استنباط بیزی برای خانواده توزیع‌های تعمیم‌یافته وایبول مارشال-اولکین

ناهید سنجری فارسی پور [۱]، بهرام طارمی [۲]، زهرا معمار کاشانی [۳]

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۵/۱۳

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۱۰/۲۳

چکیده:

مارشال و اولکین خانواده‌ای از توزیع‌ها را معرفی کردند که با اضافه کردن یک پارامتر به توزیع‌های دیگر به دست می‌آید. سانتوز-نتو و همکاران مطالعه روی خانواده توزیع‌های تعمیم‌یافته وایبول را انجام دادند. در این مقاله دو توزیع ریلی و پارتو تعمیم‌یافته وایبول موردمطالعه قرارگرفته، مطالب گوناگون مانند گشتاورها و استنباط بیزی تحت تابع زیان‌های مختلف ازجمله مربع خطا، آنتروپی، لاینکس، مربع خطا در لگاریتم و لاینکس اصلاح‌شده را موردبحث قرار داده‌ایم. همچنین روش زنجیره مارکوف مونت‌کارلو برای این دو توزیع موردمطالعه قرارگرفته‌اند.

واژه‌های کلیدی: تابع بقا، تابع زیان، تابع مخاطره، توزیع ریلی، توزیع پارتو، روش زنجیره مارکوف مونت‌کارلو

۱ مقدمه

مارشال و اولکین در سال ۱۹۹۷ روش مهمی را برای قرار دادن یک پارامتر شکل اضافی به یک مدل پایه به دست آوردند و بدین ترتیب یک توزیع تعمیم‌یافته تعریف کردند. تبدیل مارشال و اولکین یک دامنه وسیع از رفتارها برحسب توزیع پایه را شامل گردید. ویژگی‌های هندسی و استنتاجی متناسب با توزیع جدید تولیدشده بستگی به مقدار پارامتر اضافی دارد.

فرض کنید X یک متغیر تصادفی با توزیع مارشال- اولکین باشد، آنگاه تابع بقا آن به‌صورت زیر داده می‌شود:

$$\bar{F}(x)=\frac{\delta\bar{G}(x)}{1-\bar{\delta}\bar{G}(x)},\quad x\in X\subseteq\mathbb{R},\delta>0 \tag{1}$$

که $\bar{F}(x)$ تابع بقا می‌باشد ($\bar{F}(x)=1-F(x)$) و $\bar{G}(x)$ تابع بقا توزیع پایه است ($\bar{G}(x)=1-G(x)$)، همچنین $\bar{\delta}=1-\delta$ که $\delta>0$ است. واضح است که اگر $\delta=1$ آنگاه $\bar{F}(x)=\bar{G}(x)$ است. خانواده توزیع‌های مارشال اولکین (۱) دارای تابع چگالی احتمال

$$f(x;\delta)=\frac{\delta g(x)}{\{1-\bar{\delta}\bar{G}(x)\}^2},\ x\in X\subseteq\mathbb{R},\delta>0$$

است که $g(x)$ تابع چگالی احتمال توزیع پایه است. همچنین تابع نرخ مخاطره به‌صورت زیر است:

$$\tau(x;\delta)=\frac{g(x)}{\bar{G}(x)[1-\bar{\delta}\bar{G}(x)]},\ x\in X\subseteq\mathbb{R},\delta>0$$

توزیع وایبول یک نقش اساسی در مدل‌بندی آماری برای داده‌های اعتمادپذیری، مهندسی و مطالعات زیست‌شناسی دارد. این مدل به‌طور خیلی مفید برای توضیح نرخ‌های مخاطره بکارگرفته می‌شود، چندی بعد فرم تعمیم‌یافته مدل وایبول در بسیاری از رشته کاربردی مورداستفاده قرارگرفت. کلاس توزیع‌های وایبول تعمیم‌یافته که توسط [۳] ارائه شد در مدل‌های زمان زندگی کاربرد فراوانی دارد. تابع وایبول تعمیم‌یافته به‌صورت رابطه (۲) است:

$$G(x;\alpha,\xi)=1-exp[-\alpha H(x;\xi)],\quad x\in D\subseteq\mathbb{R}_+,\alpha>0 \tag{2}$$

که $H(x;\xi)$ یک تابع غیر منفی افزایشی است که به پارامتر ξ بستگی دارد. تابع چگالی متناظر با این توزیع به‌صورت (۳) است:

$$g(x;\alpha,\xi)=\alpha exp[-\alpha H(x;\xi)]h(x;\xi) \tag{3}$$

که $h(x;\xi)$ مشتق $H(x;\xi)$ برحسب x است. $H(x;\xi)$های گوناگون مدل‌های مهمی را ارائه می‌دهند. برای مثال:

الف) $H(x;\xi)=x^2$ به توزیع ریلی (بر نوع ۱۰) منجر می‌شود.

ب) $H(x;\xi)=log(x/k)$ توزیع پارتو را نتیجه می‌دهد.

در این مقاله، ما یک خانواده جدید از توزیع‌ها با ترکیب کلاس توزیع‌های مارشال-اولکین و وایبول تعمیم‌یافته برای توزیع‌های ریلی و پارتو موردمطالعه قرار می‌گیرند و استنباط آماری و استنباط بیزی برای آن‌ها موردبحث قرار می‌گیرند.

[۱] گروه آمار، دانشکده ریاضی، دانشگاه الزهرا، تهران (نویسنده مسئول: nsanjari@alzahra.ac.ir)

[۲] بخش آمار، دانشکده علوم، دانشگاه شیراز، شیراز

[۳] گروه آمار، دانشکده ریاضی، دانشگاه الزهرا، تهران

۱.۱ خانواده توزیع‌های مارشال اولکین وایبول تعمیم‌یافته

تابع توزیع خانواده جدید توزیع‌ها به‌صورت

$$F(x;\delta,\alpha,\xi)=\frac{\delta(1-exp[-\alpha H(x;\xi)])}{1-\bar{\delta}exp[-\alpha H(x;\xi)]} \qquad (۴)$$

که $\alpha > 0$ و $\delta > 0$ با استفاده از معادله (۴) تابع بقا این توزیع جدید به‌صورت زیر است:

$$\bar{F}(x;\delta,\alpha,\xi)=\frac{\delta exp[-\alpha H(x;\xi)]}{1-\bar{\delta}exp[-\alpha H(x;\xi)]} \qquad (۵)$$

تابع نرخ مخاطره به‌صورت معادله (۶) است

$$\tau(x;\delta,\alpha,\xi)=\frac{\alpha h(x;\xi)}{1-\bar{\delta}exp[-\alpha H(x;\xi)]} \qquad (۶)$$

