4), 308-313.
- [79] Nelsen, R.B. (2006). *An Introduction to Copulas*. New York, NY: Springer New York.
- [80] Ogata, H. (2023). Copula bounds for circular data. In *Research Papers in Statistical Inference for Time Series and Related Models: Essays in Honor of Masanobu Taniguchi* (pp. 389-402). Singapore: Springer Nature Singapore.
- [81] Patton, A.J. (2012). A review of copula models for economic time series. *Journal of Multivariate Analysis*, **110**, 4-18.
- [82] Perlman, M.D., and Wellner, J.A. (2011). Squaring the circle and cubing the sphere: circular and spherical copulas. *Symmetry*, **3**(3), 574-599.
- [83] Pewsey, A. (2008). The wrapped stable family of distributions as a flexible model for circular data. *Computational Statistics and Data Analysis*, **52**(3), 1516-1523.
- [84] Pewsey, A., and García-Portugués, E. (2021). Recent advances in directional statistics. *Test*, **30**(1), 1-58.
- [85] Pewsey, A., Neuhäuser, M., and Ruxton, G.D. (2013). *Circular Statistics in R*. OUP Oxford.
- [86] Rao, A.D., and Girija, S.V.S. (2019). *Angular Statistics*. Chapman and Hall/CRC.
- [87] Rivest, L.P. (1982). Some statistical methods for bivariate circular data. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, **44**(1), 81-90.
- [88] Rivest, L.P. (1988). A distribution for dependent unit vectors. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **17**(2), 461-483.
- [89] Roy, A., Pal, A., and Garain, U. (2017). JCLMM: A finite mixture model for clustering of circular-linear data and its application to psoriatic plaque segmentation. *Pattern Recognition*, **66**, 160-173.
- [90] Sancetta, A., and Satchell, S. (2004). The Bernstein copula and its applications to modeling and approximations of multivariate distributions. *Econometric Theory*, **20**(3), 535-562.
- [91] Sarmiento, C., Valencia, C., and Akhavan-Tabatabaei, R. (2018). Copula autoregressive methodology for the simulation of wind speed and direction time series. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, **174**, 188-199.

- [92] Saw, J.G. (1983). Dependent unit vectors. *Biometrika*, **70**(3), 665-671.
- [93] Shanno, D.F. (1970). Conditioning of quasi-Newton methods for function minimization. *Mathematics of Computation*, **24**(111), 647-656.
- [94] Shieh, G.S., and Johnson, R.A. (2005). Inferences based on a bivariate distribution with von Mises marginals. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **57**(4), 789-802.
- [95] Shieh, G.S., Johnson, R.A., and Frees, E.W. (1994). Testing independence of bivariate circular data and weighted degenerate U-statistics. *Statistica Sinica*, **4**(2), 729-747.
- [96] Shieh, G.S., Zheng, S., Johnson, R.A., Chang, Y.F., Shimizu, K., Wang, C.C., and Tang, S.L. (2011). Modeling and comparing the organization of circular genomes. *Bioinformatics*, **27**(7), 912-918.
- [97] Singh, H., Hnizdo, V., and Demchuk, E. (2002). Probabilistic model for two dependent circular variables. *Biometrika*, **89**(3), 719-723.
- [98] Soukissian, T.H. (2014). Probabilistic modeling of directional and linear characteristics of wind and sea states. *Ocean Engineering*, **91**, 91-110.
- [99] Stephens, M.A. (1979). Vector correlation. *Biometrika*, **66**(1), 41-48.
- [100] Traa, J., and Smaragdis, P. (2013). A wrapped Kalman filter for azimuthal speaker tracking. *IEEE Signal Processing Letters*, **20**(12), 1257-1260.
- [101] Tsukahara, H. (2005). Semiparametric estimation in copula models. *Canadian Journal of Statistics*, **33**(3), 357-375.
- [102] von Mises, R. (1918). Über die "Ganzzahligkeit" der Atomgewichte und verwandete Fragen. *Physikalische Zeitschrift*, **19**, 490-500.
- [103] Wang, Z.W., Zhang, W.M., Zhang, Y.F., and Liu, Z. (2021). Circular-linear-linear probabilistic model based on vine copulas: an application to the joint distribution of wind direction, wind speed, and air temperature. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, **215**, 104704.
- [104] Wehrly, T.E., and Johnson, R.A. (1980). Bivariate models for dependence of angular observations and a related Markov process. *Biometrika*, **67**(1), 255-256.
- [105] Zhan, X., Ma, T., Liu, S., and Shimizu, K. (2019). On circular correlation for data on the torus. *Statistical Papers*, **60**(6), 1827-1847.

A Review of Directional Copulas and Their Applications

Najibullah Karimi¹, Ali Dastbaravarde² *, Ali Dolati²

¹ PhD Student of Statistics, Department of Statistics, Faculty of Mathematical Sciences, Yazd University, Yazd, Iran

² Department of Statistics, Faculty of Mathematical Sciences, Yazd University, Yazd, Iran

Received: 2026/02/03

Accepted: 2026/07/07

Abstract

Directional data (angular data), including circular and spherical data, have applications in many scientific fields such as ecology, medicine, biology, meteorology, finance, astronomy, geosciences, machine learning, and artificial intelligence. Modeling dependencies among such data has always faced fundamental challenges due to the periodic and nonlinear nature of angles. In recent decades, copulas have gained a prominent place in statistics as powerful tools for separating marginal structures from joint dependence. However, generalizing copulas to directional data—including circular–linear, circular–circular, and spherical–spherical copulas—has followed a complex and ongoing research path. In this paper, using a temporal–thematic approach, the historical development, construction methods, applications, dependence measures, estimation methods, and goodness-of-fit tests for directional copulas are reviewed. First, the theoretical and mathematical background of directional models and copulas is introduced. Then, each of the three main families of directional copulas is examined from theoretical and applied perspectives. Finally, the paper concludes with a general summary and points to future research directions.

Keywords: Directional data, dependence modeling, directional copulas, circular-linear copulas, circular-circular copulas, spherical copulas.

Mathematics Subject Classification: 62H20, 62H11.