

ارزیابی عملکرد نمودار کنترل ترکیبی براساس معیارهای MRL و SDRL برای متغیر کیفی نرمال

نادر مرادی تولائی^۱ و ابراهیم صالحی^{۲*}

^۱ دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی بیرجند، بیرجند، ایران

^۲ گروه مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی بیرجند، بیرجند، ایران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۰۷/۲۱

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۱۰/۱۳

چکیده

در محیط‌های صنعتی، دستیابی به تولیدات با کیفیت نیازمند نظارت مستمر بر فرایندها برای کاهش ضایعات و افزایش بهره‌وری است. کنترل کیفیت آماری ابزاری مؤثر برای ارزیابی فرایندها به‌شمار می‌آید و نمودار کنترل به‌عنوان یکی از ابزارهای اصلی آن، نقش مهمی در شناسایی و نظارت تغییرات فرایند ایفا می‌کند. هدف این مقاله، ارزیابی عملکرد نمودار کنترل ترکیبی حاصل از تلفیق نمودارهای میانگین متحرک دوگانه و میانگین متحرک موزون نمایی، می‌باشد. برای ارزیابی عملکرد نمودارهای کنترل، ابتدا طول دنباله با استفاده از شبیه‌سازی مونت‌کارلو محاسبه می‌شود. سپس، معیارهای جدید میانه طول دنباله و انحراف معیار طول دنباله، در کنار معیار رایج متوسط طول دنباله، برای آنها به‌دست آمده و توانایی نمودارهای کنترل در شناسایی تغییرات کوچک فرایند براساس این معیارهای جدید مورد ارزیابی قرار گرفته است. نتایج نشان می‌دهد که نمودارهای کنترل ترکیبی نسبت به نمودارهای ارائه شده در متون قبلی، در شناسایی تغییرات کوچک حساس‌تر بوده و ابزاری مؤثرتری برای ارتقاء کیفیت و بهبود مستمر فرایندهای تولید می‌باشند.

واژه‌های کلیدی: کنترل کیفیت آماری، نمودار کنترل، میانگین متحرک موزون نمایی، میانگین متحرک دوگانه، متوسط طول دنباله، میانه طول دنباله، انحراف معیار طول دنباله، شبیه سازی مونت‌کارلو.
رده‌بندی ریاضی: ۶۲J۰۷، ۶۹P۳۰.

۱ مقدمه

دنیای رقابتی، کنترل کیفیت با استفاده از ابزارهایی مانند نمودارهای کنترل، امکان نظارت دقیق بر فرایندها را فراهم می‌سازد. این نمودارها با تشخیص به‌موقع انحرافات به‌طور مستقیم به بهبود کیفیت و کاهش هزینه‌ها کمک می‌کنند. نمودارهای کنترل به دو نوع بی‌حافظه و باحافظه تقسیم می‌شوند. نمودارهای کنترل شوهارت بی‌حافظه بوده و تنها بر داده‌های آخرین نمونه تمرکز داشته و در شناسایی تغییرات کوچک فرایند ضعیف عمل می‌کنند. در مقابل، نمودارهای باحافظه با تمرکز بر داده‌های گذشته و حال، توانایی بسیار بالاتری در کشف

تولید، به‌عنوان یکی از اساسی‌ترین فعالیت‌های انسان‌ها، مسیر پیشرفت خود را از ساخت ابزارهای ساده تا فرایندهای پیچیده صنعتی طی کرده است. انقلاب صنعتی با پیشرفت کارخانه‌های نوین، تولید را به یک صنعت تبدیل کرده و موجب افزایش کارایی و حجم تولید شده است. امروزه، کیفیت به‌عنوان عامل کلیدی موفقیت در صنایع شناخته می‌شود. این عامل کلیدی که بر عملکرد محصول و رضایت مشتری تمرکز دارد، در بازارهای جهانی اهمیت ویژه‌ای یافته است. در این

کنترل EWMA مبتنی بر میانگین متحرک (MA) برای مشخصه کیفی با توزیع نمایی پرداختند. آنها با نقد روش مبتنی بر احتمال، از عملکرد طول دنباله (RL) همراه با شبیه سازی مونت کارلو برای محاسبه ARL استفاده کردند. نتایج آنها نشان داد که نمودار MA-EWMA با مقادیر نمونه بزرگ و وزن دهی کوچک، در شناسایی سریع تر تغییرات فرایند عملکرد مطلوبی دارد. حیدر و همکاران [۱۱] نمودار کنترل DMA را بر اساس نمونه گیری پی در پی اصلاح شده (MSS)^۱ برای نظارت بر پراکندگی طراحی کردند. آنها عملکرد این نمودار کنترل را با استفاده از معیارهای ARL، MRL و SDRL با نمودارهای کنترل موجود قبلی مقایسه کرده و نتایج آنها نشان داد که نمودار کنترل پیشنهادی در شناسایی تغییرات عملکرد بهتری نسبت به سایر نمودارهای کنترل موجود دارد.

تالوردفاپ و همکاران [۲۵] نمودار کنترل ترکیبی حاصل از تلفیق نمودارهای کنترل میانگین متحرک موزون نمایی اصلاح شده (MEWMA)^۲ و MA برای شناسایی تغییرات کوچک در میانگین فرایند طراحی کردند. آنها عملکرد این نمودار کنترل را با معیارهای ARL، MRL و SDRL بررسی کرده و نشان دادند این نمودار کنترل پیشنهادی نسبت به نمودارهای کنترل شوهارت، MA، MEWMA و MA-MEWMA کارایی بیشتری دارد.

در این مقاله، به ارزیابی عملکرد نمودار کنترل ترکیبی برای حالتی که متغیرهای کیفی از توزیع نرمال پیروی می کنند، پرداخته ایم. این مقاله به صورت زیر مرتب شده است: بخش ۲ به طراحی نمودارهای کنترل ارائه شده در متون قبلی بویژه طراحی نمودار کنترلی که تلفیقی DMA و EWMA بدست می آید، اختصاص داده شده است. در بخش ۳، عملکرد نمودار کنترل پیشنهادی با نمودارهای کنترل قبلی بر اساس معیارهای جدید MRL و SDRL به همراه ARL مورد ارزیابی قرار گرفته است. یک مثال با داده های کاربردی از صنعت خودرو در بخش ۴ ارائه شده و عملکرد نمودارهای کنترل مختلف برای آنها مورد بررسی قرار گرفته است. در پایان، نتایج در بخش ۵ جمع بندی شده است.

تغییرات کوچک تدریجی دارند. با توجه به محدودیت های هر دو نوع، پژوهشگران به توسعه نمودارهای کنترل ترکیبی روی آورده که با ترکیب نمودارهای بی حافظه و باحافظه، قابلیت تشخیص همزمان تغییرات بزرگ و تغییرات کوچک را فراهم کرده و کارایی نظارت بر فرایندهای تولیدی را افزایش می دهند (زوبیر و همکاران [۳۰]). برای بهره مندی از مزایای نمودارهای کنترل ترکیبی، پژوهش های متعددی انجام شده است. شامه و شامه [۲۲] نمودار کنترل میانگین متحرک موزون نمایی دوگانه (DEWMA)^۱ را برای تشخیص تغییرات کوچک ارائه کردند. خو و وانگ [۱۴] نمودار کنترل میانگین متحرک دوگانه (DMA)^۲ را ارائه دادند که نسبت به نمودار کنترل میانگین متحرک موزون نمایی (EWMA)^۳ و نمودار کنترل جمع تجمعی (CUSUM)^۴ عملکرد بهتری دارد. اسلم و همکاران [۵] به طراحی نمودار کنترل EWMA برای مشخصه کیفی نمایی پرداخته و عملکرد آن را با استفاده از معیار متوسط طول دنباله (ARL)^۵ ارزیابی نمودند. پس از مطالعات یاد شده، پژوهشگران متعددی به مطالعه ای این موضوع پرداختند که از جمله ای آنها می توان به خان و همکاران [۱۲]، اسلم و همکاران [۶]، [۷] و آدیوتی [۳] اشاره کرد.

اغلب عملکرد نمودار کنترل بر اساس معیار پرباربرد ARL ارزیابی می شود (مونتگومری [۱۶]). اما ماراگایو و همکاران [۱۵] نشان دادند که استفاده از فرمول

$$ARL = \frac{1}{p},$$

برای نمودارهای کنترل حافظه دار، این رابطه معتبر نیست. در این رابطه، p احتمال رسم یک نقطه خارج از حدود کنترل را نشان می دهد. علاوه بر این، آدامز [۲] و وودال [۲۸] نیز به این مسئله اشاره کردند. پژوهشگرانی مانند بارنارد [۸] و گان [۱۰] نشان دادند که برای ارزیابی کامل تر نمودارهای کنترل، استفاده از معیارهایی همچون میانه طول دنباله (MRL)^۶ و انحراف معیار طول دنباله (SDRL)^۷ نیز ضروری است. در مطالعه ای، راشد و همکاران [۲۰] نمودار کنترل EWMA را برای مشخصه کیفی با توزیع نمایی طراحی کرده و عملکرد آن را با معیارهای ARL، MRL و SDRL ارزیابی کردند.

