احتمالات ورشکستگی در مدل مخاطره انفرادی شرکت بیمه با ماتریس احتمال انتقال نرخ‌های بهره

ابوذر بازیاری[۱]

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۱۱/۰۹
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۰۷/۱۳

چکیده:
شرکت‌های بیمه به لحاظ ساختار تصادفی که دارند، با مدل‌های ریاضی و آماری مدل‌بندی می‌شوند. در این مقاله، مدل مخاطره انفرادی شرکت بیمه با نرخ‌های بهره متفاوت در یک دوره زمانی در نظر گرفته‌شده و فرض می‌شود که نرخ‌های بهره دارای ماتریس احتمال انتقال باحالت متناهی و شمارا باشند. با استفاده از احتمال شرطی روی تابع چگالی اولین خسارت، احتمالات ورشکستگی زمان متناهی و نامتناهی محاسبه‌شده‌اند. همچنین با استفاده از روش استقرای ریاضی، کران‌های بالای احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی برای توزیع‌های دم سبک به‌دست‌آمده‌اند. در مثال‌های عددی، احتمالات ورشکستگی برای توزیع‌های دم‌سنگین با احتمالات داده شده در بازیاری (۲۰۲۲) برای مدل مخاطره انفرادی کلاسیک مقایسه شده و نیز احتمالات ورشکستگی زمان نامتناهی برای توزیع‌های دم سبک با مقادیر کران لاندبرگ مقایسه می‌شوند. نتایج نشان می‌دهند که وجود نرخ‌های بهره دارای ماتریس احتمال انتقال باحالت متناهی باعث کاهش احتمالات ورشکستگی خواهند شد.
واژه‌های کلیدی: احتمال ورشکستگی، احتمال شرطی، کران لاندبرگ، ماتریس احتمال انتقال، مدل مخاطره انفرادی.

۱ مقدمه

بیمه از دو مؤلفه بسیار مهم، یکی بیمه‌گر و دیگری بیمه‌گذاران تشکیل‌شده است. بیمه‌گر متعهد جبران خسارت و رفع بی‌تعادلی است که در پی حادثه مورد بیمه در وضع مالی بیمه‌گذار به وجود می‌آید. تمام هزینه‌ها و جبران خسارت‌های بیمه‌گذاران بر اساس محاسبات آماري می‌باشد. از زمان تأسیس و برقراری شرکت‌های بیمه، تمام فعالیت آن‌ها، فعالیتی مالی و اقتصادی بوده که هدف اصلی آن‌ها کاهش خطر و ایجاد آرامش در بین بیمه‌گذاران است و همواره نیازمند مدیریت قوی و داشتن اطلاعات و دانش در مورد پارامترهایی است که بتواند آن شرکت را در مسیر اقتصادی درست به جلو حرکت دهد. مدل‌بندی شرکت‌های بیمه با استفاده از مدل‌های ریاضی و آماری امری گریزناپذیر بوده و باعث می‌شود تا آماردانان و ریاضی‌دانان بتوانند ضمن بررسی دقیق‌تر توزیع‌های آماری در آن مدل‌ها، با استفاده از روش‌های ریاضی احتمالات ورشکستگی[۲] را محاسبه کنند.
منفی شدن سرمایه شرکت در هر دوره‌ی زمانی، باعث ورشکستگی آن شرکت شده و موجب ضرر و زیان هم برای شرکت به‌عنوان بیمه‌گر و هم برای افراد خسارت‌دیده به‌عنوان بیمه‌گذاران خواهد شد؛ بنابراین لازم است تا احتمالات ورشکستگی شرکت با توجه به نوع توزیع‌های آماری[۳] اندازه‌های خسارت[۴] و فرآیند تعداد خسارت‌ها به‌طور دقیق یا تقریبی محاسبه شوند. به همین دلیل است که بیمه مرکزی ایران افراد متخصصی را که تسلط بر ریاضیات، آمار و مباحث مالی دارند و می‌توانند به یافتن روش‌های مدیریت ریسک کمک کنند، به استخدام خود درمی‌آورد. در دهه‌های اخیر نیز نویسندگان زیادی احتمال ورشکستگی را برای مدل‌های مخاطره شرکت بیمه با روش‌های مختلف به‌طور دقیق یا تقریبی محاسبه کرده‌اند. مفاهیم احتمالات ورشکستگی نخستین بار توسط لاندبرگ (۱۹۰۳) موردمطالعه قرارگرفت. در ادامه کرامر (۱۹۳۰) نتایج بیشتری را در همین ارتباط به دست آورد. دي‌وایلدر (۱۹۹۶)، از روش‌هاي آنالیزی برای محاسبه احتمال ورشکستگی در فرآیند مخاطره استفاده کرد. بورنکی و همکاران (۲۰۰۵)، احتمال ورشکستگی زمان

[۱] گروه آمار، دانشگاه خلیج‌فارس، بوشهر (نویسنده مسئول: ab_bazyari@pgu.ac.ir)

[2]Ruin probabilities
[3]Statistical distributions
[4]Claim sizes
[5]Individual risk model

