https://doi.org/ 10.22034/aa.2026.2059415.1000

رویکردی برای برآورد کسری مورد انتظار بر اساس ارزش در معرض خطر و مدل‌های سری زمانی $ARMA-GARCH$

فاطمه علیزاده[۱] ، غلامرضا محتشمی برزادران[۲]* و محمد امینی[۳]

[۱,۲,۳] گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۰۲/۱۰
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۵/۰۴/۰۱

چکیده

مدیریت ریسک فرآیندی مهم برای تصمیم‌گیری در سرمایه‌گذاری محسوب می‌شود که شامل تجزیه و تحلیل ریسک و تصمیم‌گیری در مورد پذیرش یا عدم پذیرش آن ریسک با توجه به بازده مورد انتظار برای سرمایه‌گذاری است. روش‌های پارامتری، ناپارامتری و نیمه‌پارامتری مختلفی برای اندازه‌گیری و تحلیل ریسک در بازارهای مالی وجود دارد، اما دو روش اصلی و پرکاربرد، ارزش در معرض خطر و کسری مورد انتظار هستند. در این مقاله، روشی برای برآورد کسری مورد انتظار ارائه می‌شود که در آن از روش‌های مختلف برآورد ارزش در معرض خطر استفاده می‌شود و مدل‌های سری زمانی $ARMA-GARCH$ نیز برای پیش‌بینی نوسانات آینده به کار برده می‌شود. در نهایت، این روش را بر روی داده‌های واقعی آزمایش کرده و با آزمون بازخور برتری آن را نسبت به روش پارامتری نشان می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: ریسک، ارزش در معرض خطر، کسری مورد انتظار، مدل $GARCH$، مدل $ARMA-GARCH$، آزمون بازخور.

۱ مقدمه

ریسک یک مفهوم اساسی در بازارهای مالی است که اقتصاددانان، نظریه‌پردازان ریسک و آماردانان، هر یک دیدگاهی متفاوت درباره آن دارند، البته به طور سنتی به عنوان عدم اطمینان تعریف می‌شود و بر اساس این مفهوم، در اینجا ریسک به عنوان عدم اطمینان مرتبط با وقوع یک خسارت تعریف شده است.

در سال‌های اخیر، عوامل متعددی در نوسانات بازارهای مالی نقش داشته‌اند. حوادث مختلف و نوسانات ناشی از آن در بازارها، اختلالاتی را در فعالیت‌های سازمان‌های مالی، تجاری و تولیدی ایجاد می‌کند. با گسترش حوادث غیر منتظره در جهان که بخشی از آن نتیجه افزایش فعالیت‌های اقتصادی، اجتماعی و سیاسی است، عدم اطمینان نسبت به آینده افزایش یافته و در نتیجه، اندازه‌گیری و ارزیابی ریسک اهمیت بیشتری پیدا کرده است. یکی از پرکاربردترین و مهم ترین ابزارهای اندازه‌گیری ریسک مالی شاخص ارزش در معرض خطر (VaR) است که به تحلیل‌گران و مدیران مالی کمک می‌کند تا میزان ریسک مرتبط با سرمایه‌گذاری‌ها و دارایی‌های خود را ارزیابی کنند. مفهوم این معیار برای نخستین بار در اوایل دهه ۱۹۸۰ به عنوان یک ابزار مدیریتی در مؤسسات مالی معرفی شد. این روش به سرعت مورد توجه قرار گرفت و در دهه ۱۹۹۰ به ویژه پس از بحران‌های مالی، به یکی از استانداردهای جهانی در مدیریت ریسک تبدیل شد. بانک‌ها و مؤسسات مالی بزرگ مانند جی-پی-مورگان استفاده از ارزش در معرض خطر را به عنوان ابزاری برای مدیریت ریسک و نظارت بر سرمایه‌گذاری های خود آغاز کردند.

*نویسنده مسئول مقاله، grmohtashami@um.ac.ir

این شاخص، حداکثر زیان احتمالی را در یک بازه زمانی مشخص و با توجه به یک سطح اطمینان معین ($1-\alpha$)، محاسبه می‌کند. بنابر تعریف ارزش در معرض خطر در [۳۰] ، اگر X متغیر بازدهی با تابع توزیع F_X باشد، ارزش در معرض خطر برای هر $\alpha \in (0,1)$ از طریق فرمول زیر به دست می‌آید:

$$VaR_\alpha(X) = F_X^{-1}(\alpha) = inf\{x; F_X(x) \leq \alpha\}.$$

لازم به ذکر است که در منبع فوق تعاریف بر اساس متغیر زیان انجام شده است که در این مطالعه به متغیر بازدهی تغییر پیدا کرده است.

در طول زمان، رویکردهای گوناگونی برای برآورد ارزش در معرض خطر توسعه یافته و معرفی شده‌اند که هر یک دارای مفروضات و کاربردهای خاص خود هستند، از جمله مطالعات انجام شده در این زمینه می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

[۸] در بازار سهام تهران با روش پارامتری توزیع نرمال و مدل‌های مختلف $GARCH$ به برآورد و مقایسه ارزش در معرض خطر پرداختند. [۱۱] با روش‌های پارامتری، شبیه‌سازی تاریخی و شبیه‌سازی مونت کارلو در صندوق‌های سرمایه‌گذاری ارزش در معرض خطر را برآورد و بر اساس آزمون‌های بازخور از جمله آزمون [۲۴] ، سه روش مورد نظر را تایید کردند. [۳] ، با استفاده از الگوریتم هوش مصنوعی به مقایسه دقت روش‌های پارامتری، شبیه‌سازی تاریخی و شبیه‌سازی بوت استرپ به محاسبه VaR بورس اوراق بهادار تهران پرداختند و نشان دادند که روش شبیه‌سازی بوت استرپ دارای دقت بالاتری می‌باشد. [۱] ارزش در معرض خطر سهام تهران با بازارهای سهام بین المللی با استفاده از نظریه ارزش فرین شرطی و مدل‌های سری زمانی $AR-GARCH$ محاسبه کردند. [۱۷] در بازار سهام مقدونیه، عملکرد طیف وسیعی از مدل‌های خانواده $GARCH$ را بر اساس دو توزیع نرمال و تی-استودنت در برآورد VaR بررسی کرده است. [۲۳] تحت مدل‌های خانواده $GARCH$ و شبیه‌سازی مونت کارلو، به محاسبه VaR یک سبد سهام شامل پنج شرکت برزیلی با دو توزیع نرمال و تی-استودنت پرداخته است. [۱۳] در بازار سهام مونتنگرو، عملکرد مدل‌های مختلف $GARCH$ بر اساس توزیع‌های نرمال، تی-استودنت، تی-استودنت توزیع شده و توزیع JSU در تخمین ریسک بازار با معیار VaR ارزیابی کرده‌اند.

در اواخر قرن بیستم، با افزایش نوسانات بازار و بحران‌های مالی نیاز به یک معیار دقیق‌تر برای سنجش ریسک احساس شد. درصورتی که یک شرکت میزان سرمایه را برابر با ارزش در معرض خطر در نظر بگیرد، زیان‌های بیشتر از آن، امکان عدم توانگری شرکت را افزایش می‌دهد، بنابراین شاخص VaR زیان‌هایی که شرکت را با وضعیت عدم توانگری مواجه می‌کند، بررسی نمی‌کند، در واقع راجع به دم توزیع بازدهی یا زیان هیچگونه اطلاعاتی نمی‌دهد از این رو برای پوشش این نقطه ضعف در اوایل دهه ۲۰۰۰ معیار دیگری به نام کسری مورد انتظار معرفی شد که نشان دهنده میانگین ضررهای فراتر از ارزش در معرض خطر است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$ES_\alpha(X) = E(X \mid X \leq VaR_\alpha(X)); \; \alpha \in (0,1). \qquad (1)$$

[۴] با استفاده از رویکرد ارزش فرین شرطی و [۲] با روش کاربرد شبیه‌سازی مونت کارلو بر مبنای تحلیل مولفه‌های اصلی به مطالعه این معیار پرداختند. [۵] با الگوی $DCC-GARCH$ ، [۷] بر اساس نظریه ارزش شرطی و با استفاده از مدل مولتی فرکتال به برآورد پرداخته‌اند. [۹] با استفاده از فرایندهای لوی تلاطم تصادفی در بورس اوراق بهادار تهران ارزش در معرض خطر و کسری مورد انتظار را برآورد کردند.

[۱۲] و مارتینزفلیهو و یائو (۲۰۰۶) با رویکرد نظریه ارزش فرین معیار کسری مورد انتظار را مورد بررسی قرار دادند. [۱۸] و [۲۰] به مطالعه برآورد این معیار با استفاده از روش‌های ناپارامتری پرداختند، [۱۵] از رویکرد پارامتری در توزیع‌های مختلف برای برآورد استفاده کردند، [۲۲] ابتدا ارزش در معرض خطر را بر اساس روش شبیه سازی مونت کارلو برآورد کردند و سپس کسری مورد انتظار ارائه دادند. [۲۵] برآورد این معیار را در یک سبد دارایی به روش نظریه ارزش فرین و مدل‌های $CGARCH$ بررسی کردند و [۲۸] بر اساس نظریه ارزش فرین و مدل‌های $GARCH$ کسری مورد انتظار را برآورد کردند.