همچنین تابع چگالی احتمال آن به شرح زیر می‌باشد

$$f(x;\delta,\alpha,\xi)=\frac{\delta\alpha h(x;\xi)exp[-\alpha H(x;\xi)]}{\{1-\bar{\delta}exp[-\alpha H(x;\xi)]\}^2} \qquad (۷)$$

که $H(x;\xi)$ برای توزیع‌های خاص در جدول (۱) آورده شده است:

جدول ۱. برای توزیع‌های خاص $H(x;\xi)$

توزیع	$H(x;\xi)$	ξ
ریلی	x^2	–
پارتو	$log(x/k)$	k
نمایی	x	–
نمایی توانی	$exp[(\lambda x)^\beta]-1$	(λ,β)
بور نوع ۱۲	$log(1+x^c)$	c
وایبول	x^γ	γ
وایبول اصلاح‌شده	$x^\gamma exp(\lambda x)$	(γ,λ)
وایبول تعمیم‌یافته	$\lambda[exp(\lambda x)^\beta-1]$	(λ,β)
وایبول نمایی شده	$\alpha^{\gamma-1}x^\gamma$	γ

۲.۱ بسط‌هایی برای فرم تابع چگالی

می‌دانیم که به ازای هر حقیقی مثبت α و $|z| < 1$، یک بسط دوجمله‌ای تعمیم‌یافته خواهیم داشت

$$(1-z)^\alpha=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k}{k!}z^k \qquad (۸)$$

که در آن $(a)_k=\Gamma(a+k)/\Gamma(a)=a(a+1)...(a+k-1)$ و $\Gamma(0)$ تابع گاما می‌باشد. با به‌کارگیری رابطه بالا برای $0 \le \delta \le 1$ و جایگذاری در مخرج رابطه (۷) داریم:

$$\{1-\bar{\delta}exp[-\alpha H(x;\xi)]\}^2=\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)\bar{\delta}^j exp[-\alpha jH(x;\xi)] \qquad (۹)$$

بنابراین

$$f(x;\delta,\alpha,\xi)=\sum_{j=0}^{\infty}\eta_j\ g(x;(j+1)\alpha,\xi) \qquad (۱۰)$$

به دست می‌آید که در آن $\eta_j=\delta\bar{\delta}^j$ و $g(x;(j+1)\alpha,\xi)$ تابع چگالی توزیع وایبول تعمیم‌یافته با پارامترهای $(j+1)\alpha$ و ξ را نشان می‌دهد.

در غیر این صورت به ازای $\delta > 1$ داریم:

$|(1-\frac{1}{\delta})[1-exp(-\alpha H(x;\xi))]| < 1$؛ بنابراین داریم:

$$f(x;\delta,\alpha,\xi)=\frac{g(x;\alpha,\xi)}{\delta\{(1-\frac{1}{\delta})[1-exp(-\alpha H(x;\xi))]\}^2} \qquad (۱۱)$$

در این حالت، با دو بار به کاربردن بسط (۸) در رابطه (۱۱) خواهیم داشت:

$$f(x;\delta,\alpha,\xi)=\sum_{j=0}^{\infty}\nu_j\ g(x;(j+1)\alpha,\xi)$$

که در آن $\nu_j=\nu_j(\delta)=\frac{(-1)^j}{\delta(j+1)!}\sum_{k=j}^{\infty}(k+1)!(1-1/\delta)^k$.

بنابراین تابع چگالی خانواده مارشال اولکین وایبول تعمیم‌یافته می‌تواند به‌صورت یک ترکیب خطی نامتناهی از توزیع وایبول تعمیم‌یافته بیان شود.

در نهایت داریم: $f(x;\delta,\alpha,\xi)=\sum_{j=0}^{\infty}w_j\ g(x;(j+1)\alpha,\xi)$ که

$$w_j=\begin{cases}\eta_j & 0<\delta<0\\ \nu_j & \delta>1\end{cases} \qquad (۱۲)$$

و η_j و ν_j در عبارت‌های بالا آمده‌اند.

۳.۱ برآورد گشتاوری

فرض کنید $Y_j \sim EW((j+1)\alpha,\xi)$ نشان‌دهنده‌ی یک متغیر تصادفی با توزیع وایبول تعمیم‌یافته باشد که $g(y,(j+1)\alpha,\xi)$ تابع چگالی متناظر با آن باشد.

گشتاور n ام متغیر تصادفی به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$E(X^n)=\sum_{j=0}^{\infty}w_j\ E(Y_j^n) \qquad (۱۳)$$

تابع مولد گشتاور و k امین گشتاور ناقص متغیر تصادفی X به ترتیب زیر است:

$$M_X(t)=E(e^{tx})=\sum_{j=0}^{\infty}w_j\ M_j(t),$$

$$T_k(z)=E(e^{tx})=\sum_{j=0}^{\infty}w_j\ T_k^{(j)}(t)$$

که در آن $M_X(t)$ تابع مولد گشتاور Y_j و عبارت زیر

$$T_k^{(j)}(z)=\int_{-\infty}^{z} x^k\; g(x;(j+۱)\alpha,\xi)\;dx$$

مستقیماً از توزیع مارشال اولکین وایبول تعمیم‌یافته حاصل می‌شود.

۴.۱ برآورد

در این بخش یک روند عمومی برای برآورد پارامترهای مارشال اولکین وایبول تعمیم‌یافته از یک نمونه n تایی ارائه می‌دهیم. فرض کنید $x_۱,x_۲,\dots,x_n$ یک نمونه n تایی از متغیر تصادفی X باشد. تابع لگاریتم درست نمایی برای بردار پارامتری $\boldsymbol{\theta}=(\delta,\alpha,\xi^\top)^\top$ به‌صورت زیر است:

$\ell(\boldsymbol{\theta}) = nlog(\delta\alpha)+\sum_{i=۱}^{n} log[h(x_i;\xi)] - \alpha\sum_{i=۱}^{n} H(x_i;\xi) - ۲\sum_{i=۱}^{n} log\{۱-\bar{\delta}exp[-\alpha H(x_i;\xi)]$