نامتناهی را به‌طور تقریبی محاسبه کردند. لی و همکاران (۲۰۰۹)، احتمالات ورشکستگی را در مدل مخاطره انفرادی[5] محاسبه کردند. چوی و همکاران (۲۰۱۰)، احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی را در مدل مخاطره جمعی[6] شرکت بیمه محاسبه کردند. یوئن و همکاران (۲۰۱۳)، احتمال ورشکستگی در مدل مخاطره انفرادی را محاسبه و تابع احتمال کسری ورشکستگی را نیز به دست آوردند. بازیاری (۱۳۹۶)، احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی را با استفاده از فرآیندهای تصادفی و معادلات دیفرانسیل به دست آورد. ارزیابی دقیقی از احتمال ورشکستگی زمان متناهی همراه با مثال‌های عددی توسط ایگناتو و همکاران (۲۰۰۱) داده شده است. ایگناتو و کایشو (۲۰۰۴)، احتمال ورشکستگی زمان متناهی را بر اساس چندجمله‌ای آپل محاسبه کردند. لو و لی (۲۰۰۵)، مدل مخاطره جمعی را با فرض آنکه اندازه‌های خسارت و زمان‌های رخداد آن‌ها تحت تأثیر فرآیند مارکوف باشند، در نظر گرفتند و با استفاده از تبدیل لاپلاس احتمالات ورشکستگی را محاسبه کردند. لپوس و سیاپولس (۲۰۰۹)، رفتار مجانبی احتمال ورشکستگی زمان متناهی را در برخی از مدل‌های مخاطره موردبررسی قرار دادند. یانگ و همکاران (۲۰۱۱)، تقریب احتمال ورشکستگی زمان متناهی را در یک مدل مخاطره زمان–پیوسته با کمک نامساوی‌های احتمالی به دست آوردند. همچنین وانگ و همکاران (۲۰۱۲)، تقریب احتمال ورشکستگی زمان متناهی را در مدل مخاطره تعمیم‌یافته محاسبه کردند. اریلماز و گبیزلی‌اگلو (۲۰۱۷)، به تعیین احتمال ورشکستگی زمان متناهی در مدل مخاطره انفرادی با استفاده از احتمالات شرطی پرداختند. برناکایت و سیاپولیس (۲۰۱۷)، تقریب احتمال ورشکستگی زمان متناهی در مدل مخاطره برای اندازه‌های خسارت مستقل و با توزیع‌های زیر نمایی محاسبه کردند. سانتانا و همکاران (۲۰۱۷)، احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی را برای اندازه‌های خسارت با توزیع‌های دم سبک و سنگین محاسبه کردند. دانگ و همکاران (۲۰۱۸)، احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی را با استفاده از تبدیل لاپلاس و سری‌های فوریه به دست آوردند. لی و همکاران (۲۰۲۱)، به محاسبه احتمال ورشکستگی زمان متناهی در مدل مخاطره با روش سری‌های فوریه پرداختند. بازیاری (a۱۴۰۱)، احتمال ورشکستگی زمان متناهی را در مدل مخاطره جمعی شرکت بیمه با استفاده از زنجیر مارکوف زمان–پیوسته برای اندازه‌های خسارت با توزیع‌های دم سبک و سنگین[7] به دست آورد. بازیاری (b۱۴۰۱)، احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی را با استفاده از کران لاندبرگ برای دو نوع مدل مخاطره دارای خسارت‌های با توزیع دم سبک محاسبه کرد. بازیاری (۲۰۲۲) احتمالات ورشکستگی مجانبی را در مدل مخاطره انفرادی برای توزیع‌های دم‌سنگین محاسبه کرد. بازیاری (a۲۰۲۳) احتمالات ورشکستگی را در مدل مخاطره تجدید با استفاده از مارتینگل‌ها محاسبه و نتایج با مثال‌های عددی موردبررسی قرار گرفتند. در مقاله حاضر، نامساوی‌هایی برای احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی در مدل مخاطره انفرادی در حضور نرخ‌های بهره دارای ماتریس احتمال انتقال[8] باحالت متناهی ارائه و نتایج به‌دست‌آمده با احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی در مدل مخاطره کلاسیک برای اندازه‌های خسارت دارای توزیع دم سبک و نیز نتایج به‌دست‌آمده توسط بازیاری (۲۰۲۲) برای اندازه‌های خسارت دارای توزیع دم‌سنگین مقایسه می‌شوند. محاسبه احتمالات ورشکستگی در فرآیندهای مخاطره شرکت بیمه با استفاده از ماتریس احتمال انتقال توسط تعداد کمی از نویسندگان موردمطالعه قرارگرفته و تحقیق انجام شده در مقاله حاضر کاملاً جدید و دارای نوآوری می‌باشد.

در بخش دوم، به ارائه مفاهیمی از نرخ‌های بهره با ماتریس احتمال انتقال، بیان مدل مخاطره انفرادی و تعریف احتمالات ورشکستگی زمان متناهی و نامتناهی پرداخته‌شده است. در بخش سوم، با استفاده از احتمالات شرطی، فرمول‌های برگشتی برای احتمالات ورشکستگی زمان متناهی و نامتناهی به دست آورده می‌شوند. در بخش چهارم، با استفاده از روش استقراء، کران‌های بالای احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی برای اندازه‌های خسارت با توزیع‌های دم سبک محاسبه می‌شوند. در بخش پنجم، با ارائه مثال‌های عددی، کران‌های بالای به‌دست‌آمده برای احتمالات ورشکستگی با یکدیگر مقایسه و مشاهده می‌شود که وجود نرخ‌های بهره با ماتریس احتمال انتقال باعث کاهش کران‌های بالای احتمالات ورشکستگی خواهند شد. در پایان بحث و نتیجه‌گیری در بخش ششم ارائه‌شده است.

۲ مدل مخاطره انفرادی و نرخ‌های بهره با زنجیر مارکوف

در این بخش، ابتدا مدل مخاطره انفرادی با نرخ بهره‌های متفاوت در یک دوره زمانی معرفی‌شده و سپس با فرض آنکه نرخ‌های بهره دارای حالت زنجیر مارکوف باشند، احتمالات ورشکستگی تعریف می‌شوند. با توجه به ساختار ریاضی و آماری شرکت‌های بیمه از نظر نوع حق

[6] Collective risk model
[7] Light and heavy tailed distributions
[8] Transition probability matrix

بیمه‌های[9] دریافتی از بیمه‌گذاران، فرآیند تعداد خسارت‌ها و توزیع آماری خسارت‌ها، مدل‌های مخاطره متفاوتی برای ساختاربندی آن‌ها وجود دارد. در این مقاله، فرآیند مخاطره انفرادی به‌صورت

$$R_n = (1+I_n)R_{n-1} - X_n, \qquad n = 1,2,3,\ldots \qquad (1)$$

تعریف می‌شود، در این مدل فرض می‌شود که $R_0 = u \geq 0$ سرمایه اولیه[10]، متغیرهای تصادفی $\{X_n, n = 1,2,\ldots\}$ اندازه خسارت‌های رخ‌داده شده در بازه زمانی $n-1$ تا n، دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی و هم‌توزیع با تابع توزیع مشترک $F(x) = P(X_1 \leq x)$ هستند و فرض می‌شود که $\{I_n, n = 0,1,\ldots\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی و مستقل از $\{X_n, n = 1,2,\ldots\}$ باشند. متغیر تصادفی I_n، $n = 1,2,\ldots$، نرخ بهره در زمان n است؛ بنابراین فرآیند R_n، $n = 1,2,\ldots$ داده شده در رابطه (۱) فرآیند ذخیره شرکت بیمه با سرمایه اولیه $u \geq 0$ در پایان زمان n است. همانند بازیاری (۲۰۲۲)، فرآیند مخاطره رابطه (۱) برای $n = 1,2,\ldots$ به‌صورت

$$R_n = u\prod_{i=1}^{n}(1+I_i) - \sum_{i=1}^{n}\big(X_i \prod_{k=i+1}^{n}(1+I_k)\big), \qquad (2)$$

نوشته می‌شود.