در این مقاله، ابتدا ارزش در معرض خطر را از طریق روش‌های پارامتری، شبیه‌سازی تاریخی و رویکرد فراتر از آستانه برآورد کرده و سپس با بهره‌گیری از مدل‌های سری زمانی $ARMA-GARCH$ برای پیش‌بینی نوسانات آینده و استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو برای تولید بازدهی آینده به برآورد کسری مورد انتظار می‌پردازیم و در پایان اعتبار و عملکرد این روش را نسبت به روش پارامتری در داده‌های واقعی با استفاده از آزمون‌های بازخور [۲۶] ، [۲۱] و تابع زیان [۱۹] مقایسه می‌کنیم.

۲ برآورد ارزش در معرض خطر

برآورد ارزش در معرض خطر نیازمند مدل‌بندی نوسانات است که اغلب به صورت واریانس تعریف می‌شود. یکی از ساده‌ترین مدل‌ها برای مدل‌بندی تغییرپذیری، مدل اتورگرسیو ناهم واریانسی شرطی تعمیم‌یافته

$(GARCH)$ می‌باشد که توسط [۱۶] و [۲۹] پیشنهاد شد و در آن واریانس شرطی با $\sigma^2_{t|t-1}$ نشان داده می‌شود که تابعی از q تاخیر گذشته توان دوم a_tها و p تاخیر گذشته واریانس شرطی سری زمانی است. در مدل $GARCH(p,q)$ سری زمانی $\{X_t\}$ به صورت

$$\begin{aligned}
&X_t = \mu + e_t\ , e_t = \sigma_{t|t-1}\varepsilon_t,\\
&\sigma^2_{t|t-1} = \omega + \alpha_1 a^2_{t-1} + \ldots + \alpha_q a^2_{t-q} + \beta_1\sigma^2_{t-1|t-2}\\
&\quad + \ldots + \beta_p\sigma^2_{t-p|t-p-1};\ \sum_{i=1}^{p}\beta_i + \sum_{j=1}^{q}\alpha_j < 1, \alpha_j, \beta_i > 0,
\end{aligned}$$

تولید می‌شود که در آن پارامترهای α_j، β_i و ω مجهولند، $\{\varepsilon_t\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با میانگین صفر و واریانس واحد است که به عنوان نوفه سفید شناخته می‌شوند. در صورتی که مرتبه q برابر با صفر باشد مدل $ARCH(p)$ به دست می‌آید.

در مدل‌های $GARCH$ فرض بر این است که میانگین شرطی سری زمانی ثابت است، در حالت کلی‌تر، ساختار میانگین شرطی را می‌توان با نوعی مدل $ARMA(u,v)$ و نوفه سفید این مدل $ARMA$ را به وسیله‌ی مدل‌های $GARCH(p,q)$ مدل‌سازی کرد که به آن مدل $ARMA(u,v)-GARCH(p,q)$ گفته می‌شود و با روابط زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}
X_t =& \mu_t + e_t;\ e_t = \sigma_{t|t-1}\varepsilon_t,\\
\mu_t =& \mu_t + \phi_1 X_{t-1} + \ldots + \phi_u X_{t-u} + \theta_1 e_{t-1}\\
&+ \ldots + \theta_v e_{t-v},\\
\sigma^2_{t|t-1} =& \omega + \alpha_1 e^2_{t-1} + \ldots + \alpha_q e^2_{t-q} + \beta_1\sigma^2_{t-1|t-2}\\
&+ \ldots + \sigma^2_{t-p|t-p-1}.
\end{aligned}$$

مرتبه‌های $ARMA$ را می‌توان بر اساس سری زمانی $\{X_t\}$ تعیین کرد و مرتبه‌های $GARCH$ و بر پایه توان دوم باقی‌مانده‌های حاصل از مدل $ARMA$ی برازنده شده تعیین می‌شود. (برای اطلاعات بیشتر در مورد سری‌های زمانی به [۱۰] مراجعه شود.)

فرض کنید $\{P_t\}$ سری زمانی قیمت باشد، میزان بازدهی در زمان t از طریق تفاضل لگاریتم قیمت در زمان t و $t-1$ به‌دست می‌آید، یعنی $X_t = 100(logP_t - logP_{t-1})$. در ادامه به اختصار به بیان چند روش برای برآورد ارزش در معرض خطر، در صورتی که سری زمانی بازدهی به صورت $X_t = \mu_t + \sigma_{t|t-1}\varepsilon_t$ باشد، می‌پردازیم.

۱. **روش پارامتری:** در این روش فرض بر آن است که نوفه سفید مدل سری زمانی بازدهی از توزیع‌هایی مانند تی–استودنت تعمیم یافته یا توزیع خطای تعمیم یافته پیروی کند، بر اساس [۳۰] ، اگر نوفه سفید دارای توزیع تی–استودنت تعمیم یافته با درجه آزادی ν (تابع چگالی این توزیع مانند تابع چگالی توزیع تی–استودنت است با این تفاوت که پارامتر آن یعنی درجه آزادی هر عدد حقیقی مثبت را اختیار می‌کند) باشد، از رابطه

$$VaR_\alpha(X_t) = t_{\alpha,\nu}\sigma_{t+1|t} + \mu_t$$

برآورد می‌شود، که در آن $t_{\alpha,\nu}$ چندک α ام توزیع تی–استودنت تعمیم یافته با درجه آزادی ν می‌باشند و در صورتی که از توزیع خطای تعمیم یافته (لازم به ذکر است توزیع خطای تعمیم یافته در حالت کلی شامل ۳ پارامتر است اما در صورتی که میانگین صفر و واریانس واحد باشد به علت ارتباط میانگین و واریانس با دو پارامتر دیگر، دارای یک پارامتر است.) با تابع چگالی

$$g(x) = \frac{\beta\Gamma(\frac{1}{\beta})^{\frac{1}{2}}}{2\Gamma(\frac{1}{\beta}^{\frac{3}{2}})}e^{-|x\sqrt{\frac{\Gamma(\frac{1}{\beta})}{\Gamma(\frac{3}{\beta})}}|^{\beta}}\ ;\ \beta > 0, \tag{2}$$

تبعیت کند ، با استفاده از

$$VaR_\alpha(X_t) = -F^{-1}(1-2\alpha, \frac{1}{\beta})\sigma_{t+1|t} + \mu_t$$

به دست می‌آید که در آن F تابع توزیع گاما می‌باشد.

۲. **روش شبیه سازی تاریخی:** برای برآورد، در این روش سری زمانی بازدهی را به صورت صعودی مرتب می‌کنیم و چندک α ام توزیع تجربی را به دست می‌آوریم.

۳. **رویکرد فراتر از آستانه:** پژوهشگران به دلیل دم پهنی توزیع زیان، نظریه ارزش حدی را معرفی کردند. یکی از رویکردهای این نظریه، رویکرد فراتر از آستانه می‌باشد که در آن توزیع حدی مقادیر بیشتر از آستانه (u) را به دست می‌آورند و مقدار آستانه نیز از طریق روش‌های مختلف از جمله نمودار هیل یا صدک‌های پایینی مانند صدک ۵ یا ۱ به دست می‌آید.

[۱۴] نشان دادند که می‌توان توزیع مقادیر فراتر از آستانه را با توزیع پارتوی تعمیم‌یافته تقریب زد، یعنی توزیع مقادیر فراتر از آستانه با بزرگ‌تر شدن مقدار آستانه به توزیع پارتوی تعمیم‌یافته با تابع توزیع زیر که دارای دو پارامتر ξ و β می‌باشد، نزدیک می‌شود:

$$G_{\xi,\gamma,u}(y) = \begin{cases} 1-(1+\xi(\frac{y}{\gamma}))^{-\frac{1}{\xi}} & \xi \neq 0\\ 1-exp(-\frac{y}{\xi}) & \xi = 0. \end{cases}$$

برآورد ارزش در معرض خطر بر اساس این رویکرد با متغیر بازدهی، به صورت زیر نتیجه می‌شود:

$$VaR_{(\alpha)}(X) = u - \frac{\widehat{\gamma}}{\widehat{\xi}}[(\frac{n}{n_u}((1-\alpha))^{-\xi} - 1]. \tag{3}$$

که در آن n حجم نمونه و n_u تعداد داده‌هاییست که کمتر از u هستند.
در صورتی که سری زمانی بازدهی از یک مدل $ARMA(u,v)-GARCH(p,q)$ پیروی کند، داریم:

$$VaR_{(\alpha)}(X_t)=\mu_t+\sigma_{t|t-1}VaR_{(\alpha)}(\varepsilon_t). \tag{۴}$$

۳ برآورد کسری مورد انتظار

در این بخش ابتدا روش پارامتری واریانس کوواریانس برای برآورد کسری مورد انتظار را بیان و سپس الگوریتمی برای برآورد این معیار تعریف می‌کنیم.
بر اساس [۳۰] در روش پارامتری واریانس کوواریانس اگر نوفه سفید دارای توزیع تی–استودنت تعمیم یافته با درجه آزادی ν باشد، آنگاه:

$$ES_\alpha(X_t)=\mu_t+\frac{f_\nu(t_\alpha)}{\alpha}\sigma_{t+1|t}\left(\frac{\nu+t_\alpha^2}{\nu-1}\right), \tag{۵}$$

که در آن و f_ν به ترتیب چندک αام و تابع چگالی توزیع تی–استودنت تعمیم یافته با درجه آزادی ν است و

$$\mu_t=\mu+\phi_1x_{t-1}+\ldots+\phi_ux_{t-u}$$
$$+\theta_1e_{t-1}+\ldots+\theta_ve_{t-v}.$$

در صورتی که از توزیع خطای تعمیم یافته پیروی کند، بنابر [۶] مقدار کسری مورد انتظار از طریق رابطه

$$ES_\alpha(X_t)=\mu_t+\frac{\Gamma\left(\frac{2}{\beta},\left(-\left(\frac{VaR_\alpha(\varepsilon_t)-\mu_t}{\sigma_{t|t-1}}\right)^\beta\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\beta},\left(-\left(\frac{VaR_\alpha(\varepsilon_t)-\mu_t}{\sigma_{t|t-1}}\right)^\beta\right)\right)}\sigma_{t|t-1}, \tag{۶}$$

به‌دست می‌آید که در آن $\Gamma(a,b)=\int_b^\infty y^{a-1}e^{-y}dy$.