عباسی و همکاران [۱] در پژوهشی به طراحی و ارزیابی عملکرد نمودار

¹ Double Exponentially Weighted Moving Average

² Double Moving Average

³ Exponentially Weighted Moving Average

⁴ Cumulative Sum

⁵ Average Run Length

⁶ Median Run Length

⁷ Standard Deviation of Run Length

⁸ Modified Successive Sampling

⁹ Modified Exponentially Weighted Moving Average

۲ طراحی نمودارهای کنترل

در این بخش به طراحی نمودارهای کنترل MA، EWMA، DMA و DMA-EWMA می پردازیم.

در گام نخست، طراحی نمودار MA مورد بررسی قرار می دهیم. نمودار کنترل MA نوعی نمودار کنترل میانگین وزنی است که برای فرایندهایی با داده های گروهی به کار می رود. فرض کنید که متغیر کیفی از توزیع نرمال با میانگین μ_0 و واریانس σ^2 باشد. اگر

$$\bar{X}_i = (X_{i1} + X_{i2} + \dots + X_{in})/n,$$

میانگین زیرگروه i ام با اندازه n باشد، آماره MA با پهنای w در مرحله i ام به صورت زیر محاسبه می شود (مونتگومری [۱۶]):

$$MA_i = \frac{\bar{X}_i + \bar{X}_{i-1} + \dots + \bar{X}_{i-w+1}}{w}.$$

حدود نمودار کنترل MA به صورت زیر بدست می آید:

$$UCL/LCL = \begin{cases} \mu_0 \pm H_1 \frac{\sigma_{\bar{x}}}{\sqrt{i}}, & i < w; \\ \mu_0 \pm H_1 \frac{\sigma_{\bar{x}}}{\sqrt{w}}, & i \geq w, \end{cases}$$

که در آن H_1 ثابت کنترلی نمودار کنترل MA و $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ است. در گام بعدی، نمودار کنترل EWMA مورد بررسی قرار گرفته است. نمودار کنترل EWMA توسط رابرتز [۱۸] معرفی شده که برای تشخیص تغییرات کوچک در فرایند مناسب است. این نمودار بر اساس آماره زیر محاسبه می شود:

$$Z_i = \lambda \bar{X}_i + (1 - \lambda)Z_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots,$$

که در آن ثابت $0 < \lambda \leq 1$ و $\bar{X}_i$ میانگین متغیر کیفی فرایند در زمان i ام است. مقدار اولیه $Z_0 = \mu_0$ در نظر گرفته می شود.

با فرض اینکه مشاهدات مستقل و دارای توزیع نرمال باشند، در این صورت میانگین و واریانس Z_i ها به صورت زیر بدست می آید:

$$E(Z_i) = \mu_0,$$

$$Var(Z_i) = \sigma_{\bar{x}}^2 \left[\frac{\lambda}{2-\lambda} \left(1 - (1-\lambda)^{2i} \right) \right].$$

با توجه به رابطه فوق، برای i هایی به اندازه کافی بزرگ، واریانس Z_i ها به طور تقریبی برابر می شود با:

$$Var(Z_i) = \sigma_{\bar{x}}^2 \left(\frac{\lambda}{2-\lambda} \right).$$

بنابراین، حدود نمودار کنترل EWMA به صورت زیر محاسبه می شود:

$$UCL/LCL = \mu_0 \pm H_2 \sigma_{\bar{x}} \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2-\lambda} \right)},$$

که در آن H_2 ثابت کنترلی نمودار کنترل EWMA است.

در ادامه، نمودار کنترل DMA که توسط خو و وانگ [۱۴] ارائه شده، توصیف می کنیم. آماره DMA با دو مرتبه محاسبه آماره MA از میانگین زیرگروه ها به دست می آید، به طوری که در زمان i ام از میانگین مقادیر MA زمان حال و گذشته با پهنای w محاسبه می شود. بنابراین، داریم:

$$DMA_i = \begin{cases} \frac{MA_i + MA_{i-1} + \dots + MA_{i-w+1}}{i}, & i \leq w; \\ \frac{MA_i + MA_{i-1} + \dots + MA_{i-w+1}}{w}, & w < i < 2w-1; \\ \frac{MA_i + MA_{i-1} + \dots + MA_{i-w+1}}{w}, & i \geq 2w-1. \end{cases}$$

حدود کنترل UCL و LCL برای این نمودار کنترل DMA به صورت زیر بدست می آید (خو و وانگ [۱۴]):

$$UCL/LCL = \begin{cases} \mu_0 \pm H_2 \frac{\sigma_{\bar{x}}}{\sqrt{i}} \sqrt{\sum_{j=1}^i \frac{1}{j}}, & i \leq w; \\ \mu_0 \pm H_2 \frac{\sigma_{\bar{x}}}{\sqrt{w}} \sqrt{\sum_{j=i-w+1}^{i-1} \frac{1}{j} + \left(\frac{j-i+w}{w} \right)}, & w < i < 2w-1; \\ \mu_0 \pm H_2 \frac{\sigma_{\bar{x}}}{\sqrt{w}}, & i \geq 2w-1, \end{cases}$$

که در آن H_2 ثابت کنترلی نمودار DMA است.

فانتو و همکاران [۱۷] با تلفیق کردن نمودار کنترل DMA و EWMA، نمودار کنترل جدیدی DMA-EWMA معرفی کردند که در ادامه به آن می پردازیم. آماره DMA-EWMA در مرحله i ام با $0 < \lambda \leq 1$ ، برابر است با:

$$V_i = \lambda DMA_i + (1 - \lambda)V_{i-1}.$$

فانتو و همکاران [۱۷] حدود کنترل این نمودار کنترل را به صورت زیر محاسبه کردند:

$$UCL/LCL = \begin{cases} \mu_0 \pm H_2 \frac{\sigma_{\bar{x}}}{i} \sqrt{\sum_{j=1}^i \frac{1}{j} \left(\frac{\lambda}{2-\lambda} \right)}, & i \leq w; \\ \mu_0 \pm H_2 \frac{\sigma_{\bar{x}}}{w} \sqrt{\sum_{j=i-w+1}^{i-1} \frac{1}{j} + \left(\frac{j-i+w}{w} \right) \left(\frac{\lambda}{2-\lambda} \right)}, & w < i < 2w-1; \\ \mu_0 \pm H_2 \frac{\sigma_{\bar{x}}}{w} \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}}, & i \geq 2w-1, \end{cases}$$

که در آن H_2 ثابت کنترل نمودار DMA-EWMA است.

پس از محاسبه ی آماره ی هر یک از نمودارهای کنترل معرفی شده در بالا، وضعیت کنترل فرایند از طریق مقایسه ی این آماره ها با حدود کنترل بالا (UCL) و پایین (LCL) مربوط به هر یک از آنها مورد بررسی قرار می گیرد. چنانچه آماره ی محاسبه شده خارج از محدوده ی این حدود قرار گیرد، در فرایند تغییر مورد نظر رخ داده است.

۳ ارزیابی عملکرد نمودار کنترلی

که در آن RL_t تعداد نمونه‌های قبل از اینکه فرایند برای اولین بار از کنترل خارج شود، t شماره طول دنباله و N تعداد تکرارهای آزمایش است.

در ادامه به تشریح روش شبیه سازی مونت کارلو برای بررسی عملکرد نمودارهای کنترل می‌پردازیم. روش شبیه سازی مونت کارلو به طور گسترده در حوزه نمودارهای کنترل بکار می‌رود و نقش کلیدی در ارزیابی عملکرد آنها ایفا می‌کند. از این روش شبیه سازی معمولاً برای محاسبه مقادیر ARL ، MRL و $SDRL$ به منظور بهینه سازی پارامترهای نمودار کنترل و تعیین حدود کنترل استفاده می‌شود. از این رو، می‌توان شبیه سازی مونت کارلو را ابزاری ضروری برای طراحی و ارزیابی نمودارهای کنترل دانست (به مراجع وانگ و همکاران [۲۹]، خان و همکاران [۱۳] و چیم و همکاران [۹] مراجعه کنید).