فرض کنید دنباله نرخ‌های بهره $\{I_n, n = 0,1,\ldots\}$ شامل یک ماتریس احتمال انتقال با مجموعه مقادیر متناهی و شمارا باشد. به این صورت که برای $\{n = 0,1,\ldots,m\}$، متغیر I_n به ترتیب مقادیر $i_0, i_1, \ldots, i_m$ را اختیار کند. به مقادیر احتمالی $i_0, i_1, \ldots, i_m$، فضای حالت زنجیر مارکوف $\{I_n, n = 0,1,\ldots\}$ گفته می‌شود، وقتی که فرآیند در زمان n در حالت i_s باشد، آنگاه $I_n = i_s$ و این فرآیند با احتمال مثبت و ثابت p_{sk} به حالت i_k خواهد رفت و برای حالت‌های $i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}, i_s$ و i_k، $s,k = 0,1,\ldots,m$، تساوی

$$\begin{aligned} P\big(I_{n+1} = i_k | I_n = i_s, I_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, I_1 = i_1, I_0 = i_0\big) \\ = P\big(I_{n+1} = i_k | I_n = i_s\big) = p_{sk}, \quad (3) \end{aligned}$$

که در آن $\sum_{t=0}^{m} p_{sk} = 1$ و $s = 0,1,\ldots,m$ برقرار است. مقدار p_{sk} را احتمال انتقال از حالت i_s به حالت i_k گویند. ماتریسی که شامل تمام این مقادیر است را ماتریس احتمال انتقال می‌گویند و در این مقاله با نماد P نشان داده می‌شود. مجموعه مقادیر هر ماتریس احتمال انتقال مدلی تصادفی برای توصیف یک دنباله از اتفاقات احتمالی است که در آن احتمال هر اتفاق فقط به حالت اتفاق قبلی بستگی دارد. چون این ماتریس به‌صورت تصادفی تغییر می‌کند به‌طورکلی پیش‌بینی حالت آن در نقطه‌ای خاص در آینده غیرممکن است.

۱.۲ احتمالات ورشکستگی زمان متناهی و نامتناهی

فرض کنید فرآیند در زمان n در حالت i_s باشد، آنگاه در مدل مخاطره (۱) برای سرمایه اولیه ثابت $u \geq 0$، احتمالات ورشکستگی زمان متناهی و نامتناهی به ترتیب عبارت‌اند از:

$$\psi_n(u,i_s) = P\Big(\bigcup_{t=1}^{n}(R_t < 0) | I_0 = i_s\Big), \qquad (4)$$

و

$$\psi(u,i_s) = P\Big(\bigcup_{t=1}^{\infty}(R_t < 0) | I_0 = i_s\Big). \qquad (5)$$

بنابراین بدیهی است که برای هر مقدار ثابت s همواره نامساوی

$$\psi_1(u,i_s) \leq \psi_2(u,i_s) \leq \psi_3(u,i_s) \leq \ldots,$$

برقرار بوده و با افزایش n احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی با احتمال ورشکستگی زمان متناهی برابر می‌شود، یعنی $\lim_{n\to\infty}\psi_n(u,i_s) = \psi(u,i_s)$ است (برای دیدن اثبات به بازیاری، ۲۰۲۳a، در بخش اول رجوع شود).

اگر برای هر $n = 0,1,\ldots$، $I_n = 0$ باشد، آنگاه مدل مخاطره (۱) به مدل مخاطره کلاسیک انفرادی

$$R_n = u - \sum_{k=1}^{n} X_k, \qquad n = 1,2,3,\ldots \qquad (6)$$

تبدیل خواهد شد. فرض کنید $\psi(u)$ احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی مدل (۶) باشد، در این صورت

$$\psi(u) = P\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}\big(\sum_{k=1}^{n} X_k > u\big)\Big).$$

نویسندگان زیادی به محاسبه دقیق یا تقریبی احتمالات ورشکستگی در مدل‌های مختلف مخاطره انفرادی پرداختند که از آن جمله می‌توان به لیو و همکاران (۲۰۱۸) و بازیاری (۲۰۲۳b) اشاره کرد.

فرض کنید T_1 زمان رخداد اولین خسارت و X_1 متغیر تصادفی اولین خسارت باشد، اگر شرط $E(X_1 - T_1) < 0$ برقرار باشد، آسموسن و آلبرچر (۲۰۱۰) نشان داد که برای اندازه‌های خسارت با توزیع دم سبک و هر $u \geq 0$ نامساوی

$$\psi(u) \leq e^{-R_0 u}, \qquad (7)$$

[9] Peremium incomes

[10] Initial reserve

برقرار است، که در آن R_0 مقدار ثابت مثبت و یکتا بوده و از رابطه

$$E\big(e^{R_0(X_1-1)}\big)=1, \tag{۸}$$

به دست می‌آید. همچنین اگر برای هر $n=0,1,\ldots$، $I_n\geq 0$ باشد، به دلیل وجود احتمال شرطی بدیهی است که نامساوی $\psi(u,i_s)\leq\psi(u)$ برقرار است. به‌عبارتی‌دیگر وجود نرخ‌های بهره دارای ماتریس احتمال انتقال باحالت متناهی باعث کاهش احتمالات ورشکستگی خواهند شد و این موضوع نیز در مثال‌های عددی در بخش پنجم هم دیده می‌شود؛ بنابراین با توجه به نامساوی (۷)، نامساوی $\psi(u,i_s)\leq e^{-R_0 u}$ برقرار می‌باشد.
به‌عنوان حالتی خاص، اگر $i=1$ و $n=2$ باشد، آنگاه مدل مخاطره (۲) به‌صورت

$$\begin{aligned}R_2 &= u\prod_{i=1}^{2}(1+I_i)-\sum_{i=1}^{2}\big(X_i(1+I_2)\big)\\ &= u(1+I_1)(1+I_2)-(1+I_2)\sum_{i=1}^{2}X_i\\ &= (1+I_2)\big(u(1+I_1)-\sum_{i=1}^{2}X_i\big),\end{aligned}$$

می‌باشد. چون $I_1\geq 0$ و $(1+I_2)\geq 0$ مقدار ذخیره فرآیند به‌دست‌آمده از مقدار فرآیند رابطه (۶) بیشتر است، بنابراین احتمال ورشکستگی آن کمتر خواهد بود.