حال بر اساس برآورد ارزش در معرض خطر با رویکردهای مختلف الگوریتمی برای برآورد کسری مورد انتظار ارایه می‌دهیم:

۱. مدل سری زمانی متناسب با بازدهی را برازش می‌دهیم، پارامترهای مدل، نوسان یا انحراف استاندارد آینده ($\widehat{\sigma}_{t|t-1}$) و باقی‌مانده‌های استانداردشده مدل یعنی $\widehat{\varepsilon}_t=\frac{x_t-\widehat{\mu}_t}{\widehat{\sigma}_{t|t-1}}$ که نماینده‌ای از نوفه سفید هستند را به‌دست می‌آوریم.

۲. با استفاده از روش‌های بخش ۲ ارزش در معرض خطر را برآورد می‌کنیم.

۳. با استفاده از روش شبیه‌سازی مونت کارلو با تعداد تکرار N مثلا ۱۰۰۰۰ بار از توزیع حاشیه‌ایی نوفه سفید که در مرحله اول به‌دست آمد، داده تولید می‌کنیم، یعنی $\{\varepsilon^j_{(t+1)}, j\in\{1,2,\ldots,N\}\}$ و با جای‌گذاری در عبارت زیر تعداد N بازدهی شبیه سازی شده برای روز آینده خواهیم داشت.

$$x^j_{(t+1)}=\widehat{\mu}+\widehat{\phi}_1x_t+\ldots+\widehat{\phi_u}x_{t-u}+\widehat{\theta}_1e_{t-1}$$
$$+\ldots+\widehat{\theta}_ve_{t-v}+e^j_{t+1},$$
$$e^j_{t+1}=\widehat{\sigma}_{t+1|t}\varepsilon^j_{(t+1)}, j\in\{1,2,\ldots,N\}. \tag{۷}$$

۴. با توجه به رابطه (۱) متوسط بازدهی‌هایی که در مرحله قبل به دست آمد و کمتر از ارزش در معرض خطر محاسبه شده در مرحله دو می‌باشند را به عنوان برآورد کسری مورد انتظار در نظر می‌گیریم، یعنی

$$ES_\alpha(X_t)=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}x^j_{(t+1)}I_{(x^j_{(t+1)}\le VaR_{(\alpha)}(X_t))}.$$

۱.۳ آزمون‌های بازخور

برای مقایسه روش‌های مختلف برآورد ارزش در معرض خطر و کسری مورد انتظار از آزمون‌های بازخور استفاده می‌شود. اگر $x_1,x_2,\ldots,x_T,\ldots,x_n$ بازدهی روزانه باشد، ابتدا یک دوره تخمین T روزه در نظر می‌گیریم و برآورد ریسک روز $T+1$ ام را از روی T داده ابتدایی به‌دست آورده و سپس دوره تخمین را یک روز به جلو جابه جا و مجددا ارزش در معرض خطر را برآورد می‌کنیم تا به آخرین داده‌ی نمونه برسیم. در این صورت $n-T$ برآورد خواهیم داشت، حال به مقایسه برآورد این معیار و زیان روز مورد نظر پرداخته و در حالتی که مقدار بزرگی زیان از برآورد بیشتر بود به عنوان یک تخطی در نظر می‌گیریم.
بر این اساس برای بررسی اعتبار روش برآورد [۲۶] آزمونی طراحی کرد که آماره آزمون آن دارای توزیع خی‌دو با درجه آزادی یک می‌باشد، آماره آزمون را با LR_{uc} نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$LR_{uc}=2ln\left(\frac{(1-\frac{N}{n})^{n-N}(\frac{N}{n})^N}{(1-\alpha)^{n-N}\alpha^N}\right),$$

که در آن n حجم کل نمونه و N تعداد تخطی‌ها است.
از آن‌جایی که آزمون کوپیک فقط بر روی تعداد تخطی‌ها تمرکز کرده و وجود وابستگی‌های زمانی را نادیده می‌گیرد، [۲۱] با در نظر گرفتن یک آماره‌ی مجزا برای آزمون استقلال تخطی‌ها LR_{ind}، به توسعه‌ی آزمون کوپیک پرداخت که آماره‌ی آزمون آن به صورت زیر می‌باشد و دارای توزیع کای–دو با درجه آزادی ۲ است:

$$LR_{cc}=LR_{uc}+LR_{ind},$$

و در آن

$$LR_{ind}=-2ln\left(\frac{(1-\widehat{\pi})^{n_{00}+n_{10}}(\widehat{\pi})^{n_{01}+n_{11}}}{(1-\widehat{\pi}_0)^{n_{00}}(\widehat{\pi}_0)^{n_{01}}(1-\widehat{\pi}_1)^{n_{01}}(\widehat{\pi}_1)^{n_{11}}}\right),$$

که در آن n_{ij} یعنی تعداد روزهایی که تعداد تخطی‌های روز t ام برابر i و تعداد تخطی‌های روز $t-1$ ام برابر با j باشد و

$$\widehat{\pi}_0 = \frac{n_{01}}{n_{00}+n_{01}}, \quad \widehat{\pi}_1 = \frac{n_{01}}{n_{11}+n_{01}},$$
$$\widehat{\pi} = \frac{n_{01}+n_{11}}{n_{00}+n_{01}+n_{10}+n_{11}}.$$

در آزمون‌های کوپیک و کریستوفرسن فقط تعداد تخطی‌ها مهم است و میزان بزرگی تخطی‌ها در آن‌ها نقشی ندارد، برای وارد کردن اثر بزرگی تخطی‌ها [۱۹] تابع زیانی معرفی کردند که در واقع همان قدرمطلق انحرافات تخطی‌ها است یعنی

$$AD_t = |x_t - VaR_t| I_{(x_t > VaR_t)}.$$

بعد از محاسبه ی تابع زیان درهمه زمان‌ها میانگین آن را محاسبه می‌کنند، یعنی

$$\overline{AD_t} = \frac{1}{n-T}\sum_{t=1}^{n-T} |x_t - VaR_t| I_{(x_t > VaR_t)}. \qquad (8)$$

مقادیر کمتر این شاخص، نشان از عملکرد مطلوب مدل برآوردکننده دارد.

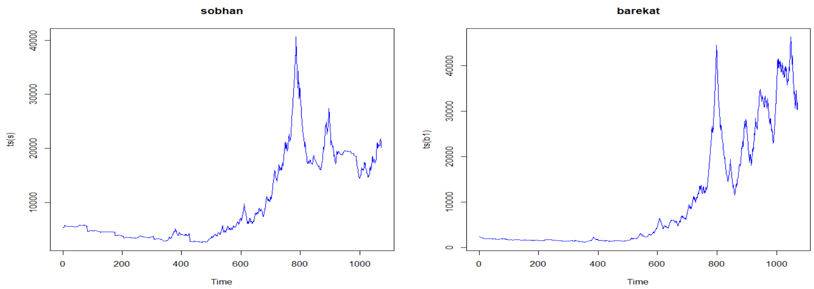
۴ کاربرد در داده واقعی

در این بخش داده‌های بازدهی روزانه سهام گروه دارویی برکت و سبحان برای برآورد کسری مورد انتظار انتخاب شده است. در شکل ۱ نمودار سری زمانی قیمت سهام گروه دارویی برکت و سبحان مشاهده می‌شود و با تبدیل داده‌ها به صورت بازدهی روزانه و رسم آن‌ها نمودارهای ۲ و ۳ را خواهیم داشت که به ترتیب سری بازدهی سهام شرکت دارویی برکت و سبحان را نشان می‌دهند، مشاهده می‌کنیم سری‌ها در برخی از دوره‌ها بسیار ناپایدار و دارای نوسانات شدیدتری هستند، به عبارت دیگر واریانس شرطی در طی زمان تغییر می‌کند. همچنین با توجه به شکل ۴ نتیجه می‌گیریم که پی‌ـمقدارهای آزمون مک‌ـلیود‌ـلی که برای بررسی وجود اثر $ARCH$ در داده‌ها انجام می‌شود، همگی در سطح ۵ درصد معنادارند و به طور رسمی شواهدی قوی به نفع $ARCH$ در داده‌ها وجود دارد. بنابراین برای پیش‌بینی واریانس شرطی یک گام جلوتر می‌توانیم از مدل‌های ناهمسان واریانس شرطی استفاده کنیم. نمودار خود همبستگی ACF داده‌های برکت و سبحان در شکل‌های ۵ و ۶ تقریبا سریع به صفر میل می‌کنند و این نشان از ایستایی در میانگین می‌باشد. همچنین با انجام آزمون ریشه واحد دیکی فولر در هر دو سری بازدهی، پی‌ـمقدار آزمون کمتر از یک صدم می‌باشد. در نتیجه می‌توان گفت داده‌ها ایستا در میانگین می‌باشند. در ادامه طی ۳ مرحله با برازش مدل سری زمانی مناسب به برآورد کسری مورد انتظار می‌پردازیم.

