

ارزیابی عملکرد نمودار کنترل ترکیبی براساس معیارهای MRL و SDRL برای متغیر کیفی نرمال

نادر مرادی تولائی^۱ و ابراهیم صالحی^{۲*}

^۱ دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی بیرجند بیرجند، ایران

^۲ گروه مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی بیرجند، بیرجند، ایران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۰۷/۲۱

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۱۰/۱۳

چکیده

در محیط‌های صنعتی، دستیابی به تولیدات با کیفیت نیازمندی‌های مستمر بر فرآیندها برای کاهش ضایعات و افزایش بهره‌وری است. کنترل کیفیت ابزارهای ابزاری برای ارزیابی آمارها به شمار می‌آید و کنترل کنترل به‌عنوان یکی از ابزارهای اصلی آن، نقش مهمی در شناسایی و نظارت بر فرآیند ایفا می‌کند. هدف این مقاله، ارزیابی عملکرد کنترل ترکیبی از نتایج تفسیری از معیارهای متحرک دوگانه و مقادیر متحرک موزون نمایش، نمایش باشد. سپس، ویژگی‌های جدید میانه طول دنباله و انحراف طول دنباله، در کنار کیفیت متوسط متوسط طول دنباله، برای آن‌ها به‌دست‌آمده و دستگاه‌های کنترل در شناسایی تغییرات کوچک مقیاس این ویژگی‌های جدید مورد ارزیابی قرار گرفته است. نتایج نشان‌دهنده می‌دهد که کنترل‌های کنترل ترکیبی نسبت به طرح‌های ارائه‌شده در متون قبلی، در شناسایی تغییرات کوچک‌تر بوده و ابزاری برای بهبود کیفیت و بهبود فرآیندهای تولید می‌باشند.

واژه‌های کلیدی: کنترل کیفیت آماری، نمودار کنترل، میانگین متحرک موزون نمایی، میانگین متحرک دوگانه، متوسط طول دنباله، میانه طول دنباله، انحراف معیار طول دنباله، شبیه سازی مونت کارلو.

۱ مقدمه

دنیای رقابتی، کنترل کیفیت با استفاده از ابزارهایی مانند نمودارهای کنترل، امکان نظارت دقیق بر فرایندها را فراهم می‌سازد. این نمودارها با تشخیص به‌موقع انحرافات به طور مستقیم به بهبود کیفیت و کاهش هزینه‌ها کمک می‌کنند. نمودارهای کنترل به دو نوع بی‌حافظه و باحافظه تقسیم می‌شوند. نمودارهای کنترل شوهارت بی‌حافظه بوده و تنها بر داده‌های آخرین نمونه تمرکز داشته و در شناسایی تغییرات کوچک فرایند ضعیف عمل می‌کنند. در مقابل، نمودارهای باحافظه با تمرکز بر داده‌های گذشته و حال، توانایی بسیار بالاتری در کشف تغییرات کوچک تدریجی دارند. با توجه به محدودیت‌های هر دو

تولید، به‌عنوان یکی از اساسی‌ترین فعالیت‌های انسان‌ها، مسیر پیشرفت خود را از ساخت ابزارهای ساده تا فرایندهای پیچیده صنعتی طی کرده است. انقلاب صنعتی با پیشرفت کارخانه‌های نوین، تولید را به یک صنعت تبدیل کرده و موجب افزایش کارایی و حجم تولید شده است. امروزه، کیفیت به‌عنوان عامل کلیدی موفقیت در صنایع شناخته می‌شود. این عامل کلیدی که بر عملکرد محصول و رضایت مشتری تمرکز دارد، در بازارهای جهانی اهمیت ویژه‌ای یافته است. در این

کنترل EWMA مبتنی بر میانگین متحرک (MA) برای مشخصه‌ی کیفی با توزیع نمایی پرداختند. آنها با نقد روش مبتنی بر احتمال، از عملکرد طول دنباله (RL) همراه با شبیه‌سازی مونت‌کارلو برای محاسبه ARL استفاده کردند. نتایج آنها نشان داد که نمودار MA-EWMA با مقادیر نمونه بزرگ و وزن‌دهی کوچک، در شناسایی سریع‌تر تغییرات فرایند عملکرد مطلوبی دارد. حیدر و همکاران [۱۱] نمودار کنترل DMA را بر اساس نمونه‌گیری پی‌درپی اصلاح‌شده (MSS)^۱ برای نظارت بر پراکندگی طراحی کردند. آنها عملکرد این نمودار کنترل را با استفاده از معیارهای ARL، MRL و SDRL با نمودارهای کنترل موجود قبلی مقایسه کرده و نتایج آنها نشان داد که نمودار کنترل پیشنهادی در شناسایی تغییرات عملکرد بهتری نسبت به سایر نمودارهای کنترل موجود دارد.

تالوردفاپ و همکاران [۲۵] نمودار کنترل ترکیبی حاصل از تلفیق نمودارهای کنترل میانگین متحرک موزون نمایی اصلاح شده (MEWMA)^۲ و MA برای شناسایی تغییرات کوچک در میانگین فرایند طراحی کردند. آنها عملکرد این نمودار کنترل را با معیارهای ARL، MRL و SDRL بررسی کرده و نشان دادند این نمودار کنترل پیشنهادی نسبت به نمودارهای کنترل شوهارت، MA، MEWMA و MA-MEWMA کارایی بیشتری دارد.

نوع، پژوهشگران به توسعه نمودارهای کنترل ترکیبی روی آورده که با ترکیب نمودارهای بی‌حافظه و باحافظه، قابلیت تشخیص همزمان تغییرات بزرگ و تغییرات کوچک را فراهم کرده و کارایی نظارت بر فرایندهای تولیدی را افزایش می‌دهند (زوبیر و همکاران [۳۰]). برای بهره‌مندی از مزایای نمودارهای کنترل ترکیبی، پژوهش‌های متعددی انجام شده است. شامه و شامه [۲۲] نمودار کنترل میانگین متحرک موزون نمایی دوگانه (DEWMA)^۱ را برای تشخیص تغییرات کوچک ارائه کردند. خو و وانگ [۱۴] نمودار کنترل میانگین متحرک دوگانه (DMA)^۲ را ارائه دادند که نسبت به نمودار کنترل میانگین متحرک موزون نمایی (EWMA)^۳ و نمودار کنترل جمع تجمعی (CUSUM)^۴ عملکرد بهتری دارد. اسلم و همکاران [۵] به طراحی نمودار کنترل EWMA برای مشخصه‌ی کیفی نمایی پرداخته و عملکرد آن را با استفاده از معیار متوسط طول دنباله (ARL)^۵ ارزیابی نمودند. پس از مطالعات یاد شده، پژوهشگران متعددی به مطالعه‌ی این موضوع پرداختند که از جمله‌ی آنها می‌توان به خان و همکاران [۱۲]، اسلم و همکاران [۶]، [۷] و آدیوتی [۳] اشاره کرد. اغلب عملکرد نمودار کنترل بر اساس معیار پیکاربرد ARL ارزیابی می‌شود (مونتگومری [۱۶]). اما ماراگایو و همکاران [۱۵] نشان دادند که استفاده از فرمول

$$ARL = \frac{1}{p}, \quad (1)$$

در این مقاله، به ارزیابی عملکرد نمودار کنترل ترکیبی برای حالتی که متغیرهای کیفی از توزیع نرمال پیروی می‌کنند، پرداخته‌ایم. این مقاله به‌صورت زیر مرتب شده است: بخش ۲ به طراحی نمودارهای کنترل ارائه شده در متون قبلی بویژه طراحی نمودار کنترلی که تلفیقی DMA و EWMA بدست می‌آید، اختصاص داده شده است. در بخش ۳، عملکرد نمودار کنترل پیشنهادی با نمودارهای کنترل قبلی بر اساس معیارهای جدید MRL و SDRL به همراه ARL مورد ارزیابی قرار گرفته است. یک مثال با داده‌های کاربردی از صنعت خودرو در بخش ۴ ارائه شده و عملکرد نمودارهای کنترل مختلف برای آنها مورد بررسی قرار گرفته است. در پایان، نتایج در بخش ۵ جمع‌بندی شده است.