۳ فرمول‌های برگشتی برای احتمالات ورشکستگی

در این بخش، با استفاده از احتمالات شرطی فرمول‌های برگشتی برای احتمالات ورشکستگی زمان متناهی و نامتناهی برای توزیع‌های دم سبک یا دم‌سنگین به دست آورده می‌شوند.

قضیهٔ ۱.۳. *فرض کنید مدل مخاطره داده شده در رابطه (۲) برای $n=1,2,\ldots$ و سرمایه اولیه $u\geq 0$ برقرار باشد. آنگاه برای هر نوع توزیع آماری اندازه‌های خسارت (توزیع دم سبک یا دم‌سنگین) احتمال ورشکستگی زمان متناهی عبارت است از:*

$$\begin{aligned}\psi_{n+1}(u,i_s) &= \sum_{k=0}^{m}p_{sk}\big(\bar F(u(1+i_k))\\ &+ \int_{-\infty}^{u(1+i_k)}\psi_n(u(1+i_k)-x,i_k)dF(x)\big)\end{aligned} \tag{۹}$$

که در آن

$$\psi_1(u,i_s)=\sum_{k=0}^{m}p_{sk}\bar F\big(u(1+i_k)\big), \tag{۱۰}$$

بوده و نیز احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی عبارت است از:

$$\begin{aligned}\psi(u,i_s) &= \sum_{k=0}^{m}p_{sk}\big(\bar F(u(1+i_k))\\ &+ \int_{-\infty}^{u(1+i_k)}\psi(u(1+i_k-v,i_k))dF(v)\big)\end{aligned} \tag{۱۱}$$

اثبات. فرض کنید $X_1=x$ و فرآیند در اولین زمان در حالت i_k باشد، یعنی $I_1=i_k$ باشد، آنگاه بنا به مدل مخاطره (۱)، تساوی $R_1=u(1+i_k)-x$ برقرار است؛ بنابراین اگر $x>u(1+i_k)$، آنگاه

$$P\big(R_1<0|X_1=x,I_1=i_k,I_0=i_s\big)=1,$$

و برای تمام مقادیر x که $x>u(1+i_k)$، تساوی

$$P\big(\bigcup_{t=1}^{n+1}(R_t<0)|X_1=x,I_1=i_k,I_0=i_s\big)=1,$$

برقرار است. همچنین اگر $0\leq u(1+i_k)\leq x$، آنگاه

$$P\big(R_1<0|X_1=x,I_1=i_k,I_0=i_s\big)=0,$$

بوده و در این حالت

$$\begin{aligned}&P\big(\bigcup_{t=1}^{n+1}(R_t<0)|X_1=x,I_1=i_k,I_0=i_s\big)\\ &=P\big(\bigcup_{t=2}^{n+1}(R_t<0)|X_1=x,I_1=i_k,I_0=i_s\big)\\ &=P\big(\bigcup_{t=2}^{n+1}\big(\prod_{i=1}^{t}(1+I_i)-\sum_{i=2}^{t}X_i\prod_{k=i+1}^{t}(1+I_k)<0\big)|I_1=i_k\big)\\ &=\psi_n(R_1,i_k)=\psi_n(u(1+i_k),i_k).\end{aligned}$$

بنابراین با توجه به رابطه (۴)، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\psi_{n+1}(u,i_s) &= P\big(\bigcup_{t=1}^{n+1}(R_t<0)|I_0=i_s\big)\\ &= \sum_{k=0}^{m}p_{sk}\big(\bar F(u(1+i_k))\\ &+ \int_{-\infty}^{u(1+i_k)}\psi_n(u(1+i_k)-x,i_k)dF(x)\big).\end{aligned} \tag{۱۲}$$

در رابطه (۱۲) اگر $n\to\infty$ آنگاه احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی در رابطه (۱۱) به دست می‌آید. همچنین برای محاسبه رابطه (۱۰)، با شرطی کردن روی $I_0=i_s$ داریم:

$$\begin{aligned}\psi_1(u,i_s) &= P\big(X_1>u(1+I_1)|I_1=i_s\big)\\ &= \sum_{k=0}^{m}p_{sk}\bar F\big(u(1+i_k)\big),\end{aligned} \tag{۱۳}$$

و اثبات کامل می‌شود. □

در بخش پنجم با ارائه مثال عددی احتمالات ورشکستگی به‌دست‌آمده در قضیه ۱ با احتمالات ورشکستگی در مدل مخاطره انفرادی کلاسیک در بازیاری (۲۰۲۲) برای توزیع‌های پارتو و لاگ نرمال[11] به‌عنوان توزیع‌های دم‌سنگین مقایسه می‌شوند.

۴ کران‌های بالای احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی

در این بخش، با استفاده از روش استقراء کران‌های بالای احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی برای توزیع‌های دم سبک محاسبه می‌شوند.

قضیهٔ ۱.۴. *فرض کنید $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی و هم‌توزیع با تابع توزیع مشترک $F(x)$ باشند. آنگاه برای هر $x \geq 0$، نامساوی*

$$\bar{F}(x) \leq \Big(\inf_{k\geq 0} \frac{\int_k^\infty e^{R_0 w} dF(w)}{e^{R_0 k}\bar{F}(k)}\Big)^{-1} e^{-R_0 x},$$

برقرار می‌باشد.