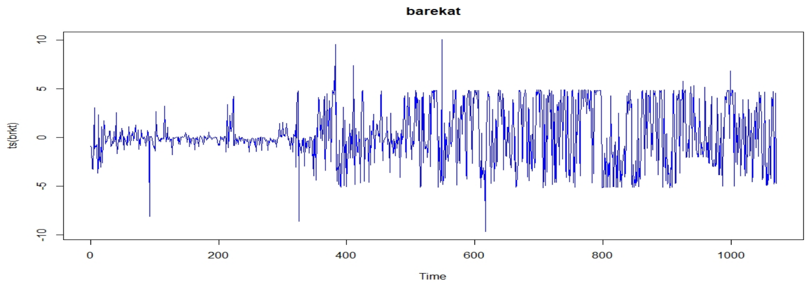
مرحله اول: تعیین مدل سری زمانی بازدهی برکت

در شکل ۵ و ۶ نمودارهای ACF و $PACF$ داده‌ها، همبستگی معناداری را نشان نمی‌دهند، در صورتی که نمودارهای ACF و $PACF$ قدر مطلق و توان دوم بازدهی بیانگر وجود الگوهای خودهمبستگی معنی‌دارند و نشان می‌دهند که سری‌ها به طور پیاپی وابسته‌اند، در نتیجه مدل‌های $ARMA$ کارساز نخواهد بود.
در جدول $EACF$ فرایند $ARMA(p,q)$ یک الگوی نظری به شکل مثلثی از صفرها خواهد داشت که راس سمت چپ بالایی آن متناظر با مرتبه‌های $ARMA$ خواهد بود. برازش یک مدل $GARCH(p,q)$ به سری بازدهی مستلزم آن است که توان دوم یا قدر مطلق بازدهی‌ها از یک مدل $ARMA(max(p,q),p)$ پیروی کند. با توجه به جدول $EACF$ برای توان دوم و قدر مطلق داده‌های بازدهی در شکل ۷ به نظر می‌رسد که دارای یک مدل $ARMA(1,1)$ باشند، بنابراین می‌توانیم یک مدل $GARCH(1,1)$ برای داده‌های بازدهی در نظر بگیریم. پیش از آن که مدل برازنده شده‌ای را بپذیریم، باید بررسی کنیم آیا مدل به درستی مشخص شده یا نه.

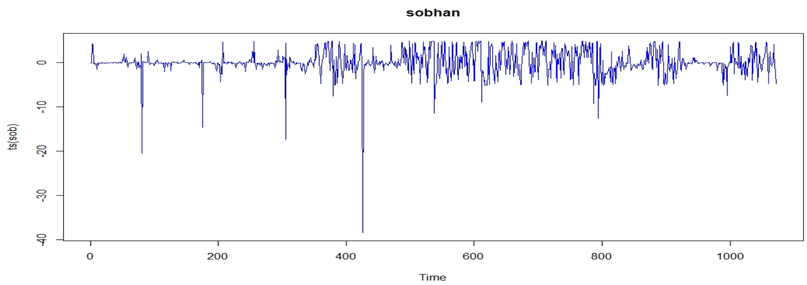
نمودار ACF باقی‌مانده‌های استاندارد شده نشان از عدم استقلال باقی‌مانده‌های استاندارد شده دارد، در نتیجه مدل $GARCH(1,1)$ مدل مناسبی نمی‌باشد، مدل $ARCH(1)$ را نیز مورد بررسی قرار دادیم و مانند مدل $GARCH(1,1)$ مدل مناسبی نبود، با افزودن مرتبه‌های مدل $GARCH$ نیز برخی از ضرایب مدل معنادار نمی‌شدند، پس از بین مدل‌های $GARCH$ نمی‌توانیم مدل مناسبی را برازش دهیم، بنابراین در ادامه به بررسی مدل‌های $ARMA-GARCH$ می‌پردازیم. بر اساس نمودار $EACF$ بازدهی برکت در شکل ۸ یک مدل $ARMA(1,1)$ مناسب به نظر می‌رسد و نمودار توان دوم و قدر مطلق باقی‌مانده‌های استاندارد شده این مدل $ARMA$ در شکل ۹ نشان از یک مدل $ARMA(1,1)$ دارد و در نتیجه مدل $ARMA(1,1)-GARCH(1,1)$ (با توزیع نوفه سفید تی‌ـاستودنت تعمیم یافته) برای داده‌های بازدهی



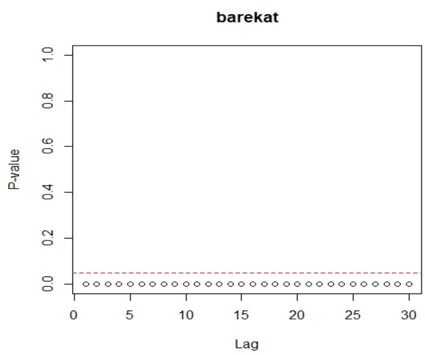
شکل ۱: نمودار سمت چپ: قیمت روزانه سهام گروه دارویی سبحان، نمودار سمت راست: قیمت روزانه سهام گروه دارویی برکت



شکل ۲: بازدهی روزانه سهام گروه دارویی برکت

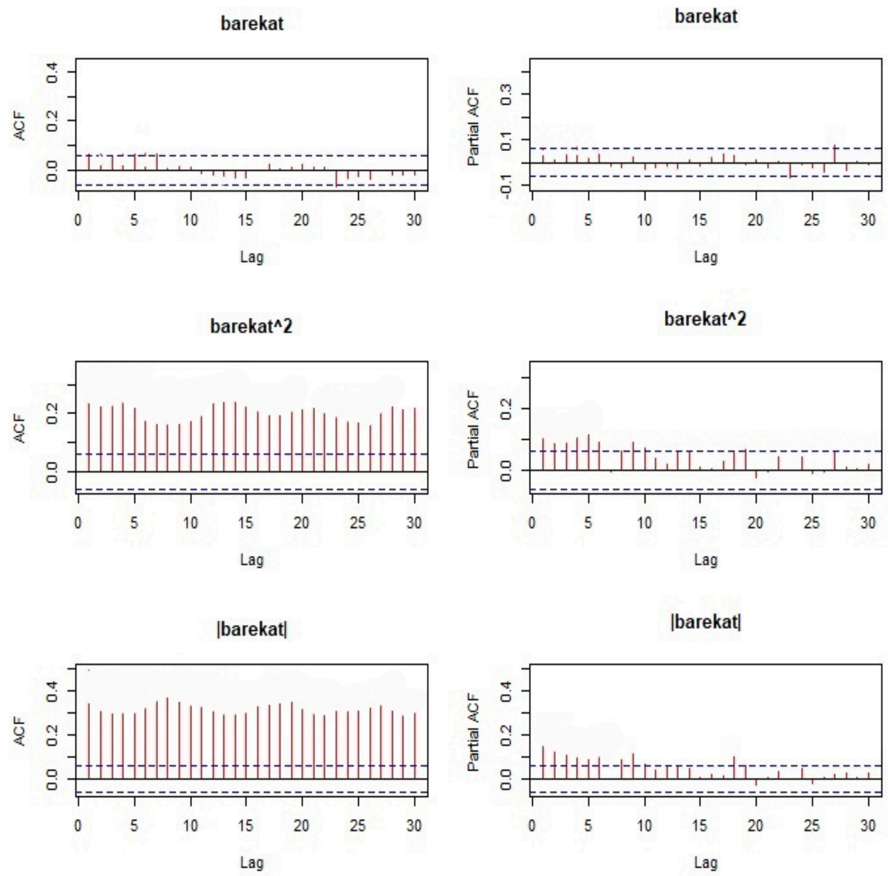


شکل ۳: بازدهی روزانه سهام گروه دارویی سبحان



شکل ۴: پی–مقدار های آزمون مک لیود–لی بازدهی گروه دارویی برکت

مناسب خواهد بود، با افزایش مرتبه‌های مدل، برخی از ضرایب مدل معنادار نمی‌شوند و مدل‌هایی با مراتب پایین‌تر نیز دارای AIC،



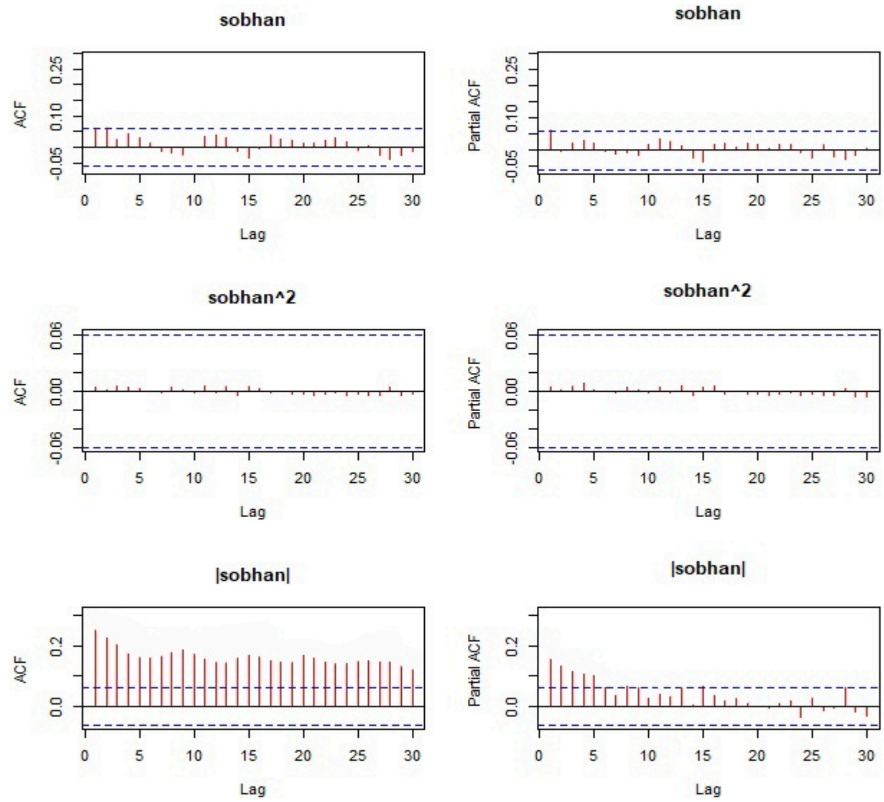
شکل ۵: به ترتیب از بالا به پایین، نمودار ACF و $PACF$ بازدهی، توان دوم بازدهی و قدر مطلق بازدهی گروه دارویی برکت