برای نمودارهای کنترل حافظه‌دار، این رابطه معتبر نیست. در این رابطه، p احتمال رسم یک نقطه خارج از حدود کنترل را نشان می‌دهد. علاوه بر این، آدامز [۲] و وودال [۲۸] نیز به این مسئله اشاره کردند. پژوهشگرانی مانند بارنارد [۸] و گان [۱۰] نشان دادند که برای ارزیابی کامل‌تر نمودارهای کنترل، استفاده از معیارهایی همچون میانه طول دنباله (MRL)^۶ و انحراف معیار طول دنباله (SDRL)^۷ نیز ضروری است. در مطالعه‌ی، راشد و همکاران [۲۰] نمودار کنترل EWMA را برای مشخصه‌ی کیفی با توزیع نمایی طراحی کرده و عملکرد آن را با معیارهای ARL، MRL و SDRL ارزیابی کردند. عباسی و همکاران [۱] در پژوهشی به طراحی و ارزیابی عملکرد نمودار

¹ Double Exponentially Weighted Moving Average

² Double Moving Average

³ Exponentially Weighted Moving Average

⁴ Cumulative Sum

⁵ Average Run Length

⁶ Median Run Length

⁷ Standard Deviation of Run Length

⁸ Modified Successive Sampling

⁹ Modified Exponentially Weighted Moving Average

۲ طراحی نمودارهای کنترل

در این بخش به طراحی نمودارهای کنترل MA، EWMA، DMA و DMA-EWMA می پردازیم.

در گام نخست، طراحی نمودار MA مورد بررسی قرار می دهیم. نمودار کنترل MA نوعی نمودار کنترل میانگین وزنی است که برای فرایندهایی با داده های گروهی به کار می رود. فرض کنید که متغیر کیفی از توزیع نرمال با میانگین μ_0 و واریانس σ^2 باشد. اگر

$$\bar{X}_i = (X_{i1} + X_{i2} + \dots + X_{in})/n, \quad (2)$$

میانگین زیرگروه i ام با اندازه n باشد، آماره MA با پهنای w در مرحله i ام به صورت زیر محاسبه می شود (مونتگومری [۱۶]):

$$MA_i = \frac{\bar{X}_i + \bar{X}_{i-1} + \dots + \bar{X}_{i-w+1}}{w}. \quad (3)$$

حدود نمودار کنترل MA به صورت زیر بدست می آید:

$$UCL/LCL = \begin{cases} \mu_0 \pm H_1 \frac{\sigma_{\bar{x}}}{\sqrt{i}}, & i < w; \\ \mu_0 \pm H_1 \frac{\sigma_{\bar{x}}}{\sqrt{w}}, & i \geq w, \end{cases} \quad (4)$$

که در آن H_1 ثابت کنترلی نمودار کنترل MA و $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ است. در گام بعدی، نمودار کنترل EWMA مورد بررسی قرار گرفته است. نمودار کنترل EWMA توسط رابرتز [۱۸] معرفی شده که برای تشخیص تغییرات کوچک در فرایند مناسب است. این نمودار بر اساس آماره زیر محاسبه می شود:

$$Z_i = \lambda \bar{X}_i + (1 - \lambda)Z_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (5)$$

که در آن ثابت $0 < \lambda \leq 1$ و \bar{X}_i میانگین متغیر کیفی فرایند در زمان i ام است. مقدار اولیه $Z_0 = \mu_0$ در نظر گرفته می شود.

با فرض اینکه مشاهدات مستقل و دارای توزیع نرمال باشند، در این صورت میانگین و واریانس Z_i ها به صورت زیر بدست می آید:

$$E(Z_i) = \mu_0, \quad Var(Z_i) = \sigma_{\bar{x}}^2 \left[\frac{\lambda}{2-\lambda} (1 - (1-\lambda)^{2i}) \right]. \quad (6)$$

با توجه به رابطه فوق، برای i هایی به اندازه کافی بزرگ، واریانس Z_i ها به طور تقریبی برابر می شود با:

$$Var(Z_i) = \sigma_{\bar{x}}^2 \left(\frac{\lambda}{2-\lambda} \right). \quad (7)$$

بنابراین، حدود نمودار کنترل EWMA به صورت زیر محاسبه می شود:

$$UCL/LCL = \mu_0 \pm H_2 \sigma_{\bar{x}} \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2-\lambda} \right)}, \quad (8)$$

که در آن H_2 ثابت کنترلی نمودار کنترل EWMA است.

در ادامه، نمودار کنترل DMA که توسط خو و وانگ [۱۴] ارائه شده، توصیف می کنیم. آماره DMA با دو مرتبه محاسبه آماره MA از میانگین زیرگروهها به دست می آید، به طوری که در زمان i ام از میانگین مقادیر MA زمان حال و گذشته با پهنای w محاسبه می شود. بنابراین، داریم:

$$DMA_i = \begin{cases} \frac{MA_i + MA_{i-1} + \dots + MA_{i-w+1}}{i}, & i \leq w; \\ \frac{MA_i + MA_{i-1} + \dots + MA_{i-w+1}}{w}, & w < i < 2w - 1; \\ \frac{MA_i + MA_{i-1} + \dots + MA_{i-w+1}}{w}, & i \geq 2w - 1. \end{cases} \quad (9)$$

حدود کنترل UCL و LCL برای این نمودار کنترل DMA به صورت زیر بدست می آید (خو و وانگ [۱۴]):

$$UCL/LCL = \begin{cases} \mu_0 \pm H_2 \frac{\sigma_{\bar{x}}}{\sqrt{i}} \sqrt{\sum_{j=1}^i \frac{1}{j}}, & i \leq w; \\ \mu_0 \pm H_2 \frac{\sigma_{\bar{x}}}{\sqrt{w}} \sqrt{\sum_{j=i-w+1}^{i-1} \frac{1}{j} + \left(\frac{j-i+w}{w} \right)}, & w < i < 2w - 1; \\ \mu_0 \pm H_2 \frac{\sigma_{\bar{x}}}{\sqrt{w}}, & i \geq 2w - 1, \end{cases} \quad (10)$$

که در آن H_2 ثابت کنترلی نمودار DMA است.

فانتو و همکاران [۱۷] با تلفیق کردن نمودار کنترل DMA و EWMA، نمودار کنترل جدیدی DMA-EWMA معرفی کردند که در ادامه به آن می پردازیم. آماره DMA-EWMA در مرحله i ام با $0 < \lambda \leq 1$ ، برابر است با:

$$UCL/LCL = \begin{cases} \mu_0 \pm H_2 \frac{\sigma_{\bar{x}}}{i} \sqrt{\sum_{j=1}^i \frac{1}{j} \left(\frac{\lambda}{2-\lambda} \right)}, & i \leq w; \\ \mu_0 \pm H_2 \frac{\sigma_{\bar{x}}}{w} \sqrt{\sum_{j=i-w+1}^{i-1} \frac{1}{j} + \left(\frac{j-i+w}{w} \right) \left(\frac{\lambda}{2-\lambda} \right)}, & w < i < 2w - 1; \\ \mu_0 \pm H_2 \frac{\sigma_{\bar{x}}}{w} \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}}, & i \geq 2w - 1, \end{cases} \quad (11)$$

که در آن H_2 ثابت کنترلی نمودار DMA-EWMA است.

پس از محاسبه ی آماره ی هر یک از نمودارهای کنترل معرفی شده در بالا،

معیارهای ARL، MRL و SDRL به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$ARL = \frac{\sum_{t=1}^N RL_t}{N}, \quad (12)$$

$$MRL = \text{Median}(RL), \quad (13)$$

$$SDRL = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^N (RL_t - ARL)^2}{N - 1}}, \quad (14)$$

که در آن RL_t تعداد نمونه‌های قبل از اینکه فرایند برای اولین بار از کنترل خارج شود، t شماره طول دنباله و N تعداد تکرارهای آزمایش است.

در ادامه به تشریح روش شبیه‌سازی مونت کارلو برای بررسی عملکرد نمودارهای کنترل می‌پردازیم. روش شبیه‌سازی مونت کارلو به‌طور گسترده در حوزه نمودارهای کنترل بکار می‌رود و نقش کلیدی در ارزیابی عملکرد آنها ایفا می‌کند. از این روش شبیه‌سازی معمولاً برای محاسبه مقادیر ARL، MRL و SDRL به‌منظور بهینه‌سازی پارامترهای نمودار کنترل و تعیین حدود کنترل استفاده می‌شود. از این رو، می‌توان شبیه‌سازی مونت کارلو را ابزاری ضروری برای طراحی و ارزیابی نمودارهای کنترل دانست (به مراجع وانگ و همکاران [۲۹]، خان و همکاران [۱۳] و چیما و همکاران [۹] مراجعه کنید).