با استفاده از تابع لگاریتم درستنمایی بالا، مؤلفه‌های بردار $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{\theta})=(U_\delta,U_\alpha,U_\xi^\top)^\top$ به‌صورت زیر حاصل می‌شوند:

$$\mathcal{U}_\delta(\boldsymbol{\theta})=\frac{\partial\ell(\theta)}{\partial\delta}=\frac{n}{\delta}-۲\sum_{i=۱}^{n}\frac{exp[-\alpha H(x_i;\xi)]}{۱-\bar{\delta}exp[-\alpha H(x_i;\xi)]}$$

$$\mathcal{U}_\alpha(\boldsymbol{\theta})=\frac{\partial\ell(\theta)}{\partial\alpha}=\frac{n}{\alpha}-\sum_{i=۱}^{n}H(x_i;\xi) - ۲\bar{\delta}\sum_{i=۱}^{n}\frac{H(x_i;\xi)\;exp[-\alpha H(x_i;\xi)]}{۱-\bar{\delta}exp[-\alpha H(x_i;\xi)]}$$

$$\mathcal{U}_{\xi_k}(\boldsymbol{\theta})=\frac{\partial\ell(\theta)}{\partial\xi_k}=\sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{h(x_i;\xi)}\frac{\partial h(x_i;\xi)}{\partial\xi_k}-\alpha\sum_{i=۱}^{n}\frac{\partial H(x_i;\xi)}{\partial\xi_k} - ۲\bar{\delta}\alpha\sum_{i=۱}^{n}\frac{\partial H(x_i;\xi)}{\partial\xi_k}\frac{exp[-\alpha H(x_i;\xi)]}{۱-\bar{\delta}exp[-\alpha H(x_i;\xi)]}$$

و در نهایت، ماتریس اطلاعات افراز شده برای خانواده مارشال اولکین وایبول تعمیم‌یافته عبارت است از

$$J(\boldsymbol{\theta})=-\begin{pmatrix}\mathcal{U}_{\delta\delta} & \mathcal{U}_{\delta\alpha} & | & \mathcal{U}_{\delta\xi}^\top\\ \mathcal{U}_{\alpha\delta} & \mathcal{U}_{\alpha\alpha} & | & \mathcal{U}_{\alpha\xi}^\top\\ -- & -- & -- & --\\ \mathcal{U}_{\xi\delta} & \mathcal{U}_{\xi\alpha} & | & \mathcal{U}_{\xi\xi}^\top\end{pmatrix}$$

که اعضای آن به‌صورت زیر هستند.

$$\mathcal{U}_{\delta\delta}(\boldsymbol{\theta})=-n\delta^{-۲},$$

$$\mathcal{U}_{\delta\alpha}(\boldsymbol{\theta})=۲\sum_{i=۱}^{n}\frac{[H(x_i;\xi)exp[-\alpha H(x_i;\xi)]}{\{۱-\bar{\delta}exp[-\alpha H(x_i;\xi)]\}^۲},$$

$$\mathcal{U}_{\delta\xi}(\boldsymbol{\theta})=۲\alpha\sum_{i=۱}^{n}\frac{\partial H(x_i;\xi)}{\partial\xi_k}\frac{exp[-\alpha H(x_i;\xi)]}{\{۱-\bar{\delta}exp[-\alpha H(x_i;\xi)]\}^۲},$$

$$\mathcal{U}_{\alpha\alpha}(\boldsymbol{\theta})=-\frac{n}{\alpha^۲}+۲\bar{\delta}\sum_{i=۱}^{n}\frac{H(x_i;\xi)^۲\;exp[-\alpha H(x_i;\xi)]}{\{۱-\bar{\delta}exp[-\alpha H(x_i;\xi)]\}^۲},$$

$$\mathcal{U}_{\alpha\xi}(\boldsymbol{\theta})=-۲\bar{\delta}\sum_{i=۱}^{n}\frac{\partial H(x_i;\xi)}{\partial\xi_k}\frac{exp[-\alpha H(x_i;\xi)]}{۱-\bar{\delta}exp[-\alpha H(x_i;\xi)]}\left[۱-\sum_{i=۱}^{n}\frac{\alpha H(x_i;\xi)}{۱-\bar{\delta}exp[-\alpha H(x_i;\xi)]}\right]+\sum_{i=۱}^{n}\frac{\partial H(x_i;\xi)}{\partial\xi_k},$$

$$\mathcal{U}_{\xi_k\xi_j}(\boldsymbol{\theta})=\sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{h(x_i;\xi)} * \left[\frac{\partial^۲ h(x_i;\xi)}{\partial\xi_k\xi_j}-\frac{۱}{h(x_i;\xi)}\frac{\partial h(x_i;\xi)}{\partial\xi_k}\frac{\partial h(x_i;\xi)}{\partial\xi_j}\right] - \alpha\sum_{i=۱}^{n}\frac{\partial^۲ h(x_i;\xi)}{\partial\xi_k\xi_j} - ۲\bar{\delta}\alpha\sum_{i=۱}^{n}\frac{exp[-\alpha H(x_i;\xi)]}{۱-\bar{\delta}exp[-\alpha H(x_i;\xi)]}$$

$$*\left[\frac{\partial^۲ H(x_i;\xi)}{\partial\xi_k\xi_j}-\frac{\partial H(x_i;\xi)}{\partial\xi_k}\frac{\alpha H(x_i;\xi)}{۱-\bar{\delta}exp[-\alpha H(x_i;\xi)]}\right].$$

هنگامی‌که شرایط منظم استاندارد برقرار باشد، می‌توان نشان داد که$\sqrt{n}([\hat{\alpha},\hat{\delta},\hat{\xi}]^\top-[\alpha,\delta,\xi]^\top)$ به توزیع نرمال چندمتغیره $N_{p+۲}(۰,K([\alpha,\delta,\xi])^{-۱})$میل می‌کند که p بعد ξ است و $K([\alpha,\delta,\xi])$ امید ریاضی ماتریس اطلاعات است که برای آن عبارت حدی $lim_{n\to\infty}J_n([\alpha,\delta,\xi])=K([\alpha,\delta,\xi])$ برقرار است.[۱]

بر اساس این مطلب ناحیه‌های اطمینان برای توزیع مارشال اولکین وایبول تعمیم‌یافته قابل‌دسترس است. برای بررسی اینکه δ از نظر آماری متفاوت از یک است به‌عبارت‌دیگر برای آزمون $H_۰:\delta=۱$ در مقابل $H_۱:\delta\neq۱$ ما از آماره $LR=۲l(\hat{\theta})-l(\tilde{\theta})$ استفاده می‌کنیم؛ که $\hat{\theta}$ برآورد بیشینه درستنمایی θ تحت $H_۱$ است و $\tilde{\theta}$ برآورد بیشینه درستنمایی تحت $H_۰$ است. توزیع حدی LR، توزیع $X_۱^۲$ است.

۵.۱ استنباط بیزی

برای برآورد بیزی دو برآورد لیندلی و زنجیره مارکوف مونت‌کارلو مورداستفاده قرارگرفته است.