در این مقاله، مراحل شبیه سازی به صورت زیر انجام شده است (رازا و همکاران [۱۹]). در شرایط تحت کنترل (IC)^{۱۰} بعد از انتخاب پارامترهای λ و w ، مقدار ثابت کنترلی H به گونه ای تعیین می‌گردد که مقدار $ARL_0=200$ حاصل شود. سپس، داده های تصادفی با اندازه نمونه $n=1$ از توزیع نرمال استاندارد با میانگین $\mu_0=0$ و واریانس $\sigma^2=1$ تولید می‌شوند. آماره های نمودارهای کنترل با استفاده از روابط مربوطه محاسبه و حدود کنترل بدست می‌آید. هرگاه مقدار آماره از حدود کنترل تجاوز کند، شماره ی نمونه به عنوان RL ثبت می‌شود. این فرایند شبیه سازی به طور مکرر اجرا می‌شود تا توزیع طول دنباله ها به دست آید. پس از حاصل شدن $ARL_0=200$ ، دو معیار دیگر MRL_0 و $SDRL_0$ نیز محاسبه می‌شوند.

در شرایط خارج از کنترل (OOC)^{۱۱}، تغییر در میانگین فرایند به صورت $\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma_x$ اعمال می‌شود و داده های جدیدی تولید می‌گردد. سپس با استفاده از همان ضریب کنترلی H به دست آمده از حالت تحت کنترل، شبیه سازی مجدداً اجرا و مقادیر ARL ، MRL و $SDRL$ برای شرایط تغییر یافته محاسبه می‌شوند. در اینجا با روش شبیه سازی مونت کارلو با پهنای $w \in \{4, 5\}$ ، ثابت کنترل $\lambda \in \{0.15, 0.25\}$ ، $n=1$ ، $N=100,000$ و $ARL_0=200$ ، عملکرد نمودارهای MA ، $EWMA$ ، DMA و $DMA-EWMA$ مورد ارزیابی قرار گرفته است و برای معیارهای ARL ، MRL و $SDRL$ برای نمودارهای کنترل در جدول های ۱ تا ۴ گزارش شده است.

حال، به بررسی عملکرد نمودارهای کنترل تحت شرایط مختلف تغییر در میانگین فرایند می‌پردازیم. نتایج نشان می‌دهد در تمامی چهار جدول

در این بخش به ارزیابی عملکرد نمودارهای کنترل ترکیبی MA ، $EWMA$ ، DMA و $DMA-EWMA$ می‌پردازیم. برای ارزیابی عملکرد نمودارهای کنترل، از ARL که یک معیار متداول است، استفاده می‌شود. معیار ARL به دو نوع تقسیم می‌شود: ARL_1 برای حالتی است که فرایند تحت کنترل قرار دارد و ARL_1 برای زمانی است که فرایند از کنترل خارج شده و تغییر در آن رخ داده است. فانتو و همکاران [۱۷] در مطالعه خود به طراحی نمودار $DMA-EWMA$ پرداخته و برای ارزیابی عملکرد این نمودار از معیارهای ARL_0 و ARL_1 استفاده کردند. برخی از محققان در مطالعات خود به این موضوع پرداخته اند که ارزیابی عملکرد نمودارهای کنترل تنها با معیار ARL از اعتبار کافی برخوردار نیست. به همین دلیل، استفاده از معیارهای دیگر مانند MRL و $SDRL$ نیز برای ارزیابی عملکرد نمودارهای کنترل توصیه شده تا ارزیابی دقیق تری از عملکرد نمودار کنترل به دست آید. این موضوع در مقاله راشد و همکاران [۲۱] نیز مورد تأکید قرار گرفته است.

معیار MRL ، میانه توزیع طول دنباله ها است که در آن RL تعداد نمونه های مورد نیاز قبل از اینکه فرایند برای اولین بار خارج از کنترل شود، می‌باشد. این معیار هنگامی که توزیع RL ها نامتقارن و یا دارای چولگی شدید باشد، قابل اعتمادتر بوده و لذا بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرد. معیار $SDRL$ میزان پراکندگی طول دنباله تا شناسایی اولین نمونه خارج کنترل را نشان می‌دهد و مقدار کمتر آن به معنای عملکرد بهتر نمودار کنترل است (تیو و همکاران [۲۷] و سانتورنات و همکاران [۲۴]). براین اساس، علاوه بر ARL دو معیار دیگر MRL و $SDRL$ نیز برای ارزیابی عملکرد نمودارهای کنترل MA ، $EWMA$ ، DMA و $DMA-EWMA$ به روش شبیه سازی مونت کارلو به کار گرفته شده اند. لازم به ذکر است اشاره کنیم که مقادیر کم معیارهای MRL و $SDRL$ در حالت خارج از کنترل نشان دهنده عملکرد بهتر نمودار کنترل است.

معیارهای ARL ، MRL و $SDRL$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$ARL = \frac{\sum_{t=1}^N RL_t}{N},$$

$$MRL = \text{Median}(RL),$$

$$SDRL = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^N (RL_t - ARL)^2}{N - 1}},$$

¹⁰In-control

¹¹Out of control

به صورت کامل تری ارزیابی می کند. بر اساس این معیارها نیز، نمودار کنترل DMA-EWMA عملکرد بهتری نسبت به سایر نمودارها نشان می دهد. برای مثال و درک بهتر این موضوع، براساس داده های جدول ۴، نمودار معیارهای ARL، MRL و SDRL برای نمودارهای کنترل MA، EWMA، DMA و DMA-EWMA به ترتیب در شکل های ۱ تا ۳ رسم شده است.

همان طور که در این شکل ها مشاهده می کنید، منحنی هر سه معیار مذکور برای نمودار کنترل DMA-EWMA پایین تر از سایر نمودارهای کنترل بوده که نشان دهنده عملکرد قوی تر این نمودار کنترل در شناسایی تغییرات کوچک و متوسط می باشد.

به طور کلی، عملکرد نمودارهای کنترل به وضوح تحت تأثیر دو پارامتر مؤثر، λ و w قرار دارد. کاهش مقدار λ از ۰/۲۰ به ۰/۱۵ باعث کاهش مقادیر ARL، MRL و SDRL می شود، به ویژه در مواجهه با تغییرات کوچک فرایند ($\delta < ۱$)، که این موضوع نشان دهنده حساسیت بالاتر نمودار کنترل نسبت به تغییرات جزئی است. از طرفی، افزایش w از ۳ به ۴ نیز باعث بهبود عملکرد در شناسایی تغییرات کوچک کمک می کند. نتایج داده های جدول ۱ تا ۴ نشان می دهد که نمودارهای کنترل برای پارامترهای $\lambda = ۰/۱۵$ و $w = ۴$ نسبت به سایر مقادیر برای این پارامترها، عملکرد سریع تر و پایداری در شناسایی تغییرات کوچک دارند. با این حال، برای تغییرات بزرگ ($\delta \geq ۱/۵$)، اثر این پارامترها کم تر است و عملکرد همه نمودارها به هم نزدیک می شود. در تمامی این شرایط، نمودار کنترل DMA-EWMA به طور پیوسته و با دارا بودن کمترین مقادیر معیارهای ارزیابی، برتری خود را نسبت به نمودارهای MA، EWMA و DMA حفظ می کند. این موضوع نشان می دهد که علاوه بر ARL، دو معیار دیگر MRL و SDRL نیز برای ارزیابی کامل تر نمودارهای کنترل نیز مؤثر هستند.

۴ مثال کاربردی

برای نشان دادن کاربرد عملی از نتایج، یک مثال کاربردی از داده های صنعت خودروسازی در این بخش ارائه می کنیم. صنعت خودروسازی به عنوان یکی از پیشرفته ترین حوزه های تولید صنعتی به شمار می آید که همواره نیازمند دقت و حساسیت ویژه ای در کنترل کیفیت دارد. اهمیت بالای ایمنی و عملکرد صحیح خودروها موجب می شود که هرگونه نقص در قطعات، پیامدهای جدی و گسترده ای به همراه داشته باشد. در این شرایط، استفاده از داده های واقعی و تحلیل دقیق آنها، نقش مؤثری در بهبود فرایندهای تولید و ارتقای کیفیت محصولات ایفا می کند.

در شرایط بدون تغییر ($\delta = ۰$)، مقادیر ARL برای همه نمودارها تقریباً برابر ۲۰۰ است که نشان دهنده تحت کنترل بودن فرایند می باشد. با شروع تغییرات در میانگین فرایند، معیارهای ARL، MRL و SDRL نمودارها به تدریج کاهش می یابد؛ به طوری که در جدول ۱ با $w = ۳$ و $\lambda = ۰/۲۰$ ، برای تغییرات کوچک $\delta = ۰/۲$ ، نمودار کنترل DMA-EWMA با $ARL = ۹۴/۶$ ، $MRL = ۶۶$ و $SDRL = ۹۴/۶$ سریع تر تغییر را شناسایی کرده و برتری خود را نسبت به نمودارهای کنترل MA، EWMA و DMA نشان می دهد. نمودارهای کنترل MA و DMA کمی دیرتر تغییرات را شناسایی کرده و نمودار کنترل EWMA عملکرد متوسطی دارد. با افزایش تغییر به $\delta = ۱$ ، نمودار کنترل DMA-EWMA همچنان با $ARL = ۷/۳$ ، $MRL = ۶/۰$ و $SDRL = ۴/۷$ بهترین واکنش را نشان می دهد.