در این مقاله، مراحل شبیه‌سازی به‌صورت زیر انجام شده است (رازا و همکاران [۱۹]). در شرایط تحت کنترل (IC^{10}) بعد از انتخاب پارامترهای λ و w ، مقدار ثابت کنترلی H به‌گونه‌ای تعیین می‌گردد که مقدار $ARL_0=200$ حاصل شود. سپس، داده‌های تصادفی با اندازه نمونه $n = 1$ از توزیع نرمال استاندارد با میانگین $\mu_0 = 0$ و واریانس $\sigma^2 = 1$ تولید می‌شوند. آماره‌های نمودارهای کنترل با استفاده از روابط مربوطه محاسبه و حدود کنترل بدست می‌آید. هرگاه مقدار آماره از حدود کنترل تجاوز کند، شماره‌ی نمونه به عنوان RL ثبت می‌شود. این فرایند شبیه‌سازی به‌طور مکرر اجرا می‌شود تا توزیع طول دنباله‌ها به‌دست آید. پس از حاصل شدن $ARL_0=200$ ، دو معیار دیگر MRL_0 و $SDRL_0$ نیز محاسبه می‌شوند.

در شرایط خارج از کنترل (OOC)^{۱۱}، تغییر در میانگین فرایند به‌صورت $\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma_{\bar{x}}$ اعمال می‌شود و داده‌های جدیدی تولید می‌گردد. سپس با استفاده از همان ضریب کنترلی H به‌دست‌آمده از حالت تحت کنترل، شبیه‌سازی مجدداً اجرا و مقادیر ARL، MRL و SDRL برای شرایط تغییر یافته محاسبه می‌شوند. در اینجا با روش شبیه‌سازی مونت کارلو با پهنای $w \in \{4, 5\}$ ، ثابت کنترلی $\lambda \in \{0.15, 0.25\}$ ، $n = 1$ ، $N = 100,000$ و $ARL_0 = 200$ ، عملکرد نمودارهای MA،

وضعیت کنترل فرایند از طریق مقایسه‌ی این آماره‌ها با حدود کنترل بالا (UCL) و پایین (LCL) مربوط به هر یک از آنها مورد بررسی قرار می‌گیرد. چنانچه آماره‌ی محاسبه‌شده خارج از محدوده‌ی این حدود قرار گیرد، در فرایند تغییر مورد نظر رخ داده است.

۳ ارزیابی عملکرد نمودار کنترلی

در این بخش به ارزیابی عملکرد نمودارهای کنترل ترکیبی MA، EWMA، DMA و DMA-EWMA می‌پردازیم. برای ارزیابی عملکرد نمودارهای کنترل، از ARL که یک معیار متداول است، استفاده می‌شود. معیار ARL به دو نوع تقسیم می‌شود: ARL_1 برای حالتی است که فرایند تحت کنترل قرار دارد و ARL_0 برای زمانی است که فرایند از کنترل خارج شده و تغییر در آن رخ داده است. فانگو و همکاران [۱۷] در مطالعه خود به طراحی نمودار DMA-EWMA پرداخته و برای ارزیابی عملکرد این نمودار از معیارهای ARL_1 و ARL_0 استفاده کردند. برخی از محققان در مطالعات خود به این موضوع پرداخته‌اند که ارزیابی عملکرد نمودارهای کنترل تنها با معیار ARL از اعتبار کافی برخوردار نیست. به همین دلیل، استفاده از معیارهای دیگر مانند MRL و SDRL نیز برای ارزیابی عملکرد نمودارهای کنترل توصیه شده تا ارزیابی دقیق‌تری از عملکرد نمودار کنترل به دست آید. این موضوع در مقاله راشد و همکاران [۲۱] نیز مورد تأکید قرار گرفته است.

معیار MRL، میانه توزیع طول دنباله‌ها (RL) است که در آن RL تعداد نمونه‌های مورد نیاز قبل از اینکه فرایند برای اولین بار خارج از کنترل شود، می‌باشد. این معیار هنگامی که توزیع RL‌ها نامتقارن و یا دارای چولگی شدید باشد، قابل اعتمادتر بوده و لذا بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرد. معیار SDRL میزان پراکندگی طول دنباله تا شناسایی اولین نمونه خارج کنترل را نشان می‌دهد و مقدار کمتر آن به معنای عملکرد بهتر نمودار کنترل است (تیو و همکاران [۲۷] و سانتورنات و همکاران [۲۴]). بر این اساس، علاوه بر ARL دو معیار دیگر MRL و SDRL نیز برای ارزیابی عملکرد نمودارهای کنترل MA، EWMA، DMA و DMA-EWMA به روش شبیه‌سازی مونت کارلو به کار گرفته شده‌اند. لازم به ذکر است اشاره کنیم که مقادیر کم معیارهای MRL و SDRL در حالت خارج از کنترل نشان دهنده عملکرد بهتر نمودار کنترل است.

¹⁰In-control

¹¹Out of control

و DMA همچنان واکنش کندتری به تغییرات دارند. برای تغییرات کوچک و متوسط، نمودار کنترل DMA-EWMA با دارا بودن کمترین مقدار ARL، MRL و SDRL، عملکرد بهتری در شناسایی سریع تغییرات از خود نشان می‌دهد.

فانتو و همکاران [۱۷] نشان دادند که نمودار DMA-EWMA از نظر معیار ARL نسبت به نمودارهای کنترل شوهارت و EWMA عملکرد بهتری دارد. در این مقاله، دو معیار جدید MRL و SDRL استفاده شده که توانایی نمودارهای کنترل در شناسایی سریع تغییرات فرایند را به صورت کامل‌تری ارزیابی می‌کند. بر اساس این معیارها نیز، نمودار کنترل DMA-EWMA عملکرد بهتری نسبت به سایر نمودارها نشان می‌دهد. برای مثال و درک بهتر این موضوع، براساس داده‌های جدول ۴، نمودار معیارهای ARL، MRL و SDRL برای نمودارهای کنترل MA، EWMA، DMA، و DMA-EWMA به ترتیب در شکل‌های ۱ تا ۳ رسم شده است.

همان طور که در این شکل‌ها مشاهده می‌کنید، منحنی هر سه معیار مذکور برای نمودار کنترل DMA-EWMA پایین‌تر از سایر نمودارهای کنترل بوده که نشان دهنده عملکرد قوی‌تر این نمودار کنترل در شناسایی تغییرات کوچک و متوسط می‌باشد.

به طور کلی، عملکرد نمودارهای کنترل به وضوح تحت تأثیر دو پارامتر مؤثر، λ و w قرار دارد. کاهش مقدار λ از 0.20 به 0.15 باعث کاهش مقادیر ARL، MRL و SDRL می‌شود، به ویژه در مواجهه با تغییرات کوچک فرایند ($\delta < 1$)، که این موضوع نشان‌دهنده حساسیت بالاتر نمودار کنترل نسبت به تغییرات جزئی است. از طرفی، افزایش w از 3 به 4 نیز باعث بهبود عملکرد در شناسایی تغییرات کوچک کمک می‌کند. نتایج داده‌های جدول ۱ تا ۴ نشان می‌دهد که نمودارهای کنترل برای پارامترهای $\lambda = 0.15$ و $w = 4$ نسبت به سایر مقادیر برای این پارامترها، عملکرد سریع‌تر و پایدارتری در شناسایی تغییرات کوچک دارند. با این حال، برای تغییرات بزرگ ($\delta \geq 1.5$)، اثر این پارامترها کم‌تر است و عملکرد همه نمودارها به هم نزدیک می‌شود. در تمامی این شرایط، نمودار کنترل DMA-EWMA به طور پیوسته و با دارا بودن کمترین مقادیر معیارهای ارزیابی، برتری خود را نسبت به نمودارهای MA، EWMA و DMA حفظ می‌کند. این موضوع نشان می‌دهد که علاوه بر ARL، دو معیار دیگر MRL و SDRL نیز برای ارزیابی کامل‌تر نمودارهای کنترل نیز مؤثر هستند.

DMA، EWMA و DMA-EWMA مورد ارزیابی قرار گرفته است و برای معیارهای ARL، MRL و SDRL برای نمودارهای کنترل در جدول‌های ۱ تا ۴ گزارش شده است.