برآورد لیندلی

برآورد لیندلی نشان داد که نسبت دو انتگرال $\frac{\int w(\boldsymbol{\theta})e^{L(\boldsymbol{\theta})}d\boldsymbol{\theta}}{\int \nu(\boldsymbol{\theta})e^{L(\boldsymbol{\theta})}d\boldsymbol{\theta}}$ را می‌توان طوری تقریب زد که قسمت حذف‌شده از مرتبه $o(n^{-2})$ و قسمت اصلی که برای تقریب استفاده می‌شود، $o(n^{-1})$ باشد. در این قسمت انتگرالی $\boldsymbol{\theta}=(\theta_1,\cdots,\theta_m)$ پارامتر و $L(\boldsymbol{\theta})$ لگاریتم تابع درستنمایی به‌صورت $L(\boldsymbol{\theta})=\sum logp(x_i|\theta)$ است و $x_1,\cdots,x_n$ یک نمونه تصادفی از چگالی $p(\cdot|\boldsymbol{\theta})$ است. قرار می‌دهیم $\nu(\boldsymbol{\theta})=\pi(\boldsymbol{\theta})$، که $\pi(\boldsymbol{\theta})$ تابع چگالی پیشین $\boldsymbol{\theta}$ است.[۵] بنابراین مخرج کسر نسبت نرمال کننده انتگرال در نظریه بیزی است و $W(\boldsymbol{\theta})=u(\boldsymbol{\theta})\pi(\boldsymbol{\theta})$ به‌طوری است که نسبت انتگرال تبدیل به $E(u((\theta)|x_1,\cdots,x_n)$ می‌شود. با قرار دادن $\rho((\theta))=log\pi((\theta))$ نسبت انتگرال تبدیل می‌شود به $\frac{\int u(\boldsymbol{\theta})e^{L(\boldsymbol{\theta})+\rho(\boldsymbol{\theta})}d\boldsymbol{\theta}}{\int e^{L(\boldsymbol{\theta})+\rho(\boldsymbol{\theta})}d\boldsymbol{\theta}}$ نسبت انتگرال جدید توسط لیندلی به‌صورت $\hat{u}+\frac{1}{2}\sum(\hat{u}_{ij}+2\hat{u}_i\hat{\rho}_i)\hat{\sigma}_{ij}+\frac{1}{2}\sum\hat{L}_{ijk}\hat{u}_l\hat{\sigma}_{ij}\hat{\sigma}_{kl}$ تخمین زده شد، بخش اول $o(1)$ است و بقیه بخش‌ها $o(n^{-1})$ هستند و

$$\hat{u}=u(\hat{\boldsymbol{\theta}})\qquad \hat{g}_i=g_i(\hat{\boldsymbol{\theta}})=\frac{\partial g}{\partial\theta_i}|_{\theta=\hat{\theta}}$$
$$\hat{g}_{ij}=g_{ij}(\hat{\boldsymbol{\theta}})=\frac{\partial^2 g}{\partial\theta_i\partial\theta_j}|_{\theta=\hat{\theta}}$$
$$\hat{g}_{ijk}=g_{ijk}(\hat{\boldsymbol{\theta}})=\frac{\partial^3 g}{\partial\theta_i\partial\theta_j\partial\theta_k}|_{\theta=\hat{\theta}}$$

که در آن $\hat{\boldsymbol{\theta}}=(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\cdots,\hat{\theta}_m)$ برآورد بیشینه درستنمایی $\boldsymbol{\theta}$ و $\hat{\sigma}_{ij}$ از رابطه ماتریسی $(\hat{\sigma}_{ij})=(-\hat{L}_{ij})$ به دست می‌آید؛ بنابراین

$$I(x)=E(u(\boldsymbol{\theta})|X=x)=\frac{\int u(\boldsymbol{\theta})e^{L(\boldsymbol{\theta})+\rho(\boldsymbol{\theta})}d\boldsymbol{\theta}}{\int e^{L(\boldsymbol{\theta})+\rho(\boldsymbol{\theta})}d\boldsymbol{\theta}} \qquad (۱۴)$$

اما در این معادله $\theta_1,\cdots,\theta_m$ مستقل هستند، بنابراین

$$\hat{\sigma}_{\theta_1\theta_2}=\cdots=\hat{\sigma}_{\theta_{m-1}\theta_m}=0$$

و با استفاده از صفحه ۲۲۷ مقاله لیندلی [۵] ، این برآورد به معادله زیر کاهش می‌یابد:

$$\hat{u}+\frac{1}{2}\sum(\hat{u}_{ii}+2\hat{u}_i\hat{\rho}_i)\hat{\sigma}_{ii}+\frac{1}{2}\sum\hat{L}_{iik}\hat{u}_k\hat{\sigma}_{ii}\hat{\sigma}_{kk} \qquad (۱۵)$$

بر اساس تقریب لیندلی این امید ریاضی برای m متغیر تصادفی گوناگون به شرح زیر است :

$$\begin{aligned}
&m=2:\\
&I(\boldsymbol{x})=u(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)\\
&+\frac{1}{2}\Big[(\hat{u}_{\theta_1\theta_1}+2\hat{u}_{\theta_1}\hat{\rho}_{\theta_1})\hat{\sigma}_{\theta_1\theta_2}+(\hat{u}_{\theta_2\theta_2}+2\hat{u}_{\theta_2}\hat{\rho}_{\theta_2})\hat{\sigma}_{\theta_2\theta_2})\Big]\\
&+\frac{1}{2}\Big[\hat{u}_{\theta_1}(\hat{L}_{\theta_1\theta_1\theta_1}\hat{\sigma}_{\theta_1\theta_1}\hat{\sigma}_{\theta_1\theta_1}+\hat{L}_{\theta_2\theta_2\theta_1}\hat{\sigma}_{\theta_1,\theta_1}\hat{\sigma}_{\theta_2\theta_2})\\
&+\hat{u}_{\theta_2}(\hat{L}_{\theta_1\theta_1\theta_2}\hat{\sigma}_{\theta_1\theta_1}\hat{\sigma}_{\theta_2\theta_2}+\hat{L}_{\theta_2\theta_2\theta_2}\hat{\sigma}_{\theta_2,\theta_2}\hat{\sigma}_{\theta_2\theta_2})\Big]\\
&m=3:\\
&I(\boldsymbol{x})=u(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\hat{\theta}_3)\\
&+\frac{1}{2}\Big[(\hat{u}_{\theta_1\theta_1}+2\hat{u}_{\theta_1}\hat{\rho}_{\theta_1})\hat{\sigma}_{\theta_1\theta_2}+(\hat{u}_{\theta_2,\theta_2}+2\hat{u}_{\theta_2}\hat{\rho}_{\theta_2})\hat{\sigma}_{\theta_2\theta_2}\\
&+(\hat{u}_{\theta_3\theta_3}+2\hat{u}_{\theta_3}\hat{\rho}_{\theta_3})\hat{\sigma}_{\theta_3,\theta_3}\Big]\\
&+\frac{1}{2}\Big[\hat{u}_{\theta_1}(\hat{L}_{\theta_1\theta_1\theta_1}\hat{\sigma}_{\theta_1\theta_1}\hat{\sigma}_{\theta_1\theta_1}\\
&+\hat{L}_{\theta_2\theta_2\theta_1}\hat{\sigma}_{\theta_1,\theta_1}\hat{\sigma}_{\theta_2\theta_2})+\hat{L}_{\theta_3\theta_3\theta_1}\hat{\sigma}_{\theta_3\theta_3}\hat{\sigma}_{\theta_1\theta_1})\\
&+\hat{u}_{\theta_2}(\hat{L}_{\theta_1\theta_1\theta_2}\hat{\sigma}_{\theta_1\theta_1}\hat{\sigma}_{\theta_2\theta_2}+\hat{L}_{\theta_2\theta_2\theta_2}\hat{\sigma}_{\theta_2,\theta_2}\hat{\sigma}_{\theta_2\theta_2}\\
&+\hat{L}_{\theta_3\theta_3\theta_2}\hat{\sigma}_{\theta_3\theta_3}\hat{\sigma}_{\theta_2\theta_2})+\hat{u}_{\theta_3}(\hat{L}_{\theta_1\theta_1\theta_3}\hat{\sigma}_{\theta_1\theta_1}\hat{\sigma}_{\theta_3\theta_3}\\
&+\hat{L}_{\theta_2\theta_2\theta_3}\hat{\sigma}_{\theta_2,\theta_2}\hat{\sigma}_{\theta_3\theta_3}+\hat{L}_{\theta_3\theta_3\theta_3}\hat{\sigma}_{\theta_3,\theta_3}\hat{\sigma}_{\theta_3\theta_3})\Big]
\end{aligned}$$