BIC و MSE (میانگین مربعات باقی‌مانده‌ها یعنی $(\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(x_t-\hat{x}_t)$ بیشتری نسبت به مدل $ARMA(1,1)-GARCH(1,1)$ هستند، که در جدول ۱ نتایج مشاهده می‌شود. برای وارسی درستی مدل $ARMA(1,1)-GARCH(1,1)$ ، از آنجایی که اگر باقی‌مانده‌های استاندارد شده مستقل باشند، توان دوم و قدر مطلقشان هم مستقل است پس اگر در توان دوم و قدر مطلق داده‌ها خودهمبستگی معنادار وجود داشته باشد، این خودهمبستگی‌ها دلایلی علیه اینست که باقی‌مانده‌های استاندارد شده مستقل‌اند. ([۱۰])

در شکل ۱۰ نمودار ACF باقی‌مانده‌های استاندارد شده، توان دوم و قدر مطلق آن در مدل برازنده شده نشان می‌دهند که همگی در طی زمان ناهمبسته‌اند. علاوه بر این پی–مقدار آزمون لیونگ–باکس در لگ‌های ۱۰، ۲۰ و ۳۰ به ترتیب ۰/۲۶۰، ۰/۵۰۳ و ۰/۵۹۱ که در سطح خطای ۵ درصد فرض عدم وجود خودهمبستگی در بین باقی‌مانده‌های استاندارد شده رد نمی‌شود و به طور عملی مستقل هستند. الگوی خط راست نمودار QQ و هیستوگرام باقی‌مانده‌های استاندارد شده در شکل ۱۱ نشان از این دارد که توزیع نوفه سفید تی–استودنت تعمیم یافته است. در نتیجه مدل به‌دست آمده مدل مناسبی می‌باشد.

مرحله دوم: تعیین مدل سری زمانی بازدهی سبحان

به طور مشابه برای بازدهی گروه دارویی سبحان مناسب‌ترین مدل، مدل $AR(1)-GARCH(1,1)$ با توزیع نوفه سفید خطای تعمیم‌یافته (GED) به دست آمد. جدول ۲ مناسب‌تر بودن مدل $AR(1)-GARCH(1,1)$ نسبت به سایر مدل‌ها را بر اساس معیارهای BIC، AIC، و MSE نشان می‌دهد. در بررسی مناسبت مدل با استفاده از باقی‌مانده‌های استاندارد شده، در شکل ۱۲ نمودار ACF ، توان دوم و قدر مطلق باقی‌مانده‌ها نشان از استقلال باقی‌مانده‌های استاندارد شده دارد و الگوی خط راست نمودار QQ و هیستوگرام باقی‌مانده‌های استاندارد شده در شکل ۱۳ بیان می‌کند نوفه سفید دارای توزیع خطای تعمیم‌یافته است.



شکل ۶: به ترتیب از بالا به پایین، نمودار ACF و $PACF$ بازدهی، توان دوم بازدهی و قدر مطلق بازدهی گروه دارویی سبحان

(الف)

AR/MA	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
1	x	o	o	o	o	o	x	o	o	o	o	o
2	x	x	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
3	x	x	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
4	x	x	x	o	o	o	o	o	o	o	o	o
5	x	o	x	x	o	o	o	o	o	o	o	o
6	o	x	x	x	o	x	x	o	o	o	o	o
7	o	x	x	x	x	x	o	o	o	o	o	o

(ب)

AR/MA	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
1	x	o	o	o	o	o	x	o	o	o	o	o
2	x	x	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
3	x	x	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
4	x	x	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
5	x	o	o	o	x	o	o	o	o	o	o	o
6	o	x	x	x	x	x	x	o	o	o	o	o
7	o	x	x	x	x	x	o	o	o	o	o	o

شکل ۷: جدول $EACF$ برای الف) قدرمطلق سری برکت، ب)توان دوم سری برکت.

AR/MA	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	x	x	x	x	x	x	x	o	x	x	x	x
1	x	o	o	o	o	x	o	o	o	o	o	o
2	x	x	o	o	o	x	o	x	o	o	o	o
3	x	x	x	o	o	o	o	o	o	o	o	o
4	x	x	x	x	o	o	o	o	o	o	o	o
5	x	x	x	x	x	o	o	o	o	o	o	o
6	x	x	o	o	o	x	o	o	o	o	o	o
7	x	o	o	o	x	x	x	o	o	o	o	o

شکل ۸: نمودار $EACF$ گروه دارویی برکت

(الف)

AR/MA	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
1	x	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
2	x	x	o	o	o	x	o	o	o	o	o	o
3	x	x	x	o	o	o	o	o	o	o	o	o
4	x	x	x	x	o	o	o	o	o	o	o	o
5	x	x	x	x	x	o	o	o	o	o	o	o
6	x	x	x	x	o	o	o	o	o	o	o	o
7	x	o	x	x	o	o	o	o	o	o	o	o

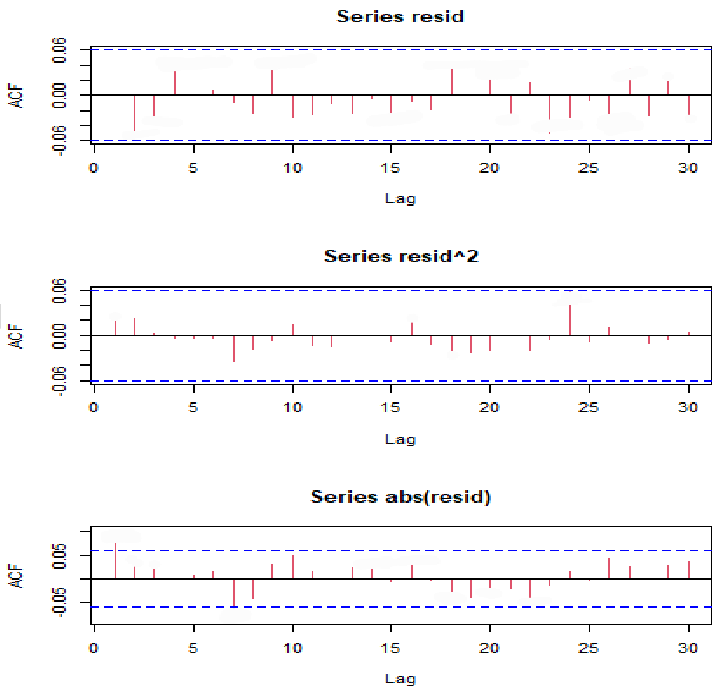
(ب)

AR/MA	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	x	x	x	x	x	x	x	o	x	x	x	x
1	x	o	o	o	o	x	o	o	o	o	o	o
2	x	x	o	o	o	x	o	o	o	o	o	o
3	x	x	x	o	o	o	o	o	o	o	o	o
4	x	x	x	x	o	o	o	o	o	o	o	o
5	x	x	x	x	x	o	o	o	o	o	o	o
6	x	x	x	o	o	x	o	o	o	o	o	o
7	x	o	x	o	x	x	x	o	o	o	o	o

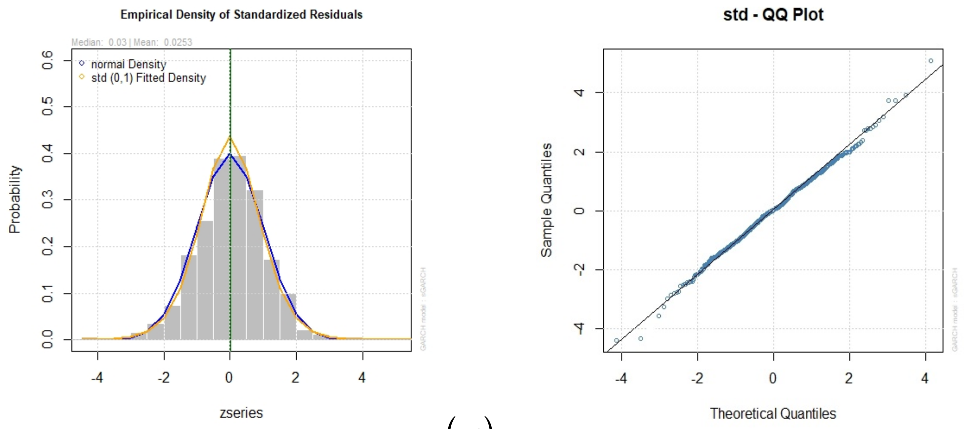
شکل ۹: جدول $EACF$ الف) قدر مطلق و ب)توان دوم باقی‌مانده‌های مدل $ARMA(۱,۱)$ در سری برکت