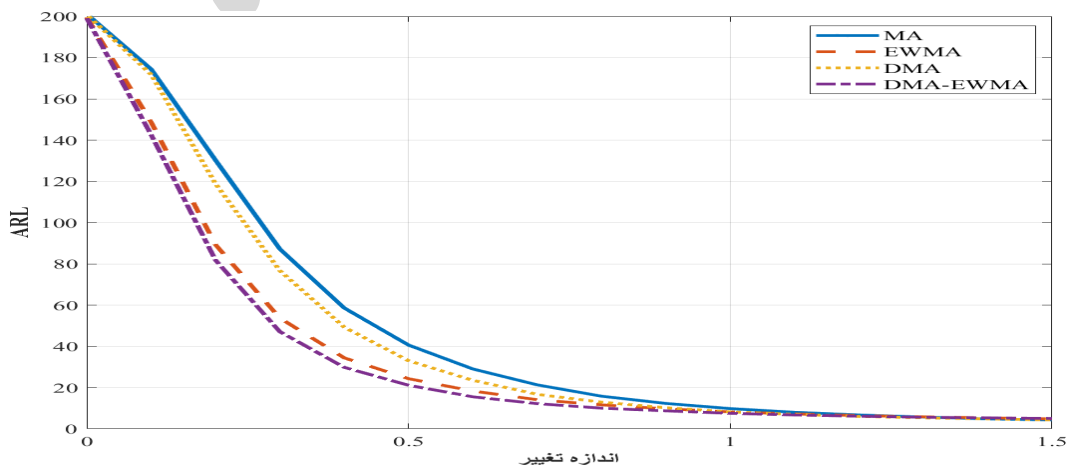
حال، به بررسی عملکرد نمودارهای کنترل تحت شرایط مختلف تغییر در میانگین فرایند می‌پردازیم. نتایج نشان می‌دهد در تمامی چهار جدول در شرایط بدون تغییر ($\delta = 0$)، مقادیر ARL برای همه نمودارها تقریباً برابر 200 است که نشان‌دهنده تحت کنترل بودن فرایند می‌باشد. با شروع تغییرات در میانگین فرایند، معیارهای ARL، MRL و SDRL نمودارها به تدریج کاهش می‌یابد؛ به طوری که در جدول ۱ با $w = 3$ و $\lambda = 0.20$ ، برای تغییرات کوچک $\delta = 0.2$ ، نمودار کنترل DMA-EWMA با $ARL = 94.6$ ، $MRL = 66$ و $SDRL = 94.6$ سریع‌تر تغییر را شناسایی کرده و برتری خود را نسبت به نمودارهای کنترل MA، EWMA و DMA نشان می‌دهد. نمودارهای کنترل MA و DMA کمی دیرتر تغییرات را شناسایی کرده و نمودار کنترل EWMA عملکرد متوسطی دارد. با افزایش تغییر به $\delta = 1$ ، نمودار کنترل DMA-EWMA همچنان با $ARL = 73$ ، $MRL = 60$ و $SDRL = 47$ بهترین واکنش را نشان می‌دهد.

در جدول ۲ با $w = 4$ و $\lambda = 0.20$ ، روند مشابهی مشاهده می‌شود. برای تغییرات کوچک $\delta = 0.2$ ، نمودار کنترل DMA-EWMA با $ARL = 89.4$ ، $MRL = 61$ و $SDRL = 94.1$ سریع‌تر از بقیه نمودارهای کنترل تغییرات را شناسایی می‌کند. نمودار MA با $ARL = 127.4$ ، $MRL = 89.0$ و $SDRL = 128.4$ دیرتر از سایر نمودارهای کنترل تغییرات را تشخیص می‌دهد.

در جدول ۳ با $w = 3$ و $\lambda = 0.15$ ، کاهش λ باعث واکنش سریع‌تر نمودارها در شناسایی تغییرات شده است. برای $\delta = 0.2$ ، نمودار کنترل DMA-EWMA با $ARL = 87.7$ و $MRL = 63$ بهترین عملکرد را نشان می‌دهد و نمودار کنترل MA دیرترین شناسایی تغییرات را دارد. این روند در تغییرات متوسط و بزرگ نیز ادامه دارد و نمودار کنترل DMA-EWMA همچنان عملکرد بهتری دارد، در حالی که نمودارهای کنترل MA، EWMA و DMA واکنش کندتری به تغییرات دارند. در نهایت، در جدول ۴ با $w = 4$ و $\lambda = 0.15$ ، همان طور که مشاهده می‌کنید، نمودار کنترل DMA-EWMA در تغییرات کوچک (برای مثال $\delta = 0.2$) با $ARL = 81.8$ ، $MRL = 56$ و $SDRL = 83.0$ زودتر تغییرات را شناسایی می‌کند. نمودارهای کنترل MA، EWMA

جدول ۱: مقادیر معیارهای ARL، MRL و SDRL نمودارهای کنترل برای پارامترهای $\lambda = 0.20$ و $w = 3, \sigma^2 = 1, \mu_0 = 0$

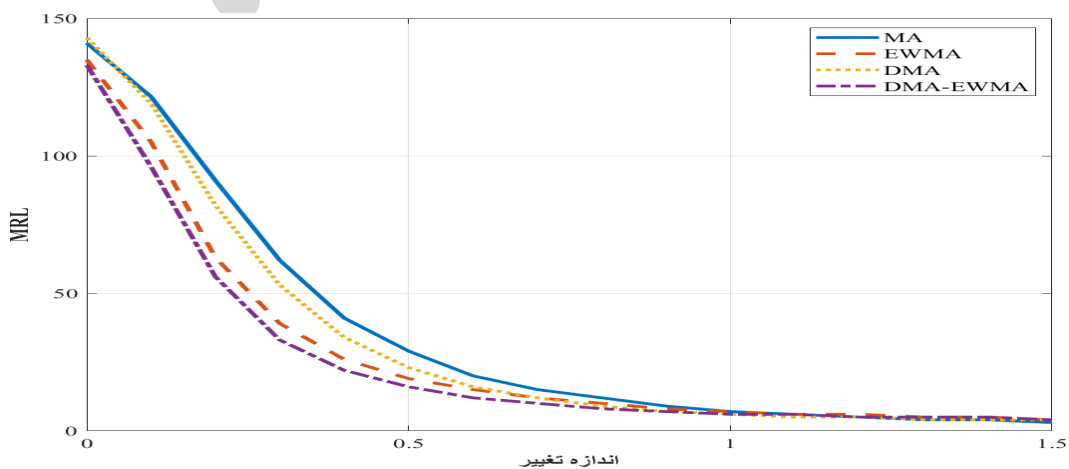
DMA-EWMA ($H = 6.39$)			DMA ($H = 3.85$)			EWMA ($H = 2.65$)			MA ($H = 2.74$)			δ
SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	
201.5	132	199.4	200.2	138	196.6	201.2	146	200.9	197.7	138	197.7	0
161.0	106	155.4	174.1	121	173.6	161.1	115	165.0	175.4	124	177.9	0.1
94.6	66	94.6	128.1	87	126.8	100.9	73	104.7	137.7	97	139.3	0.2
52.1	38	53.6	82.6	58	83.5	58.8	45	63.2	94.9	67	96.7	0.3
32.5	25	34.6	56.5	40	56.8	35.0	29	39.7	66.1	47	67.4	0.4
21.0	17	23.4	38.5	27	38.7	22.9	20	27.2	46.5	33	47.1	0.5
14.6	13	17.1	26.4	19	27.4	15.6	16	20.1	32.7	24	34.2	0.6
10.0	10	12.8	19.0	14	20.3	11.1	12	15.2	23.6	18	25.3	0.7
7.5	8	10.3	14.0	11	14.9	8.2	10	12.1	17.7	14	19.1	0.8
5.8	7	8.5	10.5	8	11.8	6.4	8	10.1	13.2	11	14.6	0.9
4.7	6	7.3	8.2	7	9.5	5.0	7	8.5	10.1	8	11.5	1.0
3.7	5	6.4	6.3	5	7.6	4.0	6	7.3	8.1	7	9.3	1.1
3.0	5	5.7	4.9	5	6.4	3.3	6	6.4	6.3	6	7.6	1.2
2.5	4	5.2	3.9	4	5.5	2.8	5	5.7	5.1	5	6.4	1.3
2.1	4	4.8	3.2	4	4.9	2.4	5	5.2	4.2	4	5.5	1.4
1.8	4	4.5	2.6	4	4.3	2.1	4	4.7	3.5	4	4.7	1.5
1.3	3	3.9	1.7	3	3.5	1.5	4	3.9	2.3	3	3.4	1.75
1.0	3	3.5	1.2	3	2.9	1.2	3	3.3	1.6	2	2.7	2.0
0.8	3	3.2	0.9	2	2.6	1.0	3	2.9	1.2	2	2.2	2.25
0.7	3	3.0	0.8	2	2.3	0.8	2	2.6	0.9	2	1.9	2.5
0.6	3	2.8	0.7	2	2.1	0.7	2	2.3	0.8	1	1.6	2.75
0.6	3	2.7	0.6	2	2.0	0.6	2	2.1	0.6	1	1.5	3.0