روش زنجیره مارکوف مونت‌کارلو

همان‌گونه که در استنباط بیزی مشاهده شد، محاسبه توزیع پسین همیشه ساده نیست و در بسیاری از موارد مخرج کسر آماره بیزی به خاطر پیچیدگی محاسباتی با روش تحلیلی قابل‌محاسبه نیست؛ حتی اگر توزیع پسین قابل‌محاسبه باشد بسیاری از مقادیر پسین مانند میانگین و واریانس نمی‌تواند محاسبه شود. به‌طورکلی محاسبه امیدهای ریاضی پسین با مشکلات متنوعی از قبیل محاسبه توزیع پسین و یا محاسبه انتگرال متناظر روبرو است

$$\mathbb{E}(g(\Theta)|y)=\int g(\Theta)\ \pi(\Theta|y)d\Theta$$

الگوریتم‌های متعددی برای تولید زنجیره مارکوف وجود دارند. در میان این الگوریتم‌ها الگوریتم گیبس و الگوریتم نمونه‌گیری متروپلیس – هستینگس بیشتر در استنباط بیزی قابل‌قبول‌اند.

الگوریتم نمونه‌گیری گیبس

الگوریتم گیبس توزیع‌های گوناگون پسین پارامترها به‌شرط اینکه دیگر پارامترها مورداستفاده برای نمونه گرفتن توزیع پسین باشند، بکار

می‌گیرد. این الگوریتم در سه مرحله به‌صورت زیر است:

۱. مقدار اولیه $\Theta^{(0)} = (\Theta_1^{(0)}, \Theta_2^{(0)}, \cdots, \Theta_m^{(0)})$ را در نظر بگیرید.

۲. در مرحله $(t+1)$ام بر اساس مرحله (t)ام، $\Theta_1, \Theta_2, \cdots, \Theta_m$ بر اساس زیر محاسبه می‌شود:

$$\theta_1^{(t+1)} \sim P(\theta_1 | \theta_2^{(t)}, \cdots, \theta_m^{(t)}; x)$$

$$\theta_2^{(t+1)} \sim P(\theta_2 | \theta_1^{(t)}, \theta_3^{(t)}, \cdots, \theta_m^{(t)}; x)$$

$$\vdots$$

$$\theta_m^{(t+1)} \sim P(\theta_m | \theta_1^{(t)}, \theta_2^{(t)}, \cdots, \theta_{m-1}^{(t)}; x)$$

۳. مرحله دوم را تا رسیدن به توزیع مانایی ادامه دهید.

الگوریتم متروپلیس-هستینگس

هنگامی‌که توزیع‌های شرطی پسین، شکل مشخصی نداشته باشند الگوریتم متروپلیس-هیستینگز برای نمونه مورداستفاده قرار می‌گیرد. این الگوریتم دارای ساختار رد و پذیرش است و مشاهدات به‌وسیله توزیع پیشنهادی به‌عنوان نمونه‌های ممکن توزیع پسین بر اساس یک قاعده احتمالی ارزیابی می‌کند و آن‌ها را با احتمال معینی می‌پذیرد؛ بنابراین برای استفاده از این الگوریتم نیاز به توزیع پیشنهادی است که انتخاب آن بر دقت و سرعت همگرایی الگوریتم تأثیر می‌گذارد. یکی از ویژگی‌های مطلوب این الگوریتم این است که آن برای توزیع پسین متناسب است. مراحل این الگوریتم به شرح زیر است:

مقدار اولیه $\Theta^{(0)} = (\Theta_1^{(0)}, \Theta_2^{(0)}, \cdots, \Theta_m^{(0)})$ را در نظر بگیرید.

در مرحله $(t+1)$ام بر اساس مرحله (t)ام، $\Theta_1, \Theta_2, \cdots, \Theta_m$ بر اساس زیر محاسبه می‌شود:

الف) با استفاده از توزیع طراحی‌شده $q(\theta_1^*, \cdots, \theta_m^* | \theta_1^{(t)}, \cdots, \theta_m^{(t)})$ مقادیر $(\theta_1^*, \cdots, \theta_m^*)$ را تولید کنید.

ب) نسبت هستینگس را بر اساس رابطه زیر محاسبه کنید.

$$H = \frac{\mathcal{L}(\theta_1^*, \cdots, \theta_m^* | x) P(\theta_1^*, \cdots, \theta_m^*) q(\theta_1^{(t)}, \cdots, \theta_m^{(t)} | \theta_1^*, \cdots, \theta_m^*)}{\mathcal{L}(\theta_1^{(t)}, \cdots, \theta_m^{(t)} | x) P(\theta_1^{(t)}, \cdots, \theta_m^{(t)}) q(\theta_1^*, \cdots, \theta_m^* | \theta_1^{(t)}, \cdots, \theta_m^{(t)})}$$

مقدار $\tilde{u} = min(H, 1)$ را محاسبه کنید، سپس یک نمونه از توزیع همگن به نام U تولید کنید، به‌طوری‌که:

$$\begin{cases} (\theta_1^{(t+1)}, \cdots, \theta_m^{(t+1)}) = (\theta_1^*, \cdots, \theta_m^*) & if\ \tilde{u} \leq U \\ (\theta_1^{(t+1)}, \cdots, \theta_m^{(t+1)}) = (\theta_1^{(t)}, \cdots, \theta_m^{(t)}) & if\ \tilde{u} \geq U \end{cases}$$

ج) مرحله دوم را تکرار کنید تا زنجیره مارکوف به توزیع مانای خود برسد.