جدول ۱: مقایسه معیارهای برخی از مدل‌ها در سری برکت

مدل	MSE	AIC	BIC
$ARCH(۱)$	۸/۱۸۸۸	۵/۳۵۰۹	۵/۳۶۰۲
$GARCH(۱,۱)$	۸/۱۸۸۱	۵/۳۹۶۶	۵/۴۱۰۶
$AR(۱)-GARCH(۱,۱)$	۸/۱۶۳۱	۵/۲۴۹۶	۵/۲۶۸۲
$MA(۱)-GARCH(۱,۱)$	۸/۱۶۸۳	۵/۲۶۶۰	۵/۲۸۴۶
$ARMA(۱,۱)-GARCH(۱,۱)$	۷/۶۶۱۳	۵/۲۵۱۰	۵/۲۷۴۳



شکل ۱۰: به ترتیب از بالا به پایین، نمودار ACF باقی‌مانده‌ها، توان دوم و قدرمطلق باقی‌مانده‌های استاندارد شده مدل $ARMA(۱,۱) - GARCH(۱,۱)$ در سری برکت

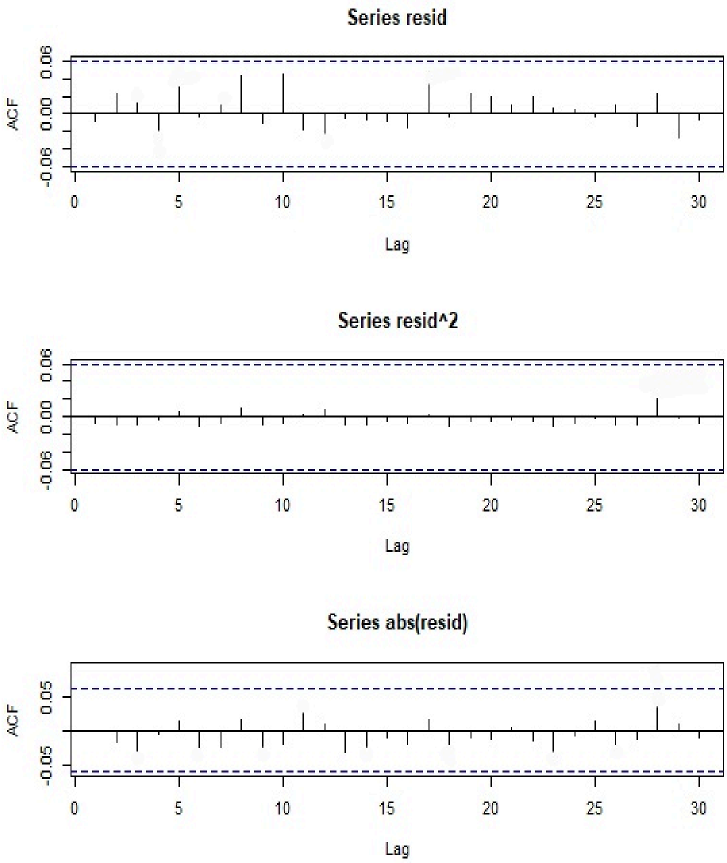


(ب) (الف)

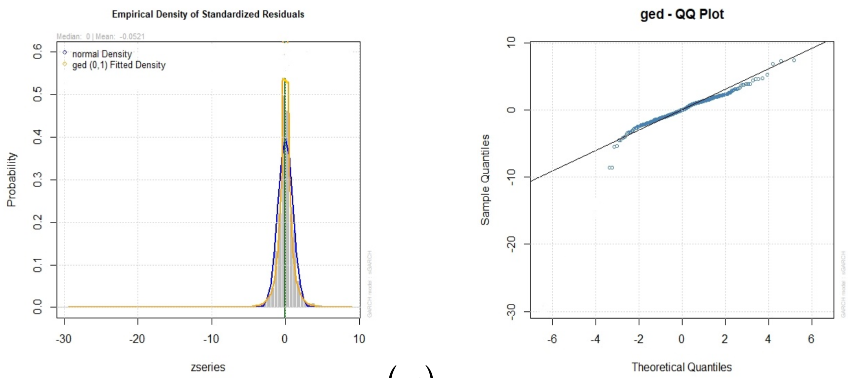
شکل ۱۱: الف)نمودار QQ توزیع تی–استودنت تعمیم یافته، ب)نمودار هیستوگرام برای باقی‌مانده‌های استاندارد شده مدل $ARMA(۱,۱) - GARCH(۱,۱)$ در سری برکت

جدول ۲: مقایسه معیارهای برخی مدل‌ها در سری سبحان

مدل	MSE	AIC	BIC
$GARCH(۱,۱)$	۷/۹۷۶۹	۴/۰۵۹۳	۳/۹۳۵۹
$MA(۱) - ARCH(۱)$	۷/۷۳۵۰	۴/۲۳۷۰	۳/۹۱۴۹
$AR(۱) - ARCH(۱)$	۷/۵۷۴۱۰	۳/۹۸۴۸	۳/۸۹۵۸
$MA(۱) - GARCH(۱,۱)$	۷/۵۷۲۸	۳/۹۷۷۴	۳/۸۵۴۰
$AR(۱) - GARCH(۱,۱)$	۷/۰۱۰۴	۳/۱۲۵۹	۳/۰۰۲۵



شکل ۱۲: به ترتیب از بالا به پایین، نمودار ACF ، توان دوم و قدرمطلق باقی‌مانده‌های استاندارد شده مدل $AR(۱)-GARCH(۱,۱)$ در سری سبحان



(ب) (الف)

شکل ۱۳: الف)نمودار QQ توزیع خطای تعمیم‌یافته و ب)نمودار هیستوگرام برای باقی‌مانده‌های استاندارد شده مدل $AR(۱)-GARCH(۱,۱)$ در سری سبحان

مرحله سوم: برآورد کسری مورد انتظار

پس از تعیین مدل‌های سری زمانی و تعیین توزیع نوفه سفید که برآورد پارامترهای آن به روش MLE در جدول ۳ موجود است، مقدار ارزش در معرض خطر را در سطوح ۰/۹۵ و ۰/۹۹ با رویکردهای مختلف محاسبه کردیم که نتایج در جدول ۶ مشاهده می‌شود. برای مثال در گروه دارویی سبحان با سطح احتمال ۹۵ درصد و رویکرد فراتر از آستانه مقدار ارزش در معرض خطر حدودا ۳/۵ است یعنی با سطح اطمینان ۹۵ درصد انتظار می‌رود زیان یک روزه هر سهم این شرکت از ۳/۵ درصد ارزش آن فراتر نرود. در روش فراتر از آستانه، مقدار آستانه را برای هر دو داده صدک ۵ ام در نظر گرفته و برآورد پارامترهای توزیع پارتو تعمیم‌یافته

در جدول ۵ مشاهده می‌شود. حال با استفاده از شبیه‌سازی از توزیع تی-استودنت تعمیم یافته و توزیع خطای تعمیم‌یافته به تعداد ۱۰۰۰۰۰ داده به عنوان نوفه سفید روز آینده تولید کرده سپس بنابر رابطه (۷) و نتایج جدول ۴، ۱۰۰۰۰۰ داده از بازدهی روز آینده خواهیم داشت. برای برآورد کسری مورد انتظار بر اساس روش ارایه شده، کافیست متوسط داده‌هایی که کمتر از مقدار ارزش در معرض خطر هستند را بیابیم. علاوه بر این با استفاده از روابط (۵) و (۶) به روش پارامتری، کسری مورد انتظار را برآورد می‌کنیم. قبل از برآورد کسری مورد انتظار ابتدا بررسی می‌کنیم کدام روش برای برآورد، معنادار است. در شرکت برکت چون پی-مقدار آزمون کوپیک و کریستوفرسن در جدول ۷ و ۸ برای روش پارامتری ES، رویکرد فراتر از آستانه و روش پارامتری بر اساس توزیع تی- استودنت تعمیم یافته بیشتر از ۵ صدم می‌باشند، بنابراین این روش‌ها برای برآورد معتبر می‌باشند و برای انتخاب روش بهتر نیازمند محاسبه میانگین تابع زیان هستیم. مقدار میانگین تابع زیان در رویکرد فراتر از آستانه از سایر روش ها کمتر است (جدول۹)، در نتیجه در این داده رویکرد فراتر از آستانه عملکرد بهتری دارد. برای شرکت سبحان نیز پی-مقدار آزمون کوپیک و کریستوفرسن در جدول ۱۱ و ۱۰ برای رویکرد فراتر از آستانه و پارامتری با توزیع خطای تعمیم یافته بیشتر از ۵ صدم می‌باشند، بنابراین این دو روش برای برآورد مناسب است ولی از آنجایی که مقدار میانگین تابع زیان در رویکرد فراتر از آستانه از روش دیگر کمتر است (جدول۱۲)، بنابراین این رویکرد عملکرد بهتری دارد. برآورد کسری مورد انتظار در هر دو سری زمانی با رویکرد فراتر از آستانه در سطوح احتمال ۰/۹۵ و ۰/۹۹ با افق زمانی یک روزه در جدول ۱۳ نشان داده شده است. یکی از کاربردهای برآورد ارزش در معرض خطر و کسری مورد انتظار در دوره زمانی یک روزه برای افرادیست که از قبل سرمایه گذارانی کرده‌اند و اکنون مایلند بدانند حداکثر زیان روز آینده چقدر خواهد شد. اگر میزان ریسک زیاد است شاید لازم باشد بخشی از سرمایه گذاری خود را کاهش دهند یا اقدامات دیگری برای مدیریت ریسک انجام دهند. برای مثال در گروه دارویی برکت با سطح اطمینان ۰/۹۵ مقدار کسری مورد انتظار تقریبا برابر با ۴/۵- است به این معنا که در روز آینده اگر میزان زیان از مقدار ارزش در معرض خطر عبور کند، با احتمال ۹۵ درصد به طور متوسط سرمایه‌دار ۴/۵ درصد از سرمایه خود را از دست خواهد داد. لازم به ذکر است در صورتی که هدف سرمایه گذاری و انتخاب سهام کم ریسک تر باشد باشد، برای برآورد کسری مورد انتظار و ارزش در معرض خطر نیازمند افق زمانی طولانی‌تری هستیم. یکی از روش‌های برآورد ارزش در معرض خطر و کسری مورد انتظار برای یک دوره k روزه با مدل $ARMA-GARCH$ استفاده از روش شبیه سازی مونت کارلو است که در آن پس از برازش مدل سری زمانی روی بازده‌های روزانه، واریانس شرطی در افق k روزه را پیش بینی کرده و سپس برای $j=۱,۲,\dots,N$ (تعداد شبیه‌سازی‌ها) با تولید نوفه سفید