شکل ۱: مقایسه منحنی‌های معیار ARL برای نمودارهای کنترل

جدول ۲: مقادیر معیارهای ARL، MRL و SDRL نمودارهای کنترل برای پارامترهای $\lambda = 0.20$ و $w = 4, \sigma^2 = 1, \mu_0 = 0$

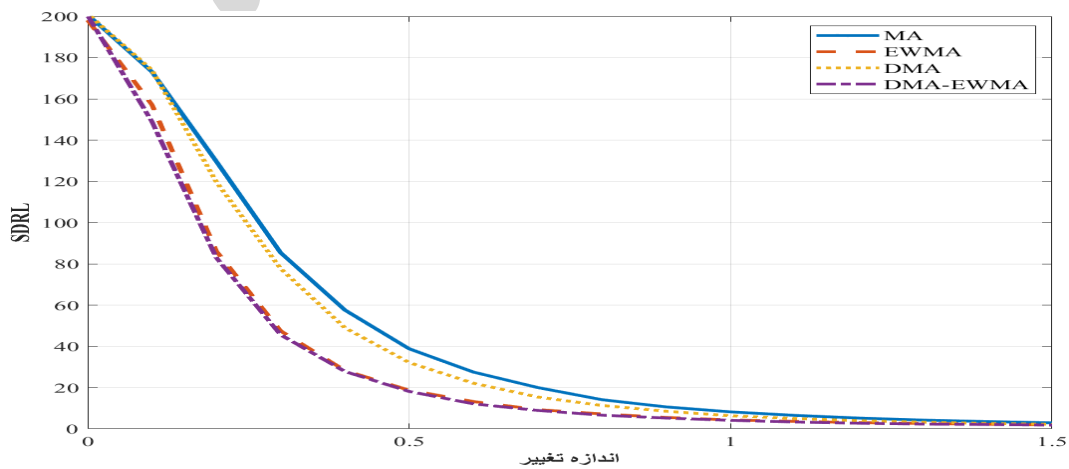
DMA-EWMA ($H = 796$)			DMA ($H = 429$)			EWMA ($H = 264$)			MA ($H = 270$)			δ
SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	
201.4	142	198.5	201.3	149	200.0	201.2	145	200.7	198.9	140.5	201.3	0
163.4	102	153.4	182.2	125	181.1	160.2	115	164.0	172.8	121	175.2	0.1
94.1	61	89.4	128.7	85	124.4	98.6	73	103.5	128.4	89	127.4	0.2
53.0	37	52.9	79.3	55	78.3	57.5	45	62.4	85.9	61	87.4	0.3
31.8	24	33.2	50.2	35	50.0	34.9	29	39.9	55.7	41	57.8	0.4
20.3	17	22.6	33.5	23	33.7	22.3	21	27.3	38.1	28	39.7	0.5
14.0	12	16.4	22.3	16	23.4	15.6	15	19.8	26.2	20	28.1	0.6
9.9	10	12.8	16.0	12	17.2	11.0	12	15.3	19.7	15	21.1	0.7
7.2	8	10.2	11.6	9	13.1	8.2	10	12.1	14.2	11	15.6	0.8
5.5	7	8.5	8.4	7	10.2	6.2	8	9.9	10.6	9	12.2	0.9
4.4	6	7.4	6.5	6	8.4	5.0	7	8.5	8.4	7	9.9	1.0
3.5	6	6.6	5.1	5	7.1	4.0	6	7.3	6.3	6	7.9	1.1
2.9	5	6.0	3.9	5	6.0	3.4	6	6.4	5.1	5	6.6	1.2
2.4	5	5.5	3.2	4	5.3	2.8	5	5.7	4.3	4	5.6	1.3
2.0	4	5.1	2.5	4	4.7	2.4	5	5.2	3.5	4	4.8	1.4
1.8	4	4.8	2.2	4	4.4	2.0	4	4.7	2.9	3	4.2	1.5
1.3	4	4.2	1.5	3	3.7	1.5	4	3.9	1.9	3	3.2	1.75
1.0	4	3.8	1.1	3	3.2	1.2	3	3.3	1.4	2	2.5	2.0
0.8	3	3.6	0.9	3	2.8	0.9	3	2.9	1.1	2	2.1	2.25
0.7	3	3.3	0.8	2	2.6	0.8	2	2.6	0.9	2	1.8	2.5
0.6	3	3.2	0.7	2	2.3	0.7	2	2.4	0.7	1	1.6	2.75
0.5	3	3.0	0.6	2	2.2	0.6	2	2.2	0.6	1	1.5	3.0



شکل ۲: مقایسه منحنی‌های معیار MRL برای نمودارهای کنترل

جدول ۳: مقادیر معیارهای ARL، MRL و SDRL نمودارهای کنترل برای پارامترهای $\lambda = 0.15$ و $w = 3$ ، $\sigma^2 = 1$ ، $\mu_0 = 0$

DMA-EWMA ($H = 6.49$)			DMA ($H = 3.84$)			EWMA ($H = 2.56$)			MA ($H = 2.73$)			δ
SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	
201.6	140	200.6	200.0	138	199.2	197.5	139	201.2	199.8	140	198.3	0
146.3	106	151.5	173.6	118	172.8	159.9	107	157.5	176.1	119.5	175.1	0.1
83.2	61	88.0	126.2	87	125.1	87.6	65	90.4	130.9	95	134.2	0.2
49.4	36	51.4	85.2	59	85.1	48.2	39	53.9	94.5	67	96.0	0.3
28.8	24	32.4	56.9	39	56.9	29.3	27	35.3	64.9	47	66.4	0.4
18.6	17	22.5	37.2	27	38.3	19.0	19	24.4	46.4	33	47.2	0.5
12.8	13	16.3	25.6	19	26.8	13.1	15	18.2	32.8	23	33.3	0.6
9.0	10	12.5	19.3	14	19.8	9.4	12	14.2	23.4	17	24.4	0.7
7.0	9	10.5	13.7	10	14.9	7.2	10	11.5	17.3	13	18.8	0.8
5.5	7	8.7	10.4	8	11.7	5.6	8	9.8	12.7	10	14.1	0.9
4.3	6	7.5	7.8	7	9.2	4.5	7	8.4	10.2	8	11.4	1.0
3.5	6	6.6	6.1	5	7.5	3.6	6	7.3	7.9	7	9.2	1.1
2.9	5	5.9	4.8	5	6.4	3.0	6	6.4	6.2	6	7.5	1.2
2.5	5	5.4	3.8	4	5.5	2.5	5	5.8	5.1	5	6.4	1.3
2.1	5	5.0	3.2	4	4.9	2.2	5	5.3	4.2	4	5.4	1.4
1.8	4	4.6	2.6	4	4.3	1.9	4	4.8	3.4	4	4.6	1.5
1.4	4	4.1	1.7	3	3.4	1.5	4	4.1	2.3	3	3.4	1.75
1.0	3	3.7	1.2	3	2.9	1.1	3	3.4	1.6	2	2.7	2.0
0.8	3	3.4	0.9	2	2.6	0.9	3	3.0	1.2	2	2.2	2.25
0.7	3	3.2	0.8	2	2.3	0.8	3	2.7	0.9	2	1.9	2.5
0.6	3	3.0	0.7	2	2.1	0.7	2	2.5	0.8	1	1.6	2.75
0.5	3	2.9	0.6	2	2.0	0.6	2	2.3	0.6	1	1.5	3.0



شکل ۳: مقایسه منحنی‌های معیار SDRL برای نمودارهای کنترل

جدول ۴: مقادیر معیارهای ARL، MRL و SDRL نمودارهای کنترل برای پارامترهای $\mu_0 = 0$ ، $\sigma^2 = 1$ ، $w = 4$ و $\lambda = 0.15$