توجه داشته باشید که در رابطه بالا $\mathcal{L}(\cdot|x)$ تابع احتمال است، $P(\cdot)$ توزیع پسین و $q(\theta_1^{(t)}, \cdots, \theta_m^{(t)} | \theta_1^*, \cdots, \theta_m^*)$ توزیع پیشنهادی است. به منظور پیاده‌سازی الگوریتم متروپلیس-هستینگس برای تولید نمونه از توزیع‌های تمام شرطی با توجه به ارتباط بین توزیع گاما و توزیع نمایی، می‌توان توزیع پیشنهادی هریک از الگوریتم‌ها را نمایی در نظر گرفت؛ بنابراین با توجه به گام‌های این الگوریتم، پارامترهای توزیع پیشنهادی در مرحله‌ی $(t+1)$ام به نمونه پذیرفته‌شده در مرحله‌ی (t)ام بستگی دارد. به‌عنوان‌مثال در مرحله‌ی $(t+1)$ام، ابتدا نمونه δ^* از توزیع نمایی $\exp(\delta^{(t)})$ استخراج می‌گردد؛ بنابراین در این مرحله امید ریاضی و واریانس توزیع پیشنهادی به ترتیب برابر با $\frac{1}{\delta^{(t)}}$ و $\frac{1}{(\delta^{(t)})^2}$ خواهد بود.

بر این اساس اگر این زنجیره N بار تکرار شود و M تا از آن‌ها به‌عنوان متغیرهای سوخته شده در نظر گرفته شود، خواهیم داشت:

$$\mathbb{E}(g(\Theta)|y) = \int g(\Theta)\ \pi(\Theta|y) d\Theta = \frac{1}{N-M} \sum_{i=M+1}^{N} g(\Theta_i)$$

تابع‌های زیان

در این مقاله ما پنج تابع زیان را بررسی کرده‌ایم که در زیر آورده شده است:

الف) تابع زیان مربع خطا

$$L_s = k(\hat{\theta} - \theta)^2$$

و برآورد بیز آن عبارت است از:

$$\hat{\theta}_s = E(\theta|x) = \int \theta \pi(\theta|x) d\theta$$

ب) تابع زیان آنتروپی

$$L_E = \frac{\hat{\theta}}{\theta} - ln\frac{\hat{\theta}}{\theta} - 1$$

و برآورد بیز آن عبارت است از:

$$\hat{\theta}_E = \frac{1}{E(\frac{1}{\theta}|x)}$$

ج) تابع زیان لاینکس

$$L_L = e^{(\hat{\theta} - \theta)} - (\hat{\theta} - \theta) - 1$$

و برآورد بیز آن عبارت است از:

$$\hat{\theta}_L = -lnE(e^{-\theta}|x)$$

د) تابع زیان لاینکس اصلاح‌شده

$$L_mL = e^{(\frac{\hat{\theta}}{\theta}-1)} - (\frac{\hat{\theta}}{\theta}-1) - 1$$

و برآورد بیز آن عبارت است از:

$$E(\frac{1}{\theta}e^{\frac{\hat{\theta}_m L}{\theta}}|x) = expE(\frac{1}{\theta}|x)$$

هـ) تابع زیان مربع خطای لگاریتمی

$$L_sl = (ln\hat{\theta} - ln\theta)^2$$

و برآورد بیز آن عبارت است از:

$$\hat{\theta}_s l = e^{E(ln\theta|x)}$$

دو توزیع خاص

۲ خانواده توزیع مارشال اولکین ریلی

$H(x;\xi) = x^2$ و $h(x;\xi) = 2x$ که به توزیع ریلی ختم می‌شود، تابع توزیع آن به‌صورت

$$F(x;\delta,\alpha) = \frac{1 - exp[-\alpha x^2]}{1 - \bar{\delta}exp[-\alpha x^2]} \qquad (16)$$

که $\alpha > 0$ و $\delta > 0$ با استفاده از معادله (۱۶) تابع بقا این توزیع جدید به‌صورت زیر است:

$$\bar{F}(x;\delta,\alpha) = \frac{\delta exp[-\alpha x^2]}{1 - \bar{\delta}exp[-\alpha x^2]} \qquad (17)$$

تابع نرخ مخاطره به‌صورت معادله (۱۸) است

$$\tau(x;\delta,\alpha) = \frac{2\alpha x}{1 - \bar{\delta}exp[-\alpha x^2]} \qquad (18)$$

همچنین تابع چگالی احتمال آن به شرح زیر می‌باشد

$$f(x;\delta,\alpha) = \frac{2\delta\alpha x exp[-\alpha x^2]}{\{1 - \bar{\delta}exp[-\alpha x^2]\}^2} \qquad (19)$$

۱.۲ برآورد گشتاوری

k امین گشتاور برای توزیع مارشال اولکین ریلی به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$T_k(z) = \sum_{j=0}^{\infty} w_j T_k^{(j)}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} w_j \int_{-\infty}^{z} x^k\ g(x;(j+1)\alpha,\xi)\ dx$$
$$= \sum_{j=0}^{\infty} w_j \int_{-\infty}^{z} x^k\ 2\alpha x(j+1)exp(-\alpha x^2(j+1))dx$$

می‌دانیم

$$w_j = \begin{cases} \eta_j & 0 < \delta < 0 \\ \nu_j & \delta > 1 \end{cases}$$

بنابراین اولین گشتاور توزیع به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$= \begin{cases} \sum_{j=0}^{\infty} \delta\bar{\delta}^j \int_0^{\infty} x^2\alpha x(j+1)exp(-\alpha x^2(j+1))dx & 0 < \delta < 0 \\ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{\delta(j+1)!} \sum_{k=j}^{\infty}(k+1)!(1-1/\delta)^k & \delta > 1 \\ \times \int_0^{\infty} x^2 2\alpha(j+1)exp(-\alpha x^2(j+1))dx & \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sum_{j=0}^{\infty} \delta\bar{\delta}^j \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha(j+1)}} & 0 < \delta < 0 \\ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{\delta}(1-1/\delta)^j \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha(j+1)}} & \delta > 1 \end{cases}$$

و مقادیر عددی گشتاورهای اول توزیع مارشال اولکین ریلی به ازای δهای مختلف در جداول ۲ و ۳ به دست آورده شده است.