$$\varepsilon_{t+۱}^{(j)},\varepsilon_{t+۲}^{(j)},\dots,\varepsilon_{t+k}^{(j)}$$

و ساخت مسیر بازدهی برای $i=۱,۲,\dots,k$:

$$r_{t+i}^{(j)}=\hat{\mu}_{t+i}+\hat{\sigma}_{t+i|t}\varepsilon_{t+i}^{(j)}$$

بازدهی k روزه به صورت زیر تولید می‌شود:

$$R_k^{(j)}=\sum_{i=۱}^{k} r_{t+i}^{(j)}$$

و در نهایت با روش دلخواه به برآورد ارزش در معرض خطر پرداخته و کسر مورد انتظار را با میانگین گیری بازدهی‌های کمتر از ارزش در معرض خطر برآورد می‌کنیم. برای مثال در جدول ۱۴ ارزش در معرض خطر و کسر مورد انتظار با سطوح اطمینان ۰/۹۵ و ۰/۹۹ در یک افق زمانی ۷ روزه برآورد شده است که درآن برای برآورد ارزش در معرض خطر از رویکرد فراتر از آستانه با در نظر گرفتن مقدار آستانه صدک ۹۵ام بازدهی‌های ۷ روزه شبیه سازی شده استفاده شده است.

جدول ۳: برآورد ضرایب مدل سری زمانی گروه‌های دارویی

گروه دارویی	$\widehat{\mu}$	$\widehat{\phi}$	$\widehat{\theta}$	$\widehat{\omega}$	$\widehat{\alpha}$	$\widehat{\beta}$	برآورد پارامتر توزیع نوفه سفید
برکت	۰	۰/۸۷۷۲	-۰/۴۸۸۴	۰	۰/۱۳۲۳	۰/۸۶۶۷	$\nu=۷/۴۷۵۵$
سبحان	۰	۰/۲۷۱۳	-	۰	۰/۳۵۴۰	۰/۶۴۳۱	$\beta=۰/۶۵۴۰$

جدول ۴: برآورد سایر اطلاعات لازم در شبیه‌سازی بازدهی روز آینده $(t+۱)$

گروه دارویی	x_t	$\widehat{\sigma}_{t+۱\|t}$	$\widehat{e}_t$	$\widehat{e}_{t-۱}$
برکت	−۰/۰۴۷۲۵۲۹	۰/۰۳۳۴۳۷۹	−۰/۰۰۲۵۲۶۹	۰/۰۰۲۳۲۱۳۲
سبحان	−۰/۰۴۷۳۹۷۶۵	۰/۰۱۶۹۷۱۰۶	−	−

جدول ۵: برآورد پارامترهای توزیع پارتو تعمیم‌یافته

گروه دارویی	ξ	γ
برکت	۰/۹۴۳۲۱	۱/۴۲۰۳۶
سبحان	۰/۶۴۵۲۱	۱/۲۹۷۰۳

جدول ۶: برآورد VaR

گروه دارویی	سطح احتمال	پارامتری	شبیه سازی تاریخی	فراتر از آستانه
برکت	۰/۹۵	−۳/۴۲۰۳	−۲/۹۴۰۳	−۳/۶۵۲۱
برکت	۰/۹۹	−۳/۵۳۶۹	−۳/۰۱۷۴	−۳/۷۳۹۳
سبحان	۰/۹۵	−۳/۲۹۷۰	−۲/۳۲۶۵	−۳/۵۳۳۵
سبحان	۰/۹۹	−۳/۳۶۷۳	−۲/۴۸۵۲	−۳/۶۹۰۳

جدول ۷: پی–مقدار آزمون کوپیک در سری برکت

	روش پارامتری ES با توزیع تی–استودنت تعمیم یافته	پارامتری	شبیه‌سازی تاریخی	فراتر از آستانه
$\alpha = ۰/۰۱$	۰/۱۲۸	۰/۲۱۱	۰/۰۲۴	۰/۸۵۰
$\alpha = ۰/۰۵$	۰/۰۸۱	۰/۱۸۹	۰/۰۰۹	۰/۴۵۳

جدول ۸: پی–مقدار آزمون کریستوفرسن در سری برکت

	روش پارامتری ES با توزیع تی–استودنت تعمیم یافته	پارامتری	شبیه‌سازی تاریخی	فراتر از آستانه
$\alpha = ۰/۰۱$	۰/۰۹۷	۰/۱۵۱	۰/۰۰۱	۰/۵۴۸
$\alpha = ۰/۰۵$	۰/۰۷۷	۰/۱۱۶	۰/۰۰۰۵	۰/ ۳۲۲

جدول ۹: میانگین تابع زیان در سری برکت

	روش پارامتری ES با توزیع تی–استودنت تعمیم یافته	پارامتری	فراتر از آستانه
$\alpha = ۰/۰۵$	۰/۲۷۸	۰/۳۶۵	۰/۱۱۴
$\alpha = ۰/۰۱$	۰/۲۹۱	۰/۴۰۹	۰/۱۳۸

جدول ۱۰: پی- مقدار آزمون کوپیک در سری سبحان

فراتر از آستانه	شبیه سازی تاریخی	پارامتری	روش پارامتری ES با توزیع GED	
۰/۲۵۱	۰/۰۴۰	۰/۰۰۰۷	۰/۱۱۵	$\alpha =$ ۰/۰۱
۰/۱۱۹	۰/۰۲۸	۰/۰۰۰۰۱	۰/۱۴۶	$\alpha =$ ۰/۰۵

جدول ۱۱: پی- مقدار آزمون کریستوفرسن در سری سبحان

فراتر از آستانه	شبیه سازی تاریخی	پارامتری	روش پارامتری ES با توزیع GED	
۰/۲۱۶	۰/۰۰۱	۰/۰۱۱	۰/۱۵۷	$\alpha =$ ۰/۰۵
۰/۳۸۷	۰/۰۰۳	۰/۰۱۶	۰/۲۴۴	$\alpha =$ ۰/۰۱

جدول ۱۲: میانگین تابع زیان در سری سبحان

فراتر از آستانه	پارامتری ES با توزیع GED	
۰/۰۷۱	۰/۳۴۷	$\alpha =$ ۰/۰۵
۰/۱۲۵	۰/۳۶۱	$\alpha =$ ۰/۰۱

جدول ۱۳: برآورد ES به روش فراتر ازآستانه

گروه دارویی سبحان	گروه دارویی برکت	سطح احتمال
-۴/۹۰۷۸	-۴/۶۰۷۹	۰/۹۹
-۴/۶۸۵۷	-۴/۴۵۶۶	۰/۹۵

جدول ۱۴: برآورد ES برای افق زمانی ۷ روزه

ES	سطح احتمال	گروه دارویی
-۸/۳۱۷۲	۰/۹۹	برکت
-۷/۸۹۵۱	۰/۹۵	برکت
-۷/۲۰۱۵	۰/۹۹	سبحان
-۶/۳۷۰۴	۰/۹۵	سبحان

۵ نتیجه گیری

یکی از معیارهای کلیدی در تحلیل و مدیریت ریسک بازار، کسری مورد انتظار است که معیاری از زیان مورد انتظار در بدترین سناریوهای ممکن به‌شمار می‌رود. این مطالعه، روشی برای برآورد کسری مورد انتظار ارائه می‌دهد که بر پایه ترکیب مدل‌های پیش‌بینی سری زمانی و تکنیک‌های شبیه‌سازی بنا شده است. در این رویکرد، ابتدا نوسانات بازدهی دارایی‌ها برای روز آتی با استفاده از مدل‌های سری زمانی خانواده $ARMA-GARCH$، پیش‌بینی می‌شود. پس از آن، با در نظر گرفتن نوسانات پیش‌بینی‌شده، ارزش در معرض خطر با استفاده از رویکردهای پارامتری و رویکرد فراتر از آستانه و شبیه سازی تاریخی برآورد می‌گردد. سپس، با بهره‌گیری از نتایج مدل‌های سری زمانی و رویکرد انتخابی ارزش در معرض خطر، بازدهی‌های احتمالی روز آتی از طریق فرآیند شبیه‌سازی مونت کارلو در مقیاس وسیع تولید می‌شوند.