DMA-EWMA ($H = 1.15$)			DMA ($H = 4.27$)			EWMA ($H = 2.55$)			MA ($H = 2.70$)			δ
SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	SDRL	MRL	ARL	
200.4	133	199.1	201.2	143	200.9	198.2	135	199.6	200.8	141	201.2	0
148.9	96	142.6	173.9	119	171.8	157.1	105	148.7	173.1	121.5	174.4	0.1
83.0	56	81.8	119.8	82	118.9	86.2	63	89.3	129.7	91	130.3	0.2
45.6	33	47.1	77.7	53	76.7	47.5	39	53.7	85.4	62	87.2	0.3
27.8	22	29.8	49.0	34	49.3	28.3	26	34.4	57.6	41	58.6	0.4
18.1	16	21.1	32.1	23	33.0	18.7	19	24.3	38.8	29	40.6	0.5
12.1	12	15.5	22.1	16	23.5	13.2	15	18.3	27.5	20	29.0	0.6
8.9	10	12.2	15.4	12	16.7	9.3	12	14.1	20.0	15	21.3	0.7
6.6	8	10.0	11.3	9	12.9	7.2	10	11.6	14.1	12	15.8	0.8
5.2	7	8.7	8.5	7	10.2	5.5	8	9.7	10.6	9	12.3	0.9
4.1	6	7.5	6.3	6	8.2	4.3	7	8.2	8.2	7	9.8	1.0
3.3	6	6.7	5.0	5	7.0	3.6	6	7.2	6.5	6	8.0	1.1
2.7	5	6.1	3.9	5	6.0	3.0	6	6.4	5.2	5	6.7	1.2
2.3	5	5.6	3.2	4	5.3	2.6	5	5.8	4.2	4	5.7	1.3
2.1	5	5.3	2.6	4	4.8	2.2	5	5.3	3.5	4	4.8	1.4
1.8	4	5.0	2.2	4	4.3	1.9	4	4.8	2.9	3	4.3	1.5
1.3	4	4.4	1.5	3	3.6	1.4	4	4.0	1.9	3	3.2	1.75
1.1	4	4.0	1.1	3	3.1	1.1	3	3.4	1.4	2	2.5	2.0
0.6	3	3.3	0.7	2	2.3	0.7	2	2.5	0.7	1	1.6	2.25
0.5	3	3.2	0.6	2	2.2	0.6	2	2.3	0.6	1	1.4	3.0

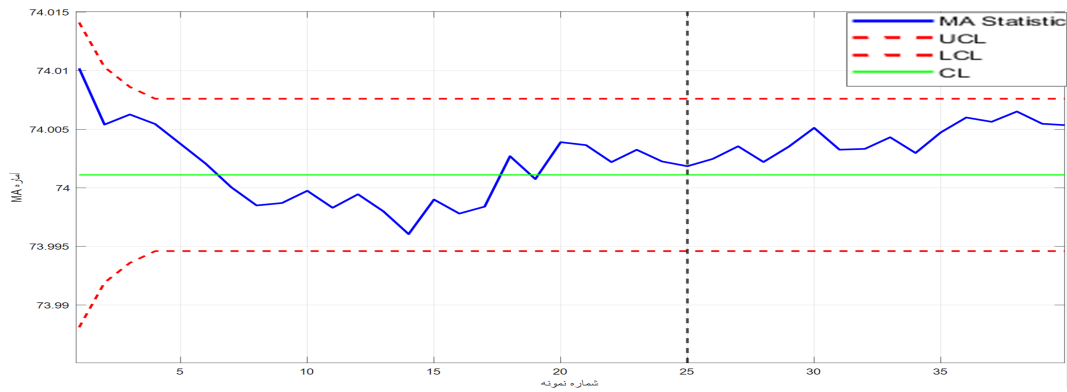
۴ مثال کاربردی

شد. به این ترتیب، استفاده از این داده‌های واقعی در تحقیقات، نقش مؤثری در ارتقای شاخص‌های ایمنی و کیفیت در صنعت خودروسازی ایفا می‌کند. برای همین منظور، در این مقاله از داده‌های پیستون استفاده شده تا عملکرد نمودارهای کنترل MA، EWMA، DMA و DMA-EWMA با هم مقایسه و مورد ارزیابی قرار گیرند. این مجموعه داده‌ها که شامل اندازه قطر حلقه پیستون موتور خودرو بوده، در جدول ۵ ارائه شده و شامل ۴۰ نمونه ۵ تایی ($n = 5$) است. ۲۵ نمونه اول دارای توزیع نرمال با $\mu = 74.012$ و انحراف معیار $\sigma = 0.1$ است. توجه کنید که در میانگین این ۲۵ نمونه اولیه هیچ تغییری رخ نداده و تحت کنترل هستند. اما در ۱۵ نمونه بعدی (نمونه ۲۶ تا ۴۰) به میزان 0.3σ تغییر در میانگین آنها اعمال شده و مشاهدات در وضعیت OOC قرار دارند. فرض کنید $ARL_0 = 370$ ، $w = 4$ و $\lambda = 0.25$ در نظر گرفته شود. همان‌طور که در شکل ۴ تا ۶ مشاهده می‌شود، نمودارهای کنترل MA، EWMA، DMA و همچنان پس از تغییر در نمونه ۲۶، تحت کنترل قرار دارند (به تغییر رخ داده در این نمونه‌ها واکنش نشان ندادند). اما نمودار کنترل DMA-EWMA (شکل ۷) بعد از نمونه ۳۸ به تغییرات پی‌برده که نشان می‌دهد این نمودار کنترل در مقایسه با سایر نمودارها، عملکرد بهتری در شناسایی تغییرات کوچک دارد.

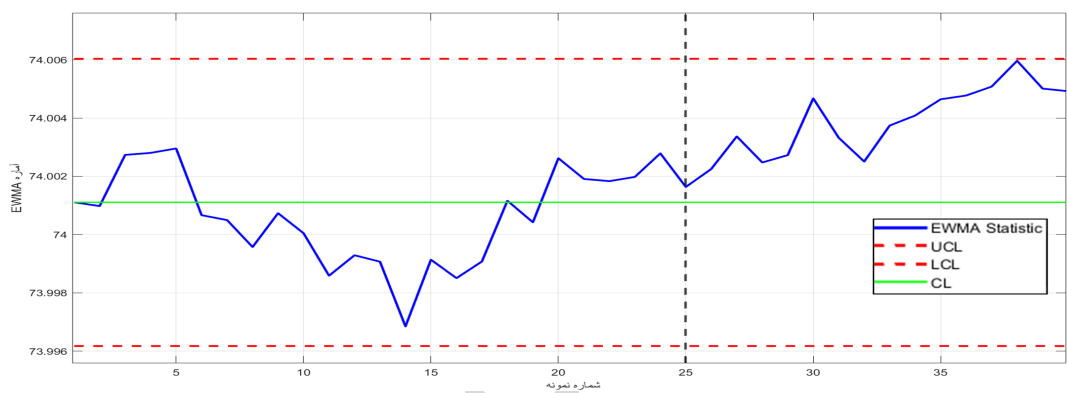
برای نشان دادن کاربرد عملی از نتایج، یک مثال کاربردی از داده‌های صنعت خودروسازی در این بخش ارائه می‌کنیم. صنعت خودروسازی به‌عنوان یکی از پیشرفته‌ترین حوزه‌های تولید صنعتی به شمار می‌آید که همواره نیازمند دقت و حساسیت ویژه‌ای در کنترل کیفیت دارد. اهمیت بالای ایمنی و عملکرد صحیح خودروها موجب می‌شود که هرگونه نقص در قطعات، پیامدهای جدی و گسترده‌ای به همراه داشته باشد. در این شرایط، استفاده از داده‌های واقعی و تحلیل دقیق آن‌ها، نقش مؤثری در بهبود فرایندهای تولید و ارتقای کیفیت محصولات ایفا می‌کند. در همین راستا مونتگومری [۱۶] داده‌های مرتبط به قطعات پیستون را به عنوان نمونه کاربردی ارائه کرده که پژوهشگران بسیاری از جمله الویزاکس و همکاران [۴] از آن استفاده کردند. پیستون به دلیل نقش حیاتی در عملکرد موتور و دقت ابعادی بالا، به نمونه‌ای کلیدی در صنعت خودروسازی تبدیل شده است. به همین دلیل از داده‌های مربوط به پیستون برای بهبود ابزارهای کنترل کیفیت استفاده می‌شود. این ابزارها امکان شناسایی سریع و دقیق مشکلات تولید را فراهم می‌سازند و از این طریق به بهبود مستمر کیفیت محصولات کمک می‌کنند. در نهایت، این فرآیند موجب افزایش رضایت مشتریان از صنعت خودروسازی خواهد