جدول ۲. جدول مقادیر گشتاور اول توزیع مارشال اولکین ریلی به ازای $0 < \delta < 0$

	δ					
α	۰/۰۵	۰/۱	۰/۳	۰/۵	۰/۸	۰/۹۸
۰/۱	۱/۱۰۴۹۰۵	۰/۸۰۰۴۶۱	۰/۴۷۵۸۷۸۱	۰/۳۷۷۵۶۷۳	۰/۳۰۷۷۵۹۲	۰/۲۸۲۶۰۷۵
۰/۹	۳/۳۱۴۷۱۴	۲/۴۰۱۳۸۴	۱/۴۲۷۶۳۴	۱/۱۳۲۷۰۲	۰/۹۲۳۲۷۷۶	۰/۸۴۷۸۲۲۴
۲	۴/۹۴۱۲۸۴	۳/۵۷۹۷۷۲	۲/۱۲۸۱۹۱	۱/۶۸۸۵۳۲	۱/۳۷۶۳۴۱	۱/۲۶۳۸۵۹
۵	۴/۹۴۱۲۸۴	۵/۶۶۰۱۱۶	۳/۳۶۴۹۶۶	۲/۶۶۹۸۰۴	۲/۶۶۹۸۰۴	۱/۹۹۸۳۳۷
۲۰	۱۵/۶۲۵۷۱	۱۱/۳۲۰۲۳	۶/۷۲۹۹۳۲	۵/۳۳۹۶۰۸	۴/۳۵۲۳۷۲	۳/۹۹۶۶۷۳
۲۰۰	۴۹/۴۱۲۸۴	۳۵/۷۹۷۷۲	۲۱/۲۸۱۹۱	۱۶/۸۸۵۳۲	۱۳/۷۶۳۴۱	۱۲/۶۳۸۵۹

جدول ۳. جدول مقادیر گشتاور اول توزیع مارشال اولکین ریلی به ازای $\delta > 0$

	δ					
α	۱/۵	۲	۴	۷	۸	۱۰
۰/۰۰۵	۶/۸۰۲۷۰۳	۴/۶۸۴۲۹	۲/۰۹۲۱۱۳	۱/۱۴۴۲۰	۰/۹۹۴۱۲	۰/۷۸۷۵۳
۰/۳	۰/۸۷۸۲۲	۰/۶۰۴۷۳	۰/۲۷۰۰۹	۰/۱۴۷۷۱	۰/۱۲۸۳۴	۰/۱۰۱۶۷
۰/۹	۰/۵۰۷۰۴۳۶	۰/۳۴۹۱۴۶۳	۰/۱۵۵۹۳۶۹	۰/۰۸۵۲۸۴	۰/۰۵۸۶۹۹	۰/۰۵۸۶۹۹
۲	۰/۳۴۰۱۳	۰/۲۳۴۲۱	۰/۱۰۴۶	۰/۰۵۷۲۱	۰/۰۴۹۷	۰/۰۳۹۳۷
۱۰۰	۰/۰۴۸۱	۰/۰۳۳۱۲	۰/۰۱۴۷۹۳	۰/۰۰۸۰۹	۰/۰۰۷۰۲۹	۰/۰۰۵۵۶۸

۲.۲ فاصله اطمینان

فرض کنید $x_1, x_2, \dots, x_n$ یک نمونه n تایی از متغیر تصادفی X باشد. تابع لگاریتم درست نمایی برای بردار پارامتری $\boldsymbol{\theta} = (\delta, \alpha)^\top$ به‌صورت زیر است:

$$\ell(\boldsymbol{\theta}) = nlog(2\delta\alpha) + \sum_{i=1}^{n} logx - \alpha \sum_{i=1}^{n} x^2 - 2\sum_{i=1}^{n} log\{1 - \bar{\delta}exp(-\alpha x^2)\}$$

با استفاده از تابع لگاریتم درستنمایی بالا، مؤلفه‌های بردار $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{\theta}) = (U_\delta, U_\alpha)^\top$ به‌صورت زیر حاصل می‌شوند:

$$\mathcal{U}_\delta(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \delta} = \frac{n}{\delta} - 2\sum_{i=1}^{n} \frac{exp(-\alpha x^2)}{1 - \bar{\delta}exp(-\alpha x^2)}$$

$$\mathcal{U}_\alpha(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} - \sum_{i=1}^{n} x^2 - 2\bar{\delta}\sum_{i=1}^{n} \frac{x^2\ exp(-\alpha x^2)}{1 - \bar{\delta}exp(-\alpha x^2)}$$

حل کردن معادلات بالا به دلیل نداشتن یک راه‌حل صریح کار ساده‌ای نیست، چون نمی‌تواند برآورد بیشینه درستنمایی را به‌صورت بسته به دست آورد، محاسبه آن باید به‌صورت عددی با استفاده از حل معادلات تکرارشونده که به نقاط اولیه بستگی دارد انجام شود. ازاین‌رو ما با استفاده از زبان برنامه‌نویسی R و داده‌های تصادفی، برآوردها را به دست می‌آوریم.

جدول ۴. مقادیر عددی برآورد بیشینه درستنمایی پارامترها

پارامترها	MLE	$-loglik$
$\hat{\delta}$	۴٫۵۹۰۶۸۹	۷۰٫۲۹۳۳۶
$\hat{\alpha}$	۲٫۸۸۷۰۵۹	۷۰٫۲۹۳۳۶

ماتریس اطلاعات افرازشده دارای مشتقات جزئی دوم که به‌راحتی می‌توان آن‌ها را به دست آورد؛ و در نهایت، ماتریس اطلاعات افراز شده عبارت است از

$$J(\boldsymbol{\theta}) = -\begin{pmatrix} \mathcal{U}_{\delta\delta} & \mathcal{U}_{\delta\alpha} \\ \mathcal{U}_{\alpha\delta} & \mathcal{U}_{\alpha\alpha} \end{pmatrix}_{\downarrow(\delta=\hat{\delta}, \alpha=\hat{\alpha})}$$

که اعضای آن به‌صورت زیر هستند.

$$\mathcal{U}_{\delta\delta}(\boldsymbol{\theta}) = -n\delta^{-2}$$

$$\mathcal{U}_{\delta\alpha}(\boldsymbol{\theta}) = 2\sum_{i=1}^{n} \frac{x^2 exp(-\alpha x^2)}{\{1 - \bar{\delta}exp(-\alpha x^2)\}^2}$$

$$\mathcal{U}_{\alpha\alpha}(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{n}{\alpha^2} + 2\bar{\delta}\sum_{i=1}^{n} \frac{x^4\ exp(-\alpha x^2)}{\{1 - \bar{\delta}exp(-\alpha x^2)\}^2}$$