اثبات. تابع $\bar{F}(x)$ به‌صورت تساوی

$$\bar{F}(x) = \Big(\frac{\int_x^\infty e^{R_0 w} dF(w)}{e^{R_0 x}\bar{F}(x)}\Big)^{-1} e^{-R_0 x} \int_x^\infty e^{R_0 w} dF(w),$$

نوشته می‌شود و با توجه به نامساوی

$$\begin{aligned}
\bar{F}(x) &\leq \Big(\inf_{k\geq 0} \frac{\int_k^\infty e^{R_0 w} dF(w)}{e^{R_0 k}\bar{F}(k)}\Big)^{-1} e^{-R_0 w} \int_x^\infty e^{R_0 w} dF(w) \\
&\leq \Big(\inf_{k\geq 0} \frac{\int_k^\infty e^{R_0 w} dF(w)}{e^{R_0 k}\bar{F}(k)}\Big)^{-1} e^{-R_0 x} \int_{-\infty}^\infty e^{R_0 w} dF(w) \\
&= \Big(\inf_{k\geq 0} \frac{\int_k^\infty e^{R_0 w} dF(w)}{e^{R_0 k}\bar{F}(k)}\Big)^{-1} e^{-R_0 x},
\end{aligned}$$

قضیه اثبات می‌شود. □

قضیهٔ ۲.۴. *فرض کنید اندازه‌های خسارت دارای توزیع دم سبک باشند. آنگاه برای $R_0 > 0$ داده شده در رابطه (۸) و $u \geq 0$ تساوی*

$$\begin{aligned}
\psi(u, i_s) &= \Big(\inf_{k\geq 0} \frac{\int_k^\infty e^{R_0 w} dF(x)}{e^{R_0 k}\bar{F}(k)}\Big)^{-1} \\
&\quad \times E\big(e^{-R_0 u(1+I_1)} | I_0 = i_s\big), \qquad (14)
\end{aligned}$$

برقرار است.

اثبات. برای اثبات این قضیه، ابتدا با کمک روش استقراء کران بالایی برای احتمال ورشکستگی زمان متناهی $\psi_n(u, i_s)$ محاسبه می‌شود. با توجه قضیه ۲ و بنا به‌تساوی (۳)، برای هر $u \geq 0$ مقدار $\psi_1(u, i_s)$ در نامساوی

$$\begin{aligned}
\psi_1(u, i_s) &\leq \Big(\inf_{k\geq 0} \frac{\int_k^\infty e^{R_0 w} dF(x)}{e^{R_0 k}\bar{F}(k)}\Big)^{-1} \sum_{k=0}^{m} p_{sk} e^{-R_0 u(1+i_k)} \\
&= \Big(\inf_{k\geq 0} \frac{\int_k^\infty e^{R_0 w} dF(x)}{e^{R_0 k}\bar{F}(k)}\Big)^{-1} E\big(e^{-R_0 u(1+I_1)} | I_0 = i_s\big),
\end{aligned}$$

صدق می‌کند. فرض کنید برای هر $u \geq 0$ و $i_s \geq 0$ نامساوی

$$\begin{aligned}
\psi_n(u, i_s) &\leq \Big(\inf_{k\geq 0} \frac{\int_k^\infty e^{R_0 w} dF(x)}{e^{R_0 k}\bar{F}(k)}\Big)^{-1} \\
&\quad \times E\big(e^{-R_0 u(1+I_1)} | I_0 = i_s\big), \qquad (15)
\end{aligned}$$

برقرار باشد. حال ثابت می‌شود که نامساوی برای $\psi_{n+1}(u, i_s)$ نیز برقرار است. با توجه به نامساوی (۱۵)، برای $x \leq u(1+i_k)$ نامساوی

$$\begin{aligned}
\psi_n(u(1+i_k) - x, i_s) &\leq \Big(\inf_{k\geq 0} \frac{\int_k^\infty e^{R_0 w} dF(x)}{e^{R_0 k}\bar{F}(k)}\Big)^{-1} \\
&\quad \times E\big(e^{-R_0 u(1+I_1)} | I_0 = i_s\big) \\
&\leq \Big(\inf_{k\geq 0} \frac{\int_k^\infty e^{R_0 w} dF(x)}{e^{R_0 k}\bar{F}(k)}\Big)^{-1} \\
&\quad \times e^{-R_0 \left(u(1+i_k) - x\right)}, \qquad (16)
\end{aligned}$$

به دست می‌آید. آنگاه بنا به‌تساوی (۹) و نامساوی (۱۶)، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
\psi_{n+1}(u, i_s) &\leq \Big(\inf_{k\geq 0} \frac{\int_k^\infty e^{R_0 x} dF(x)}{e^{R_0 k}\bar{F}(k)}\Big)^{-1} \\
&\quad \times \sum_{k=0}^{m} p_{sk} e^{-R_0 u(1+i_k)} \\
&= \Big(\inf_{k\geq 0} \frac{\int_k^\infty e^{R_0 x} dF(x)}{e^{R_0 k}\bar{F}(k)}\Big)^{-1} \\
&\quad \times E\big(e^{-R_0 u(1+I_1)} | I_0 = i_s\big).
\end{aligned}$$

بنابراین در نامساوی (۱۵) اگر $n \to \infty$، آنگاه رابطه (۱۴) به دست می‌آید و قضیه اثبات می‌شود. □

قضیهٔ ۳.۴. *فرض کنید در رابطه (۸)، $R_0 > 0$ و $u \geq 0$ باشد، آنگاه نامساوی*

$$\Big(\inf_{k\geq 0} \frac{\int_k^\infty e^{R_0 x} dF(x)}{e^{R_0 k}\bar{F}(k)}\Big)^{-1} E\big(e^{-R_0 u(1+I_1)} | I_0 = i_s\big) \leq e^{-R_0 x}, \qquad (17)$$

برقرار است؛ به‌عبارت‌دیگر کران بالای احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی به‌دست‌آمده در قضیه ۳ کمتر یا مساوی کران لاندبرگ است.

[11] Pareto and Log-normal distributions

اثبات. چون برای هر $t \geq ۰$، نامساوی

$$\frac{\int_k^\infty e^{R_\circ w} dF(w)}{e^{R_\circ k}\bar{F}(k)} \geq \frac{e^{R_\circ k}\int_k^\infty dF(w)}{e^{R_\circ k}\bar{F}(k)} = ۱,$$

برقرار است، بنابراین $۱ \leq \left(\inf_{k\geq ۰} \frac{\int_k^\infty e^{R_\circ w} dF(w)}{e^{R_\circ k}\bar{F}(k)}\right)^{-۱} \leq ۰$ و در نتیجه نامساوی داده شده در (۱۷) کاملاً بدیهی خواهد شد. □

توجه شود که اگر در مدل مخاطره انفرادی (۱) نرخ‌های بهره مساوی صفر باشند، یعنی برای هر $n = ۰,۱,\ldots$، $I_n = ۰$ باشد، آنگاه کران بالای داده شده در قضیه ۳ به $\left(\inf_{k\geq ۰} \frac{\int_k^\infty e^{R_\circ x} dF(x)}{e^{R_\circ k}\bar{F}(k)}\right)^{-۱} e^{-R_\circ u}$ تبدیل‌شده و چون $۱ \leq \left(\inf_{k\geq ۰} \frac{\int_k^\infty e^{R_\circ w} dF(w)}{e^{R_\circ k}\bar{F}(k)}\right)^{-۱} \leq ۰$ پس نامساوی (۱۷) به دست می‌آید.