در جدول ۲ با $w = ۴$ و $\lambda = ۰/۲۰$ ، روند مشابهی مشاهده می شود. برای تغییرات کوچک $\delta = ۰/۲$ ، نمودار کنترل DMA-EWMA با $ARL = ۸۹/۴$ ، $MRL = ۶۱$ و $SDRL = ۹۴/۱$ سریع تر از بقیه نمودارهای کنترل تغییرات را شناسایی می کند. نمودار MA با $ARL = ۱۲۷/۴$ ، $MRL = ۸۹/۰$ و $SDRL = ۱۲۸/۴$ دیرتر از سایر نمودارهای کنترل تغییرات را تشخیص می دهد.

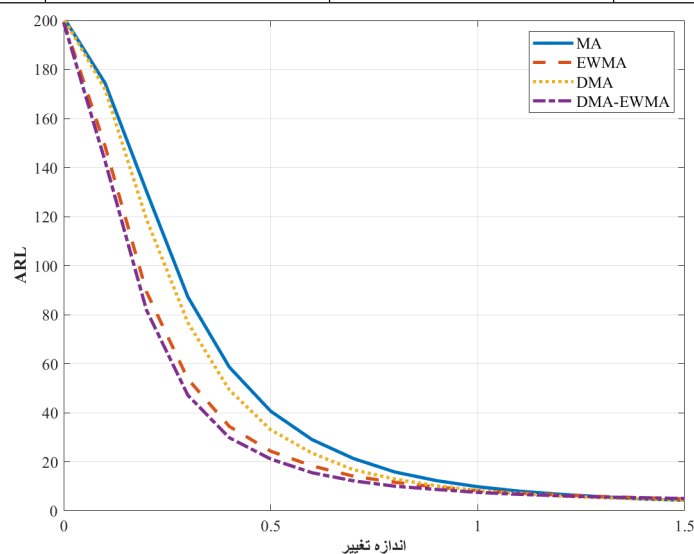
در جدول ۳ با $w = ۳$ و $\lambda = ۰/۱۵$ ، کاهش λ باعث واکنش سریع تر نمودارها در شناسایی تغییرات شده است. برای $\delta = ۰/۲$ ، نمودار کنترل DMA-EWMA با $ARL = ۸۷/۷$ و $MRL = ۶۳$ بهترین عملکرد را نشان می دهد و نمودار کنترل MA دیرترین شناسایی تغییرات را دارد. این روند در تغییرات متوسط و بزرگ نیز ادامه دارد و نمودار کنترل DMA-EWMA همچنان عملکرد بهتری دارد، در حالی که نمودارهای کنترل MA، EWMA و DMA واکنش کندتری به تغییرات دارند.

در نهایت، در جدول ۴ با $w = ۴$ و $\lambda = ۰/۱۵$ ، همان طور که مشاهده می کنید، نمودار کنترل DMA-EWMA در تغییرات کوچک (برای مثال $\delta = ۰/۲$) با $ARL = ۸۱/۸$ ، $MRL = ۵۶$ و $SDRL = ۸۳/۰$ زودتر تغییرات را شناسایی می کند. نمودارهای کنترل MA، EWMA و DMA همچنان واکنش کندتری به تغییرات دارند. برای تغییرات کوچک و متوسط، نمودار کنترل DMA-EWMA با دارا بودن کمترین مقدار ARL، MRL و SDRL، عملکرد بهتری در شناسایی سریع تغییرات از خود نشان می دهد.

فانتو و همکاران [۱۷] نشان دادند که نمودار DMA-EWMA از نظر معیار ARL نسبت به نمودارهای کنترل شوهارت و EWMA عملکرد بهتری دارد. در این مقاله، دو معیار جدید MRL و SDRL استفاده شده که توانایی نمودارهای کنترل در شناسایی سریع تغییرات فرایند را

جدول ۱: مقادیر معیارهای ARL، MRL و SDRL نمودارهای کنترل برای پارامترهای $\mu_0 = 0$ ، $\sigma^2 = 1$ ، $w = 3$ و $\lambda = 0.20$

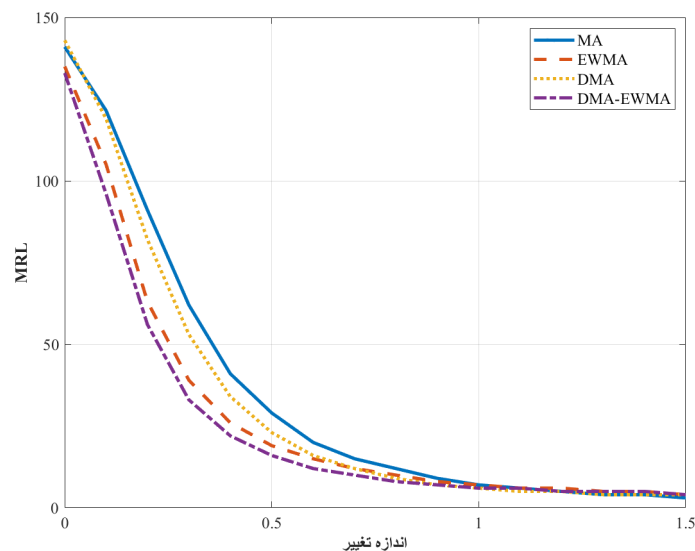
DMA-EWMA ($H = 639$)			DMA ($H = 385$)			EWMA ($H = 265$)			MA ($H = 274$)			δ
SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	
201.5	132	199.4	200.2	128	196.6	201.2	146	200.9	197.7	138	197.7	0
161.0	106	155.4	174.1	121	173.6	161.1	115	165.0	175.4	124	177.9	0.1
94.6	66	94.6	128.1	87	126.8	100.9	73	104.7	137.7	97	139.3	0.2
52.1	38	53.6	82.6	58	83.5	58.8	45	63.2	94.9	67	96.7	0.3
32.5	25	34.6	56.5	40	56.8	35.0	29	39.7	66.1	47	67.4	0.4
21.0	17	23.4	38.5	27	38.7	22.9	20	27.2	46.5	33	47.1	0.5
14.6	13	17.1	26.4	19	27.4	15.6	16	20.1	32.7	24	34.2	0.6
10.0	10	12.8	19.0	14	20.3	11.1	12	15.2	23.6	18	25.3	0.7
7.5	8	10.3	14.0	11	14.9	8.2	10	12.1	17.7	14	19.1	0.8
5.8	7	8.5	10.5	8	11.8	6.4	8	10.1	13.2	11	14.6	0.9
4.7	6	7.3	8.2	7	9.5	5.0	7	8.5	10.1	8	11.5	1.0
3.7	5	6.4	6.3	5	7.6	4.0	6	7.3	8.1	7	9.3	1.1
3.0	5	5.7	4.9	5	6.4	3.3	6	6.4	6.3	6	7.6	1.2
2.5	4	5.2	3.9	4	5.5	2.8	5	5.7	5.1	5	6.4	1.3
2.1	4	4.8	3.2	4	4.9	2.4	5	5.2	4.2	4	5.5	1.4
1.8	4	4.5	2.6	4	4.3	2.1	4	4.7	3.5	4	4.7	1.5
1.3	3	3.9	1.7	3	3.5	1.5	4	3.9	2.3	3	3.4	1.75
1.0	3	3.5	1.2	3	2.9	1.2	3	3.3	1.6	2	2.7	2.0
0.8	3	3.2	0.9	2	2.6	1.0	3	2.9	1.2	2	2.2	2.25
0.7	3	3.0	0.8	2	2.3	0.8	2	2.6	0.9	2	1.9	2.5
0.6	3	2.8	0.7	2	2.1	0.7	2	2.3	0.8	1	1.6	2.75
0.6	3	2.7	0.6	2	2.0	0.6	2	2.1	0.6	1	1.5	3.0



شکل ۱: مقایسه منحنی‌های معیار ARL برای نمودارهای کنترل

جدول ۲: مقادیر معیارهای ARL، MRL و SDRL نمودارهای کنترل برای پارامترهای $\lambda = 0.20$ و $w = 4$ ، $\sigma^2 = 1$ ، $\mu_0 = 0$