در نهایت، کسری مورد انتظار با محاسبه میانگین بازدهی‌هایی که از مقدار ارزش در معرض خطر برآورد شده کمتر هستند، تعیین می‌شود. به منظور ارزیابی عملکرد روش پیشنهادی، یک مطالعه تجربی بر روی داده‌های بازدهی روزانه دو شرکت دارویی فعال در بورس ایران، یعنی سبحان و برکت، صورت گرفته است. عملکرد روش پیشنهادی با روش پارامتری سنتی مقایسه شده است. یافته‌های تحقیق نشان می‌دهد که روش پیشنهادی، به ویژه آن نسخه که از رویکرد فراتر از آستانه برای برآورد ارزش در معرض خطر بهره می‌برد، در مقایسه با روش پارامتری در برآورد دقیق‌تر کسری مورد انتظار عملکرد برتری دارد. لذا، روش ارائه‌شده به عنوان ابزاری کارآمد برای ارزیابی و مدیریت ریسک بازار در پرتفوی‌های سرمایه‌گذاری نسبت به روش پارامتری سنتی توصیه می‌گردد.

مراجع

[۱] بابا لویان، ش.، نیکو مرام، ه.، وکیلی فرد، ح.، رهنمای رود پشتی، ف. (۱۳۹۹). مقایسه ارزش در معرض ریسک سهام تهران با بازارهای سهام بین المللی با استفاده از نظریه ارزش فرین شرطی، ۱۴(۵۲) ، ۸۰-۵۵.

[۲] بت‌شکن، م.، پیمانی،م. ، صدرالدین کرمی، م. (۱۳۹۷). برآورد و ارزیابی ارزش در معرض ریسک و ریزش مورد انتظار ناپارامتریک بر مبنای تحلیل مولفه‌های اصلی در بورس اوراق بهادار تهران، مجله چشم انداز مدیریت مالی ، ۲۴، ۱۰۲-۷۹.

[۳] زمانی، م.، امام وردی، ق.، نوریفرد، ی.، حمیدیان، م.، جعفری، م. (۱۳۹۹). پیش‌بینی ارزش در معرض خطر با رویکرد هوش مصنوعی، فصل‌نامه‌ی اقتصاد مقداری،۲۱(۲) ، ۳۳-۱.

[۴] سارنج،ع.، نوراحمدی،م. (۱۳۹۵). تخمین ارزش در معرض ریسک و ریزش مورد انتظار با استفاده از رویکرد ارزش فرین شرطی در بورس اوراق بهادار تهران، مجله تحقیقات مالی، دوره ۱۸ (شماره ۳)، ۴۶۰-۴۳۷.

[۵] طالبلو، ر.، داودی، م. (۱۳۹۹). محاسبه ارزش در معرض خطر رویکرد $DCC-GARCH-Copula$ ، فصلنامه علمی پژوهش‌های اقتصادی ایران، ۸۲، ۸۲-۴۳.

[۶] علیزاده، ف.، امینی، م.، محتشمی، غ.، طبسی، ه.، .(۱۴۰۴) برآورد کمبود مورد انتظار شرطی بر اساس تابع مفصل و مدل های سری زمانی آرما ـگارچ با توزیع مانده های خطای تعمیم یافته، مجله علوم آماری، ۱۹(۲)، ۴۲۰-۳۹۹.

[۷] فلاح پور، س.، طبسی، ح. (۱۳۹۹). برآورد ریزش مورد انتظار بر اساس نظریه ارزش فرین شرطی با استفاده از مدل مولتی فرکتال و داده‌های درون روزانه در بورس اوراق بهادار تهران، مجله تحقیقات مالی، ۲۲، ۴۳-۳۷.

[۸] کشاورزحداد، غ.، صمدی، ب. (۱۳۸۸). برآورد و پیش‌بینی تلاطم بازدهی در بازار سهام تهران و مقایسه دقت روش‌ها در تخمین ارزش در معرض خطر: کاربردی از مدل‌های خانواده FIGARCH ، مجله تحقیقات اقتصادی، ۸۶ ، ۲۳۵-۱۹۳.

[۹] مدرسی، ن.، پیمانی،م.، درویشی، م. (۱۴۰۰). برآورد ارزش در معرض خطر شرطی با استفاده از فرایندهای لوی تلاطم تصادفی در بورس اوراق بهادار تهران، چشم انداز مدیریت مالی، ۳۴، ۹۴-۶۹.

[۱۰] مشکانی، م. (۱۳۹۲). تحلیل سری‌های زمانی با برنامه‌های کاربردی در R، چاپ اول، انتشارات مرکز نشر دانشگاهی.

[۱۱] نادری نورعینی، م. (۱۳۹۷). انتخاب روش بهینه محاسبه ارزش در معرض خطر صندوق‌های سرمایه‌گذاری، ۲۰، ۱۸۰-۱۵۹.

[12] Acerbi, C., Nordio, C. , Sirtori, C. (2001). *Expected shortfall as a tool for financial risk management*, Working Paper.

[13] Cerović Smolović, J., Lipovina-Božović, M., Vujošević, S.. (2017). GARCH models in value at risk estimation: empirical evidence from the Montenegrin stock exchange, *Economic research-Ekonomska istraživanja*, **30(1)**, 477-498.

[14] Balkema, A. and Haan, D. (1972). *Residual life time at great age*, StResidual life time at great agenford Univecity press.

[15] Broda, S. Paolella, M. (2011). Expected shortfall for distributions in finance, *Statistical tools for finance and insurance*, 57-99.

[16] Bolersllev, T. (1986). Generalized autoregressiv conditional heteroscedasticity, *Econometrics*,**31**, 307-327.

[17] Bucevska, V. (2013). An Empirical evaluation of GARCH models in value at-risk estimation: Evidence from the Macedonian stock exchange, *Business Systems Research: International journal of the Society for Advancing Innovation and Research in Economy*, **4(1)**, 49-64.

[18] Cai, z., Wang, x. (2008). Naparametric estimation of conditional var and expected shortfall, *Journal of econometrics*, **147**(1), 120-130.

[19] Cathy, W., Gerlach, R., Hwang, B., McAleer, M. (2011). *Forecasting Value at Risk Using Nonlinear Regression Quantiles and the Intraday range,* Econometric Institute Report.

[20] Chen, S. X. (2008). Naparametric estimation of expected shortfall, *Journal of financial econometrics*, **6**(1), 87-107.

[21] Christoffersen, P.F. (1998). Evaluating interval forecasts, *Int. Econ. Rev*, **39(4)**, 841-861.

[22] Degiannakis, S., Dent, P., Floros, C. (2014). A Monte Carlo Simulation Approach to Forecasting Multi□period V alue□at□Risk and Expected Shortfall Using the FIGARCH□skTSpecification. *The Manchester School*, **82(1)**, 71-102.

[23] Godeiro, L. (2013). Testing the CAPM for the Brazilian Stock Market using Multivariate GARCH between 1995 and 2012, *International Journal of Economics and Financial Issues*, **3(2)**, 253-275.

[24] Hendericks, D. (1996), Evaluating Value at Risk Modelds Using Historical Data, *Economu policyreview*, **2(1)**.

[25] Karmaker, M. and Paul, S. (2019). Intraday portfolio risk management using VaR and CVar : A CGARCH EVT- Copula approach. *International journal of forecasting*, **35**, 699-709.

[26] Kupiec, P. H. (1995). Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Measurement Models, *Journal of Derivatives,* Winter, 73–84.

[27] Martins-filho, C. and Yao, F.. (2006). Estimation of value at risk and expected shortfall based on non linear models of return dynamics and extreme value theory, *Studies in non linear dynamics and econometrics*, **10**(2), 1-43. .

[28] Tabasi, H., Yousefi, V., Tamosaitiene, J. and Ghasemi, F.. (2019). Estimating conditional value at risk in the tehran stock exchange based on the extreme value theory using GARCH models, *Administrative Sciences*, **9**(2), 40.

[29] Teylor, S.J. (1986), *Modeling Financial Time Series*. Chichester: John wiley and Sons.

[30] Tsay, R.S. (2012), *An intruduction to analysis of financial data with R*. University of Chicago.

Andisheye Amari, 2024, Vol. 29, No. 2
https://doi.org/ 10.22034/aa.2026.2059415.1000

An Approach to Estimation of Expected Shortfall based on value at risk and time series ARMA − GARCH model

Fatemeh Alizadeh[1], **Gholam Reza Mohtashami Borzadaran**[2*], and **Mohammad Amini**[3]

[1,2,3] *Department of Statistics, Faculty of Mathematical Sciences, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran*

Received: 2025/04/30

Accepted: 2026/06/22

Abstract

Risk management is an important process for making investment decisions, which includes analyzing the risk in an investment and deciding whether or not to accept that risk in light of the expected returns for the investment. There are various parametric, non-parametric and semi-parametric methods for measuring and analyzing risk in financial markets, but the two main and widely used methods are value at risk and expected shortfall. In this article, a method for estimating the expected shortfall is presented, in which different value-at-risk estimation methods and $ARMA-GARCH$ time series models are used to predict future fluctuations. Finally, this method is tested on real data and its superiority over the parametric method is shown by the feedback test.

Keywords: Risk, Value at Risk, Expected Shortfall, GARCH Model, ARMA-GARCH Model, Back testing.

*Corresponding author, *grmohtashami@um.ac.ir*