۵ مثال‌های عددی

در این بخش، مثال‌های عددی برای بیان نتایج ارائه‌شده‌اند. در مثال ۱ احتمالات ورشکستگی به‌دست‌آمده در قضیه ۱ با احتمالات ورشکستگی برای مدل مخاطره انفرادی کلاسیک با توزیع‌های دم‌سنگین در بازیاری (۲۰۲۲) مقایسه می‌شوند.

مثال ۱. در این مثال، توزیع‌های پارتو و لاگ نرمال به‌عنوان توزیع‌های متغیرهای تصادفی اندازه‌های خسارت در نظر گرفته‌شده‌اند. فرض کنید در فرآیند مخاطره انفرادی رابطه (۱)، متغیرهای تصادفی اندازه خسارت دارای توزیع دم‌سنگین پارتو $Pareto(۳,۵)$ بوده و فرآیند دارای ۳ حالت $i_۰, i_۱, i_۲$ با مقادیر $i_۰ = ۵$، $i_۱ = ۶$ و $i_۲ = ۸$ باشد. همچنین ماتریس احتمال انتقال به‌صورت

$$P = \begin{bmatrix} ۰/۴ & ۰/۵ & ۰/۱ \\ ۰/۱۵ & ۰/۷ & ۰/۱۵ \\ ۰/۲ & ۰/۴ & ۰/۴ \end{bmatrix}, \qquad (۱۸)$$

باشد. احتمالات ورشکستگی برای حالتی که مدل مخاطره دارای ماتریس احتمال انتقال (۱۸) و نیز برای وقتی که مدل مخاطره بدون ماتریس احتمال انتقال باشد، محاسبه‌شده‌اند. با توجه به فرمول‌های (۹) و (۱۰) داده شده در بازیاری (۲۰۲۲) مقادیر احتمالات ورشکستگی زمان متناهی و نامتناهی برای مقادیر مختلف سرمایه اولیه در زمان‌های متفاوت محاسبه و همچنین مقادیر برخی از احتمالات ورشکستگی در زمان متناهی و نامتناهی با توجه به قضیه ۱ محاسبه و نتایج در جداول ۱ و ۲ ارائه‌شده‌اند.

همچنین وقتی‌که متغیرهای تصادفی اندازه خسارت دارای توزیع دم‌سنگین لاگ نرمال $Log-normal(۲,۰/۵)$ بوده و نیز مجدداً فرآیند دارای همان ۳ حالت با مقادیر $i_۰ = ۲$، $i_۱ = ۳$ و $i_۲ = ۴$ باشد. همچنین ماتریس احتمال انتقال به‌صورت

$$P = \begin{bmatrix} ۰/۳ & ۰/۵ & ۰/۲ \\ ۰/۴ & ۰/۲ & ۰/۴ \\ ۰/۲ & ۰/۵ & ۰/۳ \end{bmatrix}, \qquad (۱۹)$$

باشد، مقادیر احتمالات ورشکستگی محاسبه‌شده و نتایج در جداول ۳ و ۴ گزارش داده‌شده‌اند. آنچه از نتایج استنباط می‌شود این است که برای هر دو نوع توزیع دم‌سنگین و برای هر مقدار از سرمایه اولیه و زمان داده شده، مقدار احتمال ورشکستگی برای فرآیند با ماتریس‌های احتمال انتقال داده شده در (۱۸) و (۱۹)، کمتر از وقتی است که این ماتریس‌های انتقال در فرآیند مخاطره در نظر گرفته نشده‌اند.

جدول ۱. احتمال ورشکستگی زمان متناهی برای توزیع پارتو $Pareto(۳,۵)$

u	۰	۱۰	۲۰	۲۵	۳۰
n	۱	۳	۵	۱۰	۲۰
احتمال ورشکستگی با ماتریس احتمال انتقال	۰/۶۲۷	۰/۴۸۵	۰/۳۵۱	۰/۲۸۲	۰/۱۵۴
احتمال ورشکستگی بدون ماتریس احتمال انتقال	۰/۶۸۶	۰/۵۷۹	۰/۴۱۱	۰/۳۸۲	۰/۲۷۵

جدول ۲. احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی برای توزیع پارتو $Pareto(۳,۵)$

u	۰	۱۰	۲۰	۲۵	۳۰
احتمال ورشکستگی با ماتریس احتمال انتقال	۰/۷۵۴	۰/۵۳۱	۰/۴۶۰	۰/۳۹۲	۰/۳۰۵
احتمال ورشکستگی بدون ماتریس احتمال انتقال	۰/۸۲۹	۰/۶۲۲	۰/۵۰۲	۰/۴۳۵	۰/۳۳۸

جدول ۳. احتمال ورشکستگی زمان متناهی برای توزیع پارتو $Log-normal(۲, ۰/۵)$

u	۰	۱۰	۲۰	۲۵	۳۰
n	۱	۳	۵	۱۰	۲۰
احتمال ورشکستگی با ماتریس احتمال انتقال	۰/۵۸۶	۰/۴۷۳	۰/۳۱۱	۰/۱۸۹	۰/۰۶۷
احتمال ورشکستگی بدون ماتریس احتمال انتقال	۰/۶۲۰	۰/۵۴۱	۰/۳۸۶	۰/۲۷۹	۰/۱۷۵

جدول ۴. احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی برای توزیع پارتو $Log-normal(۲, ۰/۵)$

u	۰	۱۰	۲۰	۲۵	۳۰
احتمال ورشکستگی با ماتریس احتمال انتقال	۰/۶۳۹	۰/۵۲۵	۰/۴۰۶	۰/۲۸۷	۰/۱۹۵
احتمال ورشکستگی بدون ماتریس احتمال انتقال	۰/۶۹۵	۰/۵۸۲	۰/۴۷۲	۰/۳۳۷	۰/۲۴۰

در مثال ۲، کران‌های بالای به‌دست‌آمده برای احتمالات ورشکستگی زمان نامتناهی برای اندازه خسارت دارای توزیع دم سبک با مقادیر کران لاندبرگ مقایسه می‌شوند.