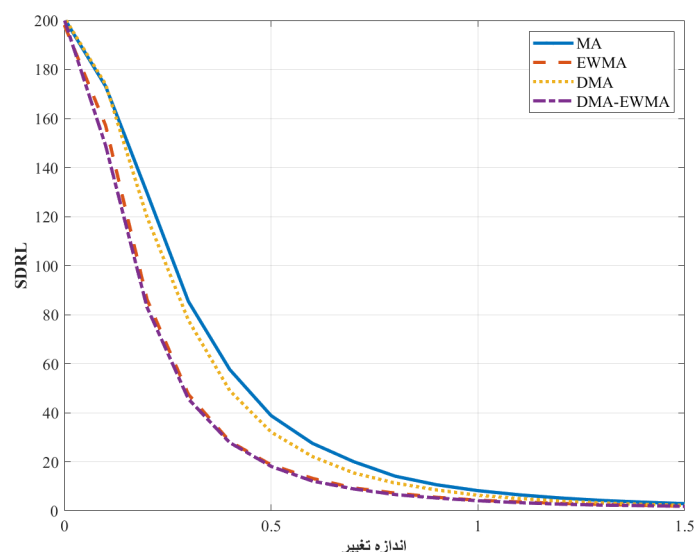
DMA-EWMA ($H = 7.96$)			DMA ($H = 4.29$)			EWMA ($H = 2.64$)			MA ($H = 2.70$)			δ
SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	
201.4	142	198.5	201.3	149	200.0	201.2	145	200.7	198.9	140.5	201.3	0
163.4	102	153.4	182.2	125	181.1	160.2	115	164.0	172.8	121	175.2	0.1
94.1	61	89.4	128.7	85	124.4	98.6	73	103.5	128.4	89	127.4	0.2
53.0	37	52.9	79.3	55	78.3	57.5	45	62.4	85.9	61	87.4	0.3
31.8	24	33.4	50.2	35	50.0	34.9	29	39.9	55.7	41	57.8	0.4
20.3	17	22.6	33.5	23	33.7	22.3	21	27.3	38.1	28	39.7	0.5
14.0	12	16.4	22.3	16	23.4	15.6	15	19.8	26.2	20	28.1	0.6
9.9	10	12.8	16.0	12	17.2	11.0	12	15.3	19.7	15	21.1	0.7
7.2	8	10.2	11.6	9	13.1	8.2	10	12.1	14.2	11	15.6	0.8
5.5	7	8.5	8.4	7	10.2	6.2	8	9.9	10.6	9	12.2	0.9
4.4	6	7.4	6.5	6	8.4	5.0	7	8.5	8.4	7	9.9	1.0
3.5	6	6.6	5.1	5	7.1	4.0	6	7.3	6.3	6	7.9	1.1
2.9	5	6.0	3.9	5	6.0	3.4	6	6.4	5.1	5	6.6	1.2
2.4	5	5.5	3.2	4	5.3	2.8	5	5.7	4.3	4	5.6	1.3
2.0	4	5.1	2.5	4	4.7	2.4	5	5.2	3.5	4	4.8	1.4
1.8	4	4.8	2.2	4	4.4	2.0	4	4.7	2.9	3	4.2	1.5
1.3	4	4.2	1.5	3	3.7	1.5	4	3.9	1.9	3	3.2	1.75
1.0	4	3.8	1.1	3	3.2	1.2	3	3.3	1.4	2	2.5	2.0
0.8	3	3.6	0.9	3	2.8	0.9	3	2.9	1.1	2	2.1	2.25
0.7	3	3.3	0.8	2	2.6	0.8	2	2.6	0.9	2	1.8	2.5
0.6	3	3.2	0.7	2	2.3	0.7	2	2.4	0.7	1	1.6	2.75
0.5	3	3.0	0.6	2	2.2	0.6	2	2.2	0.6	1	1.5	3.0



شکل ۲: مقایسه منحنی‌های معیار MRL برای نمودارهای کنترل

جدول ۳: مقادیر معیارهای ARL، MRL و SDRL نمودارهای کنترل برای پارامترهای $\mu_0 = 0$ ، $\sigma^2 = 1$ و $w = 3$ و $\lambda = 0.15$

DMA-EWMA ($H = 6.49$)			DMA ($H = 3.84$)			EWMA ($H = 2.56$)			MA ($H = 2.73$)			δ
SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	
20.16	140	200.6	200.0	138	199.2	197.5	139	201.2	199.8	140	198.3	0
146.3	106	151.5	173.6	118	172.8	159.9	107	157.5	176.1	119.5	175.1	0.1
83.2	61	88.0	126.2	87	125.1	87.6	65	90.4	130.9	95	134.2	0.2
49.4	36	51.4	85.2	59	85.1	48.2	39	53.9	94.5	67	96.0	0.3
28.8	24	32.4	56.9	39	56.9	29.3	27	35.3	64.9	47	66.4	0.4
18.6	17	22.5	37.2	27	38.3	19.0	19	24.4	46.4	33	47.2	0.5
12.8	13	16.3	25.6	19	26.8	13.1	15	18.2	32.8	23	33.3	0.6
9.0	10	12.5	19.3	14	19.8	9.4	12	14.2	23.4	17	24.4	0.7
7.0	9	10.5	13.7	10	14.9	7.2	10	11.5	17.3	13	18.8	0.8
5.5	7	8.7	10.4	8	11.7	5.6	8	9.8	12.7	10	14.1	0.9
4.3	6	7.5	7.8	7	9.2	4.5	7	8.4	10.2	8	11.4	1.0
3.5	6	6.6	6.1	5	7.5	3.6	6	7.3	7.9	7	9.2	1.1
2.9	5	5.9	4.8	5	6.4	3.0	6	6.4	6.2	6	7.5	1.2
2.5	5	5.4	3.8	4	5.5	2.5	5	5.8	5.1	5	6.4	1.3
2.1	5	5.0	3.2	4	4.9	2.2	5	5.3	4.2	4	5.4	1.4
1.8	4	4.6	2.6	4	4.3	1.9	4	4.8	3.4	4	4.6	1.5
1.4	4	4.1	1.7	3	3.4	1.5	4	4.1	2.3	3	3.4	1.75
1.0	3	3.7	1.2	3	2.9	1.1	3	3.4	1.6	2	2.7	2.0
0.8	3	3.4	0.9	2	2.6	0.9	3	3.0	1.2	2	2.2	2.25
0.7	3	3.2	0.8	2	2.3	0.8	3	2.7	0.9	2	1.9	2.5
0.6	3	3.0	0.7	2	2.1	0.7	2	2.5	0.8	1	1.6	2.75
0.5	3	2.9	0.6	2	2.0	0.6	2	2.3	0.6	1	1.5	3.0



شکل ۳: مقایسه منحنی‌های معیار SDRL برای نمودارهای کنترل

مجموعه داده‌ها که شامل اندازه قطر حلقه پیستون موتور خودرو بوده، در جدول ۵ ارائه شده و شامل ۴۰ نمونه ۵ تایی ($n = 5$) است. ۲۵ نمونه اول دارای توزیع نرمال با $\mu_0 = 74.012$ و انحراف معیار $\sigma = 0.1$ است. توجه کنید که در میانگین این ۲۵ نمونه اولیه هیچ تغییری رخ نداده و تحت کنترل هستند. اما در ۱۵ نمونه بعدی (نمونه ۲۶ تا ۴۰) به میزان 0.3σ تغییر در میانگین آنها اعمال شده و مشاهدات در وضعیت OOC قرار دارند. فرض کنید $ARL_0 = 370$ ، $w = 4$ و $\lambda = 0.25$ در نظر گرفته شود. همان‌طور که در شکل ۴ تا ۶ مشاهده می‌شود، نمودارهای کنترل MA، EWMA و DMA همچنان پس از تغییر در نمونه ۲۶، تحت کنترل قرار دارند (به تغییر رخ داده در این نمونه‌ها واکنش نشان ندادند). اما نمودار کنترل DMA-EWMA (شکل ۷) بعد از نمونه ۳۸ به تغییرات پی‌برده که نشان می‌دهد این نمودار کنترل در مقایسه با سایر نمودارها، عملکرد بهتری در شناسایی تغییرات کوچک دارد.