جدول ۵: داده‌های اندازه قطر پیستون موتور خودرو (مونتگومری [۱۶])

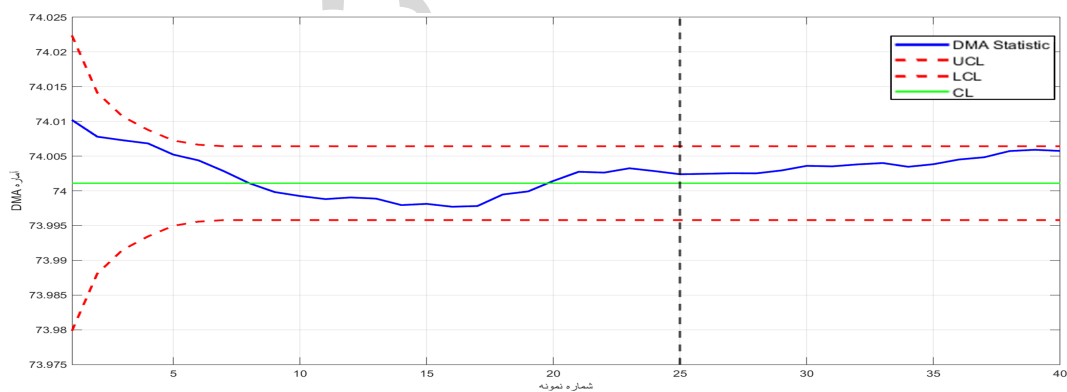
x_5	x_4	x_3	x_2	x_1	i	x_5	x_4	x_3	x_2	x_1	i
73.996	74.005	74.015	74.001	73.982	21	74.008	73.992	74.019	74.002	74.003	1
74.009	74.006	73.999	73.999	74.004	22	74.004	74.011	74.001	73.992	73.995	2
74.014	74.009	73.999	73.989	74.001	23	74.002	74.005	74.021	74.024	73.988	3
74.001	74	73.993	74.008	74.015	24	74.009	74.015	73.993	73.996	74.002	4
74.013	74.017	73.995	73.984	73.982	25	74.014	73.989	74.015	74.007	73.992	5
74.011	74.006	73.994	73.998	74.012	26	73.993	73.985	73.997	73.994	74	6
74.001	74.004	74.010	74.017	74.001	27	74.005	74	73.994	74.006	73.995	7
74.001	73.987	74.003	74.010	73.999	28	73.988	74.015	73.993	74.003	73.985	8
74.005	74.005	73.999	73.995	74.013	29	74.004	74.005	74.009	73.995	74.008	9
74.010	74.007	74.013	74.015	74.007	30	73.995	74.007	73.999	74	73.998	10
74.010	73.990	73.998	74.000	73.998	31	73.999	73.995	73.994	73.998	73.994	11
74.003	74.004	74.003	74.003	73.987	32	73.996	74	74.007	74	74.004	12
74.004	74.018	74.019	74.001	73.995	33	74.012	73.997	73.998	74.002	73.983	13
74.023	74.001	73.998	73.995	74.008	34	73.984	74	73.994	73.967	74.006	14
74.009	74.005	74.014	74.004	74.000	35	74.007	73.999	73.998	74.014	74.012	15
74.003	74.005	74.006	74.018	73.993	36	73.996	73.998	74.005	73.984	74	16
74.004	74.013	74.013	74.001	73.999	37	74.007	74.005	73.986	74.012	73.994	17
74.011	74.010	74.007	74.008	74.008	38	74	74.003	74.018	74.001	74.006	18
74.006	73.995	73.999	74.017	73.994	39	73.997	74.005	74.003	74.002	73.984	19
73.990	74.020	74.011	74.011	73.991	40	74.003	74.002	74.013	74.001	74	20



شکل ۴: نمودار کنترل MA با پهنای $w = 4$ و $H = 2810$



شکل ۵: نمودار کنترل EWMA با $\lambda = 0.25$ و $H = 2812$



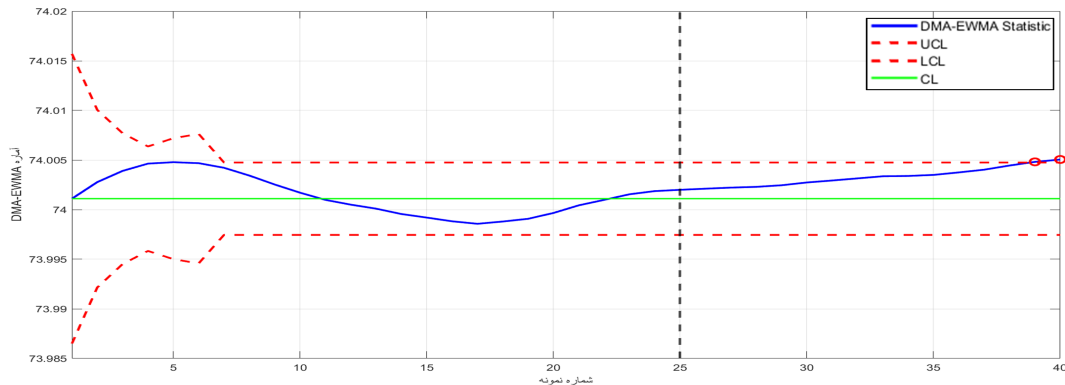
شکل ۶: نمودار کنترل DMA با $w = 4$ و $H = 4757$

EWMA عملکرد برتری در شناسایی تغییرات کوچک و متوسط در میانگین فرایند دارد.

در این راستا، برای ارزیابی جامع‌تر عملکرد نمودار کنترل ترکیبی DMA-EWMA نه تنها از معیار متداول ARL، بلکه از معیارهای تکمیلی MRL و SDRL نیز استفاده شد. نتایج حاصل از

۵ نتیجه گیری

این مقاله به ارزیابی عملکرد نمودار کنترل ترکیبی DMA-EWMA برای نظارت بر تغییرات کوچک و متوسط در میانگین فرایند پرداخته است. نتایج به وضوح نشان می‌دهد که نمودار کنترل ترکیبی DMA-



شکل ۷: نمودار کنترل DMA-EWMA با $\lambda = 0.25$ ، $w = 4$ و $H = 8.641$

این قابلیت، امکان مداخله به موقع و اصلاح فرایند را فراهم ساخته و در نهایت به بهبود مستمر کیفیت و کاهش ضایعات در محیط‌های تولیدی منجر خواهد شد.

در پایان، یافته‌های این تحقیق بر این نکته تأکید دارد که استفاده از نمودارهای کنترل ترکیبی پیشرفته، همچون DMA-EWMA، می‌تواند به عنوان ابزاری مؤثر در شناسایی سریع تغییرات کوچک و متوسط، منجر به ارتقای کیفیت و بهره‌وری در فرایندهای تولید شود. بر این اساس، استفاده از این نمودار در مباحث کنترل کیفیت آماری برای نظارت بر فرایندهای حساس توصیه می‌گردد. در راستای آینده این پژوهش، می‌توان عملکرد این نمودار برای متغیرهای کیفی با توزیع‌های غیرنرمال، همچنین برای شناسایی تغییرات در پراکندگی فرایند و نیز در شرایط چندمتغیره، مورد بررسی و مطالعه قرار داد. چنین مطالعاتی می‌تواند دامنه کاربرد این ابزار را گسترده‌تر نموده و نقش آن را در محیط‌های صنعتی پیچیده‌تر تثبیت کند.

شبهه‌سازی‌های مونت‌کارلو (منعکس‌شده در جدول‌های ۱ تا ۴) به وضوح نشان می‌دهد که نمودار DMA-EWMA در مقایسه با نمودارهای کنترل MA، EWMA و DMA، با کاهش محسوسی در مقادیر ARL، MRL و SDRL مواجه شده است. این کاهش، بیانگر افزایش حساسیت و دقت این نمودار و توانایی آن در شناسایی هرچه سریع‌تر، به‌ویژه در مواجهه با تغییرات کوچک، می‌باشد. بنابراین، این بدین معنی است که نمودار کنترل DMA-EWMA از کارایی بالاتری در شناسایی تغییرات کوچک و متوسط نسبت به سایر نمودارهای کنترل برخوردار است.