مثال ۲. در این مثال، دو نوع توزیع نمایی برای متغیرهای تصادفی اندازه خسارت در نظر گرفته‌شده است. کران‌های بالای به‌دست‌آمده برای احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی با خسارت‌های دارای توزیع دم سبک با مقادیر کران لاندبرگ مقایسه می‌شوند. ابتدا فرض کنید در فرآیند مخاطره انفرادی (۱)، متغیرهای تصادفی اندازه خسارت دارای توزیع دم سبک نمایی $E(۳)$ بوده و فرآیند دارای ۳ حالت $i_۰, i_۱, i_۲$ با مقادیر ۵ $= i_۰$، ۶ $= i_۱$ و ۸ $= i_۲$ با ماتریس احتمال انتقال داده شده در (۱۸) باشد. برخی از کران‌های بالای احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی برای حالتی که مدل مخاطره دارای ماتریس احتمال انتقال (۱۸) و نیز کران‌های بالای لاندبرگ برای مدل مخاطره بدون ماتریس احتمال انتقال طبق نامساوی (۷) برای $n = ۲۰۰$ محاسبه‌شده‌اند. طبق رابطه (۸) مقدار $R_۰ = ۰/۰۴۷۵۱$ به دست می‌آید. کران بالای احتمالات ورشکستگی $\psi(u, i_۱)$، $\psi(u, i_۲)$ و $\psi(u, i_۳)$ با استفاده از نامساوی (۱۴) برای مقادیر مختلف سرمایه اولیه به‌دست‌آمده‌اند و نتایج در جدول ۵ آورده شده‌اند.

جدول ۵. احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی برای توزیع نمایی $E(۳)$

u	۰	۱۰	۲۰	۲۵	۳۰
کران بالای $\psi(u, i_۱)$	۰/۴۳۵	۰/۳۸۱	۰/۳۳۰	۰/۲۶۲	۰/۱۸۸
کران بالای $\psi(u, i_۲)$	۰/۴۸۴	۰/۴۴۶	۰/۳۹۲	۰/۳۱۵	۰/۲۲۴
کران بالای $\psi(u, i_۳)$	۰/۵۲۶	۰/۴۷۷	۰/۴۲۳	۰/۳۴۸	۰/۲۹۵
کران لاندبرگ	۰/۷۲۷	۰/۵۹۴	۰/۴۸۱	۰/۳۶۵	۰/۳۳۲

همچنین وقتی متغیرهای تصادفی اندازه خسارت دارای توزیع دم سبک نمایی $E(۱۰)$ بوده و نیز مجدداً فرآیند دارای همان ۳ حالت $i_۰, i_۱, i_۲$ با مقادیر ۲ $= i_۰$، ۳ $= i_۱$ و ۴ $= i_۲$ باشد. همچنین ماتریس احتمال انتقال به‌صورت داده شده در (۱۹) باشد. برخی از کران‌های بالای احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی برای حالتی که مدل مخاطره دارای ماتریس احتمال انتقال (۱۹) و نیز کران‌های بالای لاندبرگ برای مدل مخاطره بدون ماتریس احتمال انتقال طبق نامساوی (۷) برای $n = ۲۰۰$ محاسبه‌شده‌اند. برای این توزیع، طبق رابطه (۸) مقدار $R_۰ = ۰/۰۹۵۳۶$ به دست می‌آید. کران‌های بالای احتمالات ورشکستگی زمان نامتناهی محاسبه و نتایج در جدول ۶ گزارش داده‌شده‌اند.

جدول ۶. احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی برای توزیع نمایی $E(۱۰)$

u	۰	۱۰	۲۰	۲۵	۳۰
کران بالای $\psi(u, i_۱)$	۰/۵۵۴	۰/۴۳۰	۰/۳۸۲	۰/۳۱۵	۰/۲۷۶
کران بالای $\psi(u, i_۲)$	۰/۵۸۰	۰/۵۱۴	۰/۴۷۶	۰/۴۲۵	۰/۳۴۲
کران بالای $\psi(u, i_۳)$	۰/۶۳۳	۰/۵۸۵	۰/۵۳۷	۰/۴۷۰	۰/۴۱۳
کران لاندبرگ	۱	۰/۷۶۴	۰/۶۲۲	۰/۴۸۵	۰/۴۳۸

آنچه از جداول ۵ و ۶ استنباط می‌شود این است که برای هر دو نوع توزیع نمایی و برای هر مقدار از سرمایه اولیه، کران‌های بالای احتمالات ورشکستگی زمان نامتناهی کمتر از کران لاندبرگ هستند.

۶ بحث و نتیجه‌گیری

برای محاسبه احتمالات ورشکستگی یک شرکت بیمه علاوه بر تعیین نوع مدل، دانستن توزیع آماری اندازه‌های خسارت دارای اهمیت است. روش‌های مختلفی برای محاسبه دقیق یا تقریبی این احتمالات توسط برخی از نویسندگان پیشنهاد شده است. در مقاله حاضر، مدل مخاطره انفرادی شرکت بیمه با نرخ‌های بهره متفاوت در یک دوره زمانی و دارای ماتریس احتمال انتقال باحالت متناهی در نظر گرفته شد. در قضیه ۱، احتمالات ورشکستگی زمان متناهی و نامتناهی محاسبه گردید. در قضیه ۳، با استفاده از روش استقراء کران‌های بالای احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی برای توزیع‌های دم سبک محاسبه شدند. در قضیه ۴، نشان داده شد که کران بالای احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی به‌دست‌آمده در قضیه ۳ کمتر یا مساوی کران لاندبرگ است. همچنین نتایج به‌دست‌آمده با مثال‌های عددی موردبررسی قرار گرفتند. در مثال ۱، توزیع‌های پارتو و لاگ نرمال به‌عنوان توزیع‌های دم‌سنگین برای متغیرهای اندازه خسارت در نظر گرفته شد و احتمالات ورشکستگی زمان متناهی و نامتناهی با احتمالات به‌دست‌آمده در بازیاری (۲۰۲۲) برای مدل مخاطره انفرادی کلاسیک مقایسه شدند. همچنین احتمالات ورشکستگی زمان نامتناهی برای دو نوع توزیع نمایی به‌عنوان توزیع‌های دم سبک با مقادیر کران لاندبرگ مقایسه شدند. با توجه به فرضیات مدل، روش ارائه‌شده در این مقاله منجر به یافتن کران‌هایی برای احتمالات ورشکستگی زمان نامتناهی گردید که از کران لاندبرگ کوچک‌تر هستند.

۷ تقدیر و تشکر

نویسنده از سردبیر محترم نشریه و داوران محترم به خاطر نظرات ارزشمندشان در بهبود مقاله، تشکر و قدردانی می‌کند.