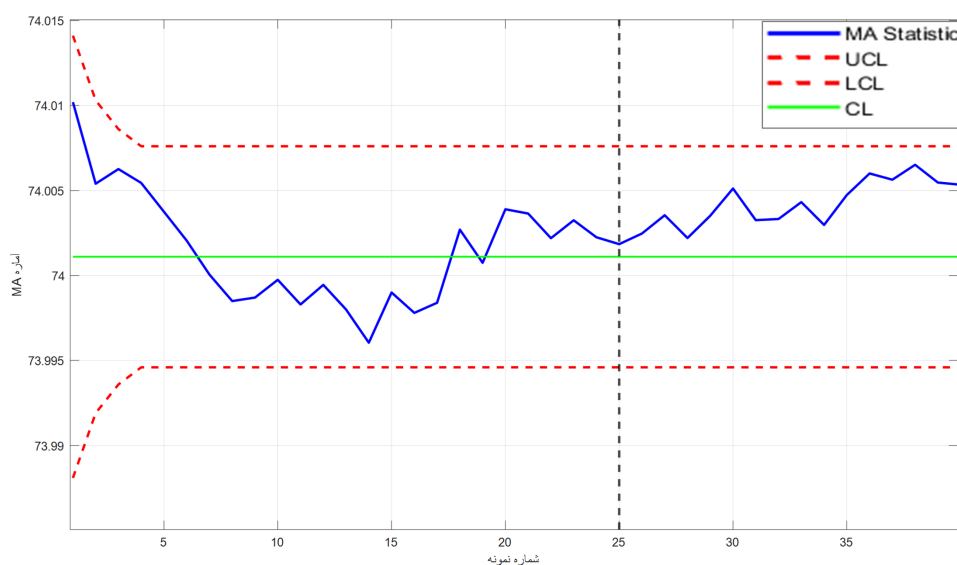
در همین راستا مونتگومری [۱۶] داده‌های مرتبط به قطعات پیستون را به عنوان نمونه کاربردی ارائه کرده که پژوهشگران بسیاری از جمله الویزاکس و همکاران [۴] از آن استفاده کردند. پیستون به دلیل نقش حیاتی در عملکرد موتور و دقت ابعادی بالا، به نمونه‌ای کلیدی در صنعت خودروسازی تبدیل شده است. به همین دلیل از داده‌های مربوط به پیستون برای بهبود ابزارهای کنترل کیفیت استفاده می‌شود. این ابزارها امکان شناسایی سریع و دقیق مشکلات تولید را فراهم می‌سازند و از این طریق به بهبود مستمر کیفیت محصولات کمک می‌کنند. در نهایت، این فرآیند موجب افزایش رضایت مشتریان از صنعت خودروسازی خواهد شد. به این ترتیب، استفاده از این داده‌های واقعی در تحقیقات، نقش مؤثری در ارتقای شاخص‌های ایمنی و کیفیت در صنعت خودروسازی ایفا می‌کند. برای همین منظور، در این مقاله از داده‌های پیستون استفاده شده تا عملکرد نمودارهای کنترل MA، EWMA، DMA و DMA-EWMA با هم مقایسه و مورد ارزیابی قرار گیرند. این

جدول ۴: مقادیر معیارهای ARL، MRL و SDRL نمودارهای کنترل برای پارامترهای $\mu_0 = 0$ ، $\sigma^2 = 1$ ، $w = 4$ و $\lambda = 0.15$

DMA-EWMA ($H = 1.15$)			DMA ($H = 4.27$)			EWMA ($H = 2.55$)			MA ($H = 2.70$)			δ
SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	
200.4	133	199.1	201.2	143	200.9	198.2	135	199.6	200.8	141	201.2	0
148.9	96	142.6	173.9	119	171.8	157.1	105	148.7	173.1	121.5	174.4	0.1
83.0	56	81.8	119.8	82	118.9	86.2	63	89.3	129.7	91	130.3	0.2
45.6	33	47.1	77.7	53	76.7	47.5	39	53.7	85.4	62	87.2	0.3
27.8	22	29.8	49.0	34	49.3	28.3	26	34.4	57.6	41	58.6	0.4
18.1	16	21.1	32.1	23	33.0	18.7	19	24.3	38.8	29	40.6	0.5
12.1	12	15.5	22.1	16	23.5	13.2	15	18.3	27.5	20	29.0	0.6
8.9	10	12.2	15.4	12	16.7	9.3	12	14.1	20.0	15	21.3	0.7
6.6	8	10.0	11.3	9	12.9	7.2	10	11.6	14.1	12	15.8	0.8
5.2	7	8.7	8.5	7	10.2	5.5	8	9.7	10.6	9	12.3	0.9
4.1	6	7.5	6.3	6	8.2	4.3	7	8.2	8.2	7	9.8	1.0
3.3	6	6.7	5.0	5	7.0	3.6	6	7.2	6.5	6	8.0	1.1
2.7	5	6.1	3.9	5	6.0	3.0	6	6.4	5.2	5	6.7	1.2
2.3	5	5.6	3.2	4	5.3	2.6	5	5.8	4.2	4	5.7	1.3
2.1	5	5.3	2.6	4	4.8	2.2	5	5.3	3.5	4	4.8	1.4
1.8	4	5.0	2.2	4	4.3	1.9	4	4.8	2.9	3	4.3	1.5
1.3	4	4.4	1.5	3	3.6	1.4	4	4.0	1.9	3	3.2	1.75
1.1	4	4.0	1.1	3	3.1	1.1	3	3.4	1.4	2	2.5	2.0
0.6	3	3.3	0.7	2	2.3	0.7	2	2.5	0.7	1	1.6	2.25
0.5	3	3.2	0.6	2	2.2	0.6	2	2.3	0.6	1	1.4	3.0

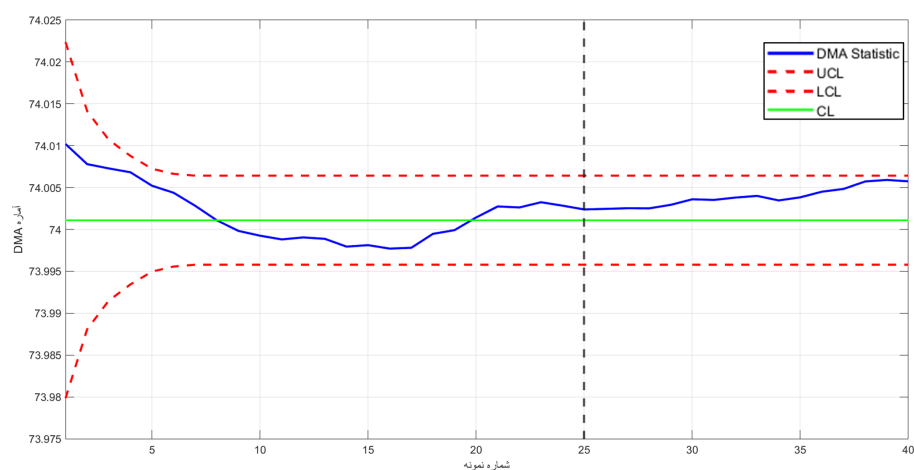
جدول ۵: داده‌های اندازه قطر پیستون موتور خودرو (مونتگومری [۱۶])