علاوه بر شواهد شبهه‌سازی‌سازی، مثال عددی مبتنی بر داده‌های واقعی مربوط به قطر داخلی حلقه پیستون (مونتگومری [۱۶]) نیز توانایی عملیاتی و قدرت این نمودار را در محیطی واقعی تأیید کرد. نتایج این مثال کاربردی نشان داد که نمودار DMA-EWMA قادر است تغییرات کوچک در فرایند را به سرعت و با دقت بالا شناسایی کند.

مراجع

- [1] Abbasi, S. A., Abid, M., Riaz, M., and Nazir, H. Z. (2020), *Performance evaluation of moving average-based EWMA chart for exponentially distributed process*, Chinese Journal of Chemical Engineering, **43**(4), 365–372.
- [2] Adams, B. M., Woodall, W. H., and Lowry, C. A. (1992), *The use (and misuse) of false alarm probabilities in control chart design*, In: Lenz, H. M., Wetherill, G. B., and Wilrich, P. T. (eds.), *Frontiers in Statistical Quality Control*. Physica, Heidelberg, pp. 155–168.
- [3] Adeoti, O. A. (2019), *On control chart for monitoring exponentially distributed quality characteristic*, Transactions of the Institute of Measurement and Control, **42**(2), 295–305.

- [4] Alevizakos, V., Chatterjee, K., Koukouvinos, C., and Lappa, A. (2022), *A double moving average control chart: Discussion*, Communications in Statistics - Simulation and Computation, **51**(10), 6043–6057.
- [5] Aslam, M., Azam, M., and Jun, C.-H. (2015), *A new control chart for exponential distributed life using EWMA*, Transactions of the Institute of Measurement and Control, **37**(2), 205–210.
- [6] Aslam, M., Al-Marshadi, A. H., and Jun, C.-H. (2017), *Monitoring process mean using generally weighted moving average chart for exponentially distributed characteristics*, Communications in Statistics - Simulation and Computation, **46**(5), 3712–3722.
- [7] Aslam, M., Gui, W., Khan, N., and Jun, C.-H. (2017), *Double moving average–EWMA control chart for exponentially distributed quality*, Communications in Statistics - Simulation and Computation, **46**(9), 7351–7364.
- [8] Barnard, G. A. (1959), *Control charts and stochastic processes*, Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology), **21**(2), 239–257.
- [9] Cheema, M., Amin, M., Mahmood, T., Faisal, M., Brahim, K., and Elhassanein, A. (2023), *Deviance and Pearson Residuals-Based Control Charts with Different Link Functions for Monitoring Logistic Regression Profiles: An Application to COVID-19 Data*, Mathematics, **11**(14), 3197.
- [10] Gan, F. F. (1993), *An optimal design of EWMA control charts based on median run length*, Journal of Statistical Computation and Simulation, **45**(3-4), 169–184.
- [11] Hyder, S. M., Raza, M., Mahmood, T., and Abbas, N. (2023), *Enhanced dispersion monitoring structures based on modified successive sampling: Application to fertilizer production process*, Symmetry, **15**, 1108.
- [12] Khan, N., Aslam, M., and Jun, C.-H. (2016), *A EWMA control chart for exponential distributed quality based on moving average statistics*, Quality and Reliability Engineering International, **32**, 1179–1190.
- [13] Khan, I., Khan, D., Noor-Ul-Amin, M., Khalil, U., Alshanbari, H., and Ahmad, Z. (2023), *Hybrid EWMA Control Chart under Bayesian Approach Using Ranked Set Sampling Schemes with Applications to Hard-Bake Process*, Applied Sciences, **13**(15), 8915.
- [14] Khoo, M. B. C., and Wong, V. H. (2008), *A double moving average control chart*, Communications in Statistics - Simulation and Computation, **37**(8), 1696–1708.
- [15] Margavio, T. M., Conerly, M. D., Woodall, W. H., and Drake, L. G. (1995), *Alarm rates for quality control charts*, Statistics & Probability Letters, **24**(3), 219–224.
- [16] Montgomery, D. C. (2013), *Introduction to Statistical Quality Control* (7th ed.). John Wiley & Sons, Incorporated.
- [17] Phantu, S., Areepong, Y., and Sukparungsee, S. (2023), *Average Run Length formulas for mixed double moving average - exponentially weighted moving average control chart*, Science & Technology Asia, **28**(1), 77–89.
- [18] Roberts, S. W. (1959), *Control chart tests based on geometric moving averages*, Technometrics, **1**(3), 239–250.

- [19] Raza, M. A., Iqbal, K., Aslam, M., Nawaz, T., Bhatti, S. H., and Engmann, G. M. (2023), *Mixed Exponentially Weighted Moving Average—Moving Average Control Chart with Application to Combined Cycle Power Plant*, Sustainability, **15**(4), 3239.
- [20] Rasheed, Z., Khan, M., Abiodun, N. L., Anwar, S. M., Khalaf, G., and Abbasi, S. A. (2022), *Improved nonparametric control chart based on ranked set sampling with application of chemical data modelling*, Mathematical Problems in Engineering, 2022, 1–15.
- [21] Rasheed, Z., Zhang, H., and Anwar, S. M. (2024), *Reassessment of performance evaluation of EWMA control chart for exponential process*, Quality and Reliability Engineering International, **40**(4), 1685–1697.
- [22] Shamma, S. E., and Shamma, A. K. (1992), *Development and evaluation of control charts using double exponentially weighted moving averages*, International Journal of Quality & Reliability Management, **9**, 1–15.
- [23] Sukparungsee, S., Areepong, Y., and Taboran, R. (2020), *Exponentially Weighted Moving Average—Moving Average Charts for Monitoring the Process Mean*, PLOS ONE, **15**(2), e0228208.
- [24] Sunthornwat, R., Sukparungsee, S., and Areepong, Y. (2024), *The Development and Evaluation of Homogenously Weighted Moving Average Control Chart based on an Autoregressive Process*, HighTech and Innovation Journal.
- [25] Talordphop, K., Sukparungsee, S., and Areepong, Y. (2022), *New modified exponentially weighted moving average-moving average control chart for process monitoring*, Connection Science, **34**(1), 1981–1998.
- [26] Talordphop, K., Sukparungsee, S., and Areepong, Y. (2023), *On designing new mixed modified exponentially weighted moving average - exponentially weighted moving average control chart*, Results in Engineering, **18**, 101152.
- [27] Teoh, W., Teoh, J., Goh, K., Song, Z., and Saha, S. (2025), *Enhanced Designs for the Multi-Region Run Sum \bar{X} Control Chart Based on the Median Run Length Metric*, Quality and Reliability Engineering International, **41**(1), 1–15.
- [28] Woodall, W. H. (1983), *The distribution of the run length of one-sided CUSUM procedures for continuous random variables*, Technometrics, **25**(3), 295–301.
- [29] Wang, J., Arslan, M., Riaz, A., Lone, S., and Gunaime, N. (2023), *Triple exponentially weighted moving average control chart with measurement error*, Scientific Reports, **13**(1), 14568.
- [30] Zubair, F., Khan Sherwani, R. A., and Abid, M. (2023), *Enhanced performance of mixed HWMA-CUSUM charts using auxiliary information*, PLOS ONE, **18**(9), e0290727.

Performance evaluation of combined control chart based on MRL and SDRL criteria for a normal qualitative variable

Nader Moradi Tavalleai¹, Ebrahim Salehi² *

¹ Master's Student, Department of Industrial Engineering, Birjand University of Technology, Birjand, Iran

² Department of Industrial Engineering, Birjand University of Technology, Birjand, Iran

Received: 2025/10/13

Accepted: 2026/01/03

Abstract

In industrial environments, achieving high-quality production requires continuous monitoring of processes to reduce waste and increase productivity. Statistical quality control serves as an effective tool for process evaluation, and the control chart, as one of its main tools, plays a significant role in identifying and monitoring process changes. The objective of this study is to evaluate the performance of a hybrid control chart obtained by combining Double Moving Average and Exponentially Weighted Moving Average control charts. To assess the performance of control charts, the run length is first calculated using Monte Carlo simulation. Then, the new metrics of Median Run Length and Standard Deviation of Run Length, alongside the common metric of Average Run Length, are obtained for them, and the capability of control charts in detecting small process shifts based on these new metrics has been evaluated. The results indicate that hybrid control charts are more sensitive than those presented in previous literature in detecting small shifts and represent a more effective tool for enhancing quality and continuous improvement of production processes.

Keywords: Statistical quality control, control chart, Exponentially weighted moving average, Double moving average, Average run length, Median run length, Standard deviation of run length, Monte carlo simulation.