مراجع

[۱] بازیاری، ا.، (۱۳۹۶)، تحلیل احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی در مدل مخاطره جمعی، مجله علوم آماری، جلد ۱۱، شماره ۱، ۳۶-۱۷.

[۲] بازیاری، ا.، (a۱۴۰۱)، احتمال ورشکستگی زمان متناهی در مدل مخاطره جمعی شرکت بیمه با استفاده از زنجیر مارکوف زمان-پیوسته، مجله پژوهش‌های ریاضی، جلد ۹، شماره ۴، ۴۸-۲۴.

[۳] بازیاری، ا.، (b۱۴۰۱)، کران لاندبرگ برای محاسبه احتمالات ورشکستگی و توابع چگالی متغیرهای تصادفی خسارت‌ها، نشریه اندیشه آماری، جلد ۲۷، شماره ۱، ۱۰-۱.

[4] Asmussen, S., and Albrecher, H. (2010), Ruin Probabilities, Hackensack: World Scientific.

[5] Bernackaitė, E., and Šiaulys, J., (2017), The finite-time ruin probability for an inhomogeneous renewal risk model, *American institute of mathematical sciences*, **13(1)**, 207–222.

[6] Bazyari, A. (2023a), On the ruin probabilities for a general perturbed renewal risk process, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **277**, 1–17.

[7] Bazyari, A. (2023b), On the ruin probabilities in a discrete time insurance risk process with capital injections and reinsurance, *Sankhya A: The Indian Journal of Statistics*, **85(2)**, 1623–1650.

[8] Bazyari, A. (2022), Ruin probabilities for two risk models with asymptotically independent and dependent classes, *Journal of the Iranian Statistical Society, JIRSS*, **21(2)**, 165–196.

[9] Burnecki, K., Mista, P. and Weron, A. (2005), What is the best approximation of ruin probability in infinite time?, *Applicationes Mathematicae*, **32(2)**, 155–176.

[10] Choi, S. K., Choi, M. H., Lee, H. S. and Lee, E. Y. (2010), New approximations of ruin probability in a risk process, *Quality Technology and Quantitative Management*, **7(4)**, 377–383.

[11] Cramer, H. (1930), On the Mathematical Theory of Risk, Skandia Jubilee Volume, Stockholm.

[12] De Vylder, F. E., (1996), Advance Risk Theory, Edition de I'University de ruxelles.

[13] Dong, X. T., Huy, T. N. and Kirane, M. (2018), Regularization and error estimate of infinite time ruin probabilities for Cramer–Lundberg model, *Mathematical Methods in Applied Sciences*, **41(10)**, 3820–3831.

[14] Eryilmaz, S. and Gebizlioglu, O. L., (2017), Computing finite time non-ruin probability and some joint distributions in discrete time risk model with exchangeable claim occurrences, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **313**, 235–242.

[15] Lundberg, F., I. (1903), Approximerad Framstallning av Sannohkhetsfunktionen. II. Aterforsakering av Kollektivrisker, Almqvist and Wiksell, Uppsala.

[16] Ignatov, Z. G. and Kaishev, V. K., (2004), A finite-time ruin probability formula for continuous claim severities, *Journal of Applied Probability*, **41(2)**, 570–578.

[17] Ignatov, Z. G., Kaishev, V. K. and R. S. Krachunov, (2001), An improved finite-time ruin probability formula and its Mathematica implementation, *Insurance: Mathematics and Economics*, **29(3)**, 375–386.

[18] Lee, W. Y., Li, X., Liu, F., Shi, Y. and Yam, S. C. P., (2021), A Fourier-cosine method for finite-time ruin probabilities, *Insurance: Mathematics and Economics*, Forthcoming.

[19] Leipus, R. and Šiaulys, J., (2009), Asymptotic behaviour of the finite-time ruin probability in renewal risk models, *Applied Stochastic Models in Bussines and Industry*, **25**, 309–321.

[20] Liu, R., Wang, D. and Guo, F., (2018), The ruin probabilities of a discrete time risk model with one-sided linear claim sizes and dependent risks, *Communications in Statistics–Theory and Methods*, **47(7)**, 1529–1550.

[21] Li, S., Lu, Y., Garrido, J. (2009), A review of discrete-time risk models, *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas*, **103(2)**, 321–337.

[22] Lu, Yi and Li, S., (2005), On the probability of ruin in a Markov-modulated risk model, *Insurance: Mathematics and Economics*, **37**, 522–532.

[23] Santana, D., González, J., and Rincón, L. (2017), Approximations of the ultimate ruin probability in a risk process using Erlang mixtures, *Methodology and Computing in Applied Probability*, **19(3)**, 775–798.

[24] Wang, Y., Cui, Z., Wang, K. and Ma, X., (2012), Uniform asymptotics of the finite-time ruin probability for all times, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **390(1)**, 208–223.

[25] Yang, Y., Ma, X. and Lin, J. G., (2011), Approximation for the finite-time ruin probability of a general risk model with constant interest rate and extended negatively dependent heavy-tailed claims, *Mathematical Problems in Engineering*, 1–14.

[26] Yuen, K. C., Li, J. and Wu, R. (2013), On a discrete-time risk model with delayed claims and dividends, *Financial Derivatives and Risk Models*, **4(1)**, 3–16.

Ruin Probabilities in the Insurance Individual Risk Model with Probability Transition Matrix of Interest Rate

Abouzar Bazyari[1]

Abstract:

Insurance companies are modeled with mathematical and statistical models in terms of their random structure. In this paper, the individual risk model of insurance company with different interest rates in a period of time is considered and assumed that the interest rates have the probability transition matrix with finite and countable state. The finite and infinite time ruin probabilities are computed using the conditional probability on the first claim of density function. Moreover, the upper bounds for the infinite time ruin probability are obtained using the mathematical induction. In the numerical examples, the ruin probabilities for heavy tailed distributions are compared with the obtained probabilities in Bazyari (2022) for the classical individual risk model and also, the infinite time ruin probabilities for light tailed distributions are compared with Lundberg's inequality. The results show that the existence of interest rate with probability transition matrix and having finite state leads to decrease the ruin probabilities.

Keywords: Conditional probability, Lundberg inequality, Pareto distribution, Probability transition matrix, Ruin probability.

[1] **Department of Statistics, Faculty of Intelligent Systems Engineering and Data Science, Persian Gulf University, Bushehr, Iran**