x_5	x_4	x_3	x_2	x_1	i	x_5	x_4	x_3	x_2	x_1	i
۷۳/۹۹۶	۷۴/۰۰۵	۷۴/۰۱۵	۷۴/۰۰۱	۷۳/۹۸۲	۲۱	۷۴/۰۰۸	۷۳/۹۹۲	۷۴/۰۱۹	۷۴/۰۰۲	۷۴/۰۰۳	۱
۷۴/۰۰۹	۷۴/۰۰۶	۷۳/۹۹۹	۷۳/۹۹۹	۷۴/۰۰۴	۲۲	۷۴/۰۰۴	۷۴/۰۱۱	۷۴/۰۰۱	۷۳/۹۹۲	۷۳/۹۹۵	۲
۷۴/۰۱۴	۷۴/۰۰۹	۷۳/۹۹۹	۷۳/۹۸۹	۷۴/۰۰۱	۲۳	۷۴/۰۰۲	۷۴/۰۰۵	۷۴/۰۲۱	۷۴/۰۲۴	۷۳/۹۸۸	۳
۷۴/۰۰۱	۷۴	۷۳/۹۹۳	۷۴/۰۰۸	۷۴/۰۱۵	۲۴	۷۴/۰۰۹	۷۴/۰۱۵	۷۳/۹۹۳	۷۳/۹۹۶	۷۴/۰۰۲	۴
۷۴/۰۱۳	۷۴/۰۱۷	۷۳/۹۹۵	۷۳/۹۸۴	۷۳/۹۸۲	۲۵	۷۴/۰۱۴	۷۳/۹۸۹	۷۴/۰۱۵	۷۴/۰۰۷	۷۳/۹۹۲	۵
۷۴/۰۱۱	۷۴/۰۰۶	۷۳/۹۹۴	۷۳/۹۹۸	۷۴/۰۱۲	۲۶	۷۳/۹۹۳	۷۳/۹۸۵	۷۳/۹۹۷	۷۳/۹۹۴	۷۴	۶
۷۴/۰۰۱	۷۴/۰۰۴	۷۴/۰۱۰	۷۴/۰۱۷	۷۴/۰۰۱	۲۷	۷۴/۰۰۵	۷۴	۷۳/۹۹۴	۷۴/۰۰۶	۷۳/۹۹۵	۷
۷۴/۰۰۱	۷۳/۹۸۷	۷۴/۰۰۳	۷۴/۰۱۰	۷۳/۹۹۹	۲۸	۷۳/۹۸۸	۷۴/۰۱۵	۷۳/۹۹۳	۷۴/۰۰۳	۷۳/۹۸۵	۸
۷۴/۰۰۵	۷۴/۰۰۵	۷۳/۹۹۹	۷۳/۹۹۵	۷۴/۰۱۳	۲۹	۷۴/۰۰۴	۷۴/۰۰۵	۷۴/۰۰۹	۷۳/۹۹۵	۷۴/۰۰۸	۹
۷۴/۰۱۰	۷۴/۰۰۷	۷۴/۰۱۳	۷۴/۰۱۵	۷۴/۰۰۷	۳۰	۷۳/۹۹۵	۷۴/۰۰۷	۷۳/۹۹۹	۷۴	۷۳/۹۹۸	۱۰
۷۴/۰۱۰	۷۳/۹۹۰	۷۳/۹۹۸	۷۴/۰۰۰	۷۳/۹۹۸	۳۱	۷۳/۹۹۹	۷۳/۹۹۵	۷۳/۹۹۴	۷۳/۹۹۸	۷۳/۹۹۴	۱۱
۷۴/۰۰۳	۷۴/۰۰۴	۷۴/۰۰۳	۷۴/۰۰۳	۷۳/۹۸۷	۳۲	۷۳/۹۹۶	۷۴	۷۴/۰۰۷	۷۴	۷۴/۰۰۴	۱۲
۷۴/۰۰۴	۷۴/۰۱۸	۷۴/۰۱۹	۷۴/۰۰۱	۷۳/۹۹۵	۳۳	۷۴/۰۱۲	۷۳/۹۹۷	۷۳/۹۹۸	۷۴/۰۰۲	۷۳/۹۸۳	۱۳
۷۴/۰۲۳	۷۴/۰۰۱	۷۳/۹۹۸	۷۳/۹۹۵	۷۴/۰۰۸	۳۴	۷۳/۹۸۴	۷۴	۷۳/۹۹۴	۷۳/۹۶۷	۷۴/۰۰۶	۱۴
۷۴/۰۰۹	۷۴/۰۰۵	۷۴/۰۱۴	۷۴/۰۰۴	۷۴/۰۰۰	۳۵	۷۴/۰۰۷	۷۳/۹۹۹	۷۳/۹۹۸	۷۴/۰۱۴	۷۴/۰۱۲	۱۵
۷۴/۰۰۳	۷۴/۰۰۵	۷۴/۰۰۶	۷۴/۰۱۸	۷۳/۹۹۳	۳۶	۷۳/۹۹۶	۷۳/۹۹۸	۷۴/۰۰۵	۷۳/۹۸۴	۷۴	۱۶
۷۴/۰۰۴	۷۴/۰۱۳	۷۴/۰۱۳	۷۴/۰۰۱	۷۳/۹۹۹	۳۷	۷۴/۰۰۷	۷۴/۰۰۵	۷۳/۹۸۶	۷۴/۰۱۲	۷۳/۹۹۴	۱۷
۷۴/۰۱۱	۷۴/۰۱۰	۷۴/۰۰۷	۷۴/۰۰۸	۷۴/۰۰۸	۳۸	۷۴	۷۴/۰۰۳	۷۴/۰۱۸	۷۴/۰۰۱	۷۴/۰۰۶	۱۸
۷۴/۰۰۶	۷۳/۹۹۵	۷۳/۹۹۹	۷۴/۰۱۷	۷۳/۹۹۴	۳۹	۷۳/۹۹۷	۷۴/۰۰۵	۷۴/۰۰۳	۷۴/۰۰۲	۷۳/۹۸۴	۱۹
۷۳/۹۹۰	۷۴/۰۲۰	۷۴/۰۱۱	۷۴/۰۱۱	۷۳/۹۹۱	۴۰	۷۴/۰۰۳	۷۴/۰۰۲	۷۴/۰۱۳	۷۴/۰۰۱	۷۴	۲۰

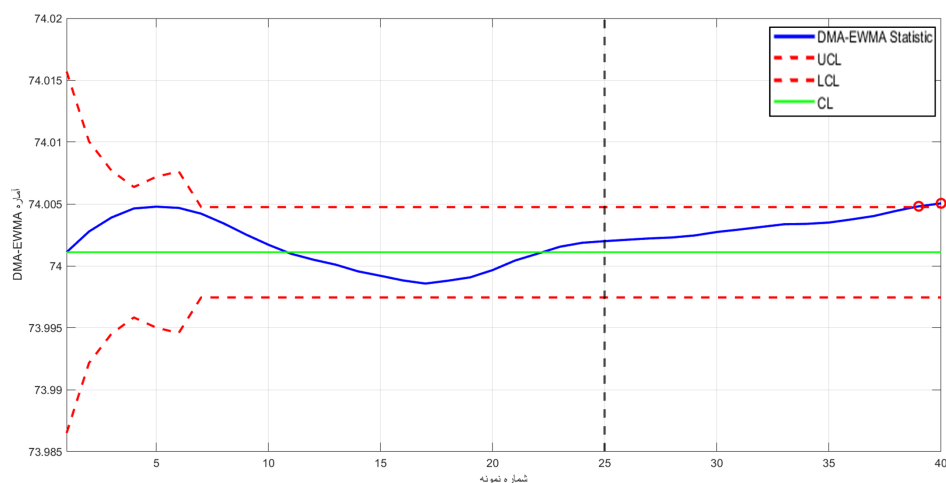
شکل ۴: نمودار کنترل MA با پهنای $w = 4$ و $H = 2910$.



شکل ۵: نمودار کنترل EWMA با $\lambda = 0.25$ و $H = 2.912$.



شکل ۶: نمودار کنترل DMA با $w = 4$ و $H = 4.757$.



شکل ۷: نمودار کنترل DMA-EWMA با $w = 4$ ، $\lambda = 0.25$ و $H = 8.641$.

۵ نتیجه گیری

کاربردی نشان داد که نمودار DMA-EWMA قادر است تغییرات کوچک در فرایند را به سرعت و با دقت بالا شناسایی کند. این قابلیت، امکان مداخله به موقع و اصلاح فرایند را فراهم ساخته و در نهایت به بهبود مستمر کیفیت و کاهش ضایعات در محیط‌های تولیدی منجر خواهد شد.

در پایان، یافته‌های این تحقیق بر این نکته تأکید دارد که استفاده از نمودارهای کنترل ترکیبی پیشرفته، همچون DMA-EWMA، می‌تواند به عنوان ابزاری مؤثر در شناسایی سریع تغییرات کوچک و متوسط، منجر به ارتقای کیفیت و بهره‌وری در فرایندهای تولید شود. بر این اساس، استفاده از این نمودار در مباحث کنترل کیفیت آماری برای نظارت بر فرایندهای حساس توصیه می‌گردد. در راستای آینده این پژوهش، می‌توان عملکرد این نمودار برای متغیرهای کیفی با توزیع‌های غیرنرمال، همچنین برای شناسایی تغییرات در پراکندگی فرایند و نیز در شرایط چندمتغیره، مورد بررسی و مطالعه قرار داد. چنین مطالعاتی می‌تواند دامنه کاربرد این ابزار را گسترده‌تر نموده و نقش آن را در محیط‌های صنعتی پیچیده‌تر تثبیت کند.

۶ تقدیر و تشکر

نویسندگان مقاله از سردبیر محترم، داوران گرامی و ویراستار ارجمند مجله که با دیدگاه‌های ارزشمندشان به بهبود چشمگیر کیفیت این مقاله کمک کردند، صمیمانه تشکر و قدردانی می‌نمایند.

این مقاله به ارزیابی عملکرد نمودار کنترل ترکیبی DMA-EWMA برای نظارت بر تغییرات کوچک و متوسط در میانگین فرایند پرداخته است. نتایج به وضوح نشان می‌دهد که نمودار کنترل ترکیبی DMA-EWMA عملکرد برتری در شناسایی تغییرات کوچک و متوسط در میانگین فرایند دارد.

در این راستا، برای ارزیابی جامع‌تر عملکرد نمودار کنترل ترکیبی DMA-EWMA نه تنها از معیار متداول ARL، بلکه از معیارهای تکمیلی MRL و SDRL نیز استفاده شد. نتایج حاصل از شبیه‌سازی‌های مونت‌کارلو (منعکس‌شده در جدول‌های ۱ تا ۴) به وضوح نشان می‌دهد که نمودار DMA-EWMA در مقایسه با نمودارهای کنترل MA، EWMA و DMA، با کاهش محسوسی در مقادیر ARL، MRL و SDRL مواجه شده است. این کاهش، بیانگر افزایش حساسیت و دقت این نمودار و توانایی آن در شناسایی هرچه سریع‌تر، به‌ویژه در مواجهه با تغییرات کوچک، می‌باشد. بنابراین، این بدین معنی است که نمودار کنترل DMA-EWMA از کارایی بالاتری در شناسایی تغییرات کوچک و متوسط نسبت به سایر نمودارهای کنترل برخوردار است.

علاوه بر شواهد شبیه‌سازی، مثال عددی مبتنی بر داده‌های واقعی مربوط به قطر داخلی حلقه پیستون (مونتگومری [۱۶]) نیز توانایی عملیاتی و قدرت این نمودار را در محیطی واقعی تأیید کرد. نتایج این مثال

مراجع

- [1] Abbasi, S. A., Abid, M., Riaz, M., and Nazir, H. Z. (2020), *Performance evaluation of moving average-based EWMA chart for exponentially distributed process*, Chinese Journal of Chemical Engineering, **43**(4), 365–372.
- [2] Adams, B. M., Woodall, W. H., and Lowry, C. A. (1992), *The use (and misuse) of false alarm probabilities in control chart design*, In: Lenz, H. M., Wetherill, G. B., and Wilrich, P. T. (eds.), *Frontiers in Statistical Quality Control*. Physica, Heidelberg, pp. 155–168.
- [3] Adeoti, O. A. (2019), *On control chart for monitoring exponentially distributed quality characteristic*, Transactions of the Institute of Measurement and Control, **42**(2), 295–305.
- [4] Alevizakos, V., Chatterjee, K., Koukouvinos, C., and Lappa, A. (2022), *A double moving average control chart: Discussion*, Communications in Statistics - Simulation and Computation, **51**(10), 6043–6057.
- [5] Aslam, M., Azam, M., and Jun, C.-H. (2015), *A new control chart for exponential distributed life using EWMA*, Transactions of the Institute of Measurement and Control, **37**(2), 205–210.

- [6] Aslam, M., Al-Marshadi, A. H., and Jun, C.-H. (2017), *Monitoring process mean using generally weighted moving average chart for exponentially distributed characteristics*, Communications in Statistics - Simulation and Computation, **46**(5), 3712–3722.
- [7] Aslam, M., Gui, W., Khan, N., and Jun, C.-H. (2017), *Double moving average–EWMA control chart for exponentially distributed quality*, Communications in Statistics - Simulation and Computation, **46**(9), 7351–7364.
- [8] Barnard, G. A. (1959), *Control charts and stochastic processes*, Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology), **21**(2), 239–257.
- [9] Cheema, M., Amin, M., Mahmood, T., Faisal, M., Brahim, K., and Elhassanein, A. (2023), *Deviance and Pearson Residuals-Based Control Charts with Different Link Functions for Monitoring Logistic Regression Profiles: An Application to COVID-19 Data*, Mathematics, **11**(14), 3197.
- [10] Gan, F. F. (1993), *An optimal design of EWMA control charts based on median run length*, Journal of Statistical Computation and Simulation, **45**(3-4), 169–184.
- [11] Hyder, S. M., Raza, M., Mahmood, T., and Abbas, N. (2023), *Enhanced dispersion monitoring structures based on modified successive sampling: Application to fertilizer production process*, Symmetry, **15**, 1108.
- [12] Khan, N., Aslam, M., and Jun, C.-H. (2016), *A EWMA control chart for exponential distributed quality based on moving average statistics*, Quality and Reliability Engineering International, **32**, 1179–1190.
- [13] Khan, I., Khan, D., Noor-Ul-Amin, M., Khalil, U., Alshanbari, H., and Ahmad, Z. (2023), *Hybrid EWMA Control Chart under Bayesian Approach Using Ranked Set Sampling Schemes with Applications to Hard-Bake Process*, Applied Sciences, **13**(15), 8915.
- [14] Khoo, M. B. C., and Wong, V. H. (2008), *A double moving average control chart*, Communications in Statistics - Simulation and Computation, **37**(8), 1696–1708.
- [15] Margavio, T. M., Conerly, M. D., Woodall, W. H., and Drake, L. G. (1995), *Alarm rates for quality control charts*, Statistics Probability Letters, **24**(3), 219–224.
- [16] Montgomery, D. C. (2013), *Introduction to Statistical Quality Control* (7th ed.). John Wiley Sons, Incorporated.
- [17] Phantu, S., Areepong, Y., and Sukparungsee, S. (2023), *Average Run Length formulas for mixed double moving average - exponentially weighted moving average control chart*, Science Technology Asia, **28**(1), 77–89.
- [18] Roberts, S. W. (1959), *Control chart tests based on geometric moving averages*, Technometrics, **1**(3), 239–250.
- [19] Raza, M. A., Iqbal, K., Aslam, M., Nawaz, T., Bhatti, S. H., and Engmann, G. M. (2023), *Mixed Exponentially Weighted Moving Average—Moving Average Control Chart with Application to Combined Cycle Power Plant*, Sustainability, **15**(4), 3239.
- [20] Rasheed, Z., Khan, M., Abiodun, N. L., Anwar, S. M., Khalaf, G., and Abbasi, S. A. (2022), *Improved nonparametric control chart based on ranked set sampling with application of chemical data modelling*, Mathematical Problems in Engineering, 2022, 1–15.
- [21] Rasheed, Z., Zhang, H., and Anwar, S. M. (2024), *Reassessment of performance evaluation of EWMA control chart for exponential process*, Quality and Reliability Engineering International, **40**(4), 1685–1697.

- [22] Shamma, S. E., and Shamma, A. K. (1992), *Development and evaluation of control charts using double exponentially weighted moving averages*, International Journal of Quality Reliability Management, **9**, 1–15.
- [23] Sukparungsee, S., Areepong, Y., and Taboran, R. (2020), *Exponentially Weighted Moving Average—Moving Average Charts for Monitoring the Process Mean*, PLOS ONE, **15**(2), e0228208.
- [24] Sunthornwat, R., Sukparungsee, S., and Areepong, Y. (2024), *The Development and Evaluation of Homogenously Weighted Moving Average Control Chart based on an Autoregressive Process*, HighTech and Innovation Journal.
- [25] Talordphop, K., Sukparungsee, S., and Areepong, Y. (2022), *New modified exponentially weighted moving average-moving average control chart for process monitoring*, Connection Science, **34**(1), 1981–1998.
- [26] Talordphop, K., Sukparungsee, S., and Areepong, Y. (2023), *On designing new mixed modified exponentially weighted moving average - exponentially weighted moving average control chart*, Results in Engineering, **18**, 101152.
- [27] Teoh, W., Teoh, J., Goh, K., Song, Z., and Saha, S. (2025), *Enhanced Designs for the Multi-Region Run Sum $\bar{X}$ Control Chart Based on the Median Run Length Metric*, Quality and Reliability Engineering International, **41**(1), 1–15.
- [28] Woodall, W. H. (1983), *The distribution of the run length of one-sided CUSUM procedures for continuous random variables*, Technometrics, **25**(3), 295–301.
- [29] Wang, J., Arslan, M., Riaz, A., Lone, S., and Gunaim, N. (2023), *Triple exponentially weighted moving average control chart with measurement error*, Scientific Reports, **13**(1), 14568.
- [30] Zubair, F., Khan Sherwani, R. A., and Abid, M. (2023), *Enhanced performance of mixed HWMA-CUSUM charts using auxiliary information*, PLOS ONE, **18**(9), e0290727.

Performance evaluation of combined control chart based on MRL and SDRL criteria for a normal qualitative variable

Nader Moradi Tavalalai¹, Ebrahim Salehi² *

¹ Master's Student, Department of Industrial Engineering, Birjand University of Technology, Birjand, Iran

² Department of Industrial Engineering, Birjand University of Technology, Birjand, Iran

Received: 2025/10/13

Accepted: 2026/01/03

Abstract

In industrial environments, achieving high-quality production requires continuous monitoring of processes to reduce waste and increase productivity. Statistical quality control serves as an effective tool for process evaluation, and the control chart, as one of its main tools, plays a significant role in identifying and monitoring process changes. The objective of this study is to evaluate the performance of a hybrid control chart obtained by combining Double Moving Average and Exponentially Weighted Moving Average control charts. To assess the performance of control charts, the run length is first calculated using Monte Carlo simulation. Then, the new metrics of Median Run Length and Standard Deviation of Run Length, alongside the common metric of Average Run Length, are obtained for them, and the capability of control charts in detecting small process shifts based on these new metrics has been evaluated. The results indicate that hybrid control charts are more sensitive than those presented in previous literature in detecting small shifts and represent a more effective tool for enhancing quality and continuous improvement of production processes.

Keywords: Statistical quality control, control chart, Exponentially weighted moving average, Double moving average, Average run length, Median run length, Standard deviation of run length, Monte carlo simulation.

Mathematics Subject Classification: 69P30, 62J07.

*Corresponding author, salehi@birjandut.ac.ir