بنابراین، ماتریس مجانبی واریانس کوواریانس $[\hat{V}]$ برای برآورد بیشینه درستنمایی با معکوس کردن ماتریس اطلاعات افراز شده $J(\underline{\theta})$ به دست می‌آید.

$$[\hat{V}] = J^{-1}(\boldsymbol{\theta}) = -\begin{pmatrix} \widehat{var(\delta)} & cov(\delta, \alpha) \\ cov(\alpha, \delta) & \widehat{var(\alpha)} \end{pmatrix}_{\downarrow(\delta, \alpha)}$$

هنگامی‌که شرایط منظم استاندارد برقرار باشد، می‌توان نشان داد که $\sqrt{n}([\hat{\alpha}, \hat{\delta}]^\top - [\alpha, \delta]^\top)$ به توزیع نرمال چندمتغیره $N_2(0, K([\alpha, \delta])^{-1})$میل می‌کند و $K([\alpha, \delta])$ امید ریاضی ماتریس اطلاعات است که برای آن عبارت حدی زیر برقرار است.[۱]

$$lim_{n \to \infty} J_n([\alpha, \delta]) = K([\alpha, \delta])$$

بر اساس این مطلب ناحیه‌های اطمینان برای توزیع قابل‌دسترس است. سپس فاصله اطمینان $\%100(1-\eta)$ برای پارامترهای α و δ به‌صورت

$$\left(\alpha \pm Z_{\frac{\eta}{2}} \sqrt{\widehat{var(\alpha)}}\right), \left(\delta \pm Z_{\frac{\eta}{2}} \sqrt{\widehat{var(\delta)}}\right)$$

داده می‌شود، که $Z_{\frac{\eta}{2}}$ نرمال استاندارد است.

جدول ۵. مقادیر عددی برآورد فاصله اطمینان پارامتری برای داده‌های تصادفی تولیدشده از توزیع تعمیم‌یافته مارشال اولکین ریلی

مقادیر به‌دست‌آمده	
$-$۴٫۷۴۵۰۸۸	$\mathcal{U}_{\delta\delta}$
۵٫۲۳۸۰۱۱	$\mathcal{U}_{\alpha\delta}$
۰٫۲۶۶۶۲	$\widehat{var(\delta)}$
۰٫۰۴۵۸۵	$\widehat{var(\alpha)}$
۰٫۰۵۰۶۱	$cov(\delta, \alpha)$
فاصله اطمینان	پارامترها
(۳٫۵۷۸, ۵٫۴۰۲۰)	δ
(۲٫۴۶۷۶, ۳٫۳۰۶۴)	α

برای بررسی اینکه پارامتر δ از نظر آماری متفاوت از یک است به‌عبارت‌دیگر برای آزمون $H_0 : \delta = 1$ در مقابل $H_1 : \delta \neq 1$ ما از آماره $LR = 2\{l(\hat{\delta}) - l(\tilde{\delta})\}$ استفاده می‌کنیم؛ که $\hat{\delta}$ برآورد بیشینه درستنمایی δ تحت H_1 است و $\tilde{\delta}$ برآورد بیشینه درستنمایی تحت H_0 است. تحت فرض H_0توزیع حدی، توزیع χ^2 با یک درجه آزادی است. اگر مقدار آماره آزمون LR از چندک $\%100(1-\alpha)$ توزیع χ^2 یک درجه آزادی بزرگ‌تر شود، فرض H_0 را رد می‌کنیم.

برای بررسی اینکه پارامتر α از نظر آماری متفاوت از یک است به‌عبارت‌دیگر برای آزمون $H_0 : \alpha = 0$ در مقابل $H_1 : \alpha \neq 0$ ما از آماره $LR = 2\{l(\hat{\alpha}) - l(\tilde{\alpha})\}$ استفاده می‌کنیم؛ که $\hat{\alpha}$ برآورد بیشینه درستنمایی نامقید α تحت H_1 است و $\tilde{\alpha}$ برآورد بیشینه درستنمایی مقید

تحت H_0 است. تحت فرض H_0توزیع حدی، توزیع نرمال است. اگر مقدار آماره آزمون LR از چندک $100(1-\alpha)\%$ توزیع نرمال بزرگ‌تر شود، فرض H_0 را رد می‌کنیم.

۳.۲ استنباط بیزی برای توزیع تعمیم‌یافته مارشال اولکین ریلی

در این بخش، برآورد بیز از پارامترهای مجهول را تحت توابع زیان مربع خطا، تابع زیان لاینکس، تابع زیان آنتروپی، مربع خطی لگاریتمی و لاینکس اصلاح‌شده را دریافت می‌کنیم. فرض بر این است که پارامترهای δ و α مستقل هستند و از توزیع‌های پیشین گاما پیروی می‌کنند.

$$\pi_1(\delta) \propto \delta^{b_1-1} e^{-b_2\delta}$$

$$\pi_2(\alpha) \propto \alpha^{b_3-1} e^{-b_4\alpha}$$

در اینجا تمام ابرپارامترهای b_1، b_2، b_3 و b_4 معلوم و غیر منفی فرض شده است. توزیع توأم پیشین برای α و δ برابر

$$\pi(\delta, \delta) \propto \delta^{b_1-1} e^{-b_2\delta} \alpha^{b_3-1} e^{-b_4\alpha}$$

بنابراین تابع توأم پسین به‌صورت زیر به‌دست‌آمده است

$$\begin{aligned} \pi(\delta, \alpha|\boldsymbol{x}) \quad &\propto \delta^{n+b_1-1} \alpha^{n+b_3-1} \textstyle\prod_{i=1}^n x_i e^{-b_2\delta} e^{-\alpha\{\sum_{i=2}^n x^2 + b_4\}} \\ &\times \textstyle\prod_{i=1}^n \{1 - \hat{\delta} exp(-\alpha x^2)\}^{-2} \end{aligned} \tag{20}$$

واضح است که محاسبه تحلیلی عبارت بالا غیرممکن است زیرا به دست آوردن فرم‌های بسته برای توزیع‌های پسین برای هر پارامتر بسیار دشوار است. روش‌های مختلفی برای حل این انتگرال‌ها وجود دارد. روش اولی که برای تقریب این انتگرال استفاده کردیم روش تقریب لیندلی است. همان‌طور که در بخش ۵.۱ گفتیم داریم

$$I(x) = E\big(u(\delta, \alpha)|X = x\big) = \frac{\int_\delta \int_\alpha u(\delta, \alpha) e^{L(\boldsymbol{x}|\delta,\alpha)+\rho(\delta,\alpha)} d\theta d\alpha}{\int_\delta \int_\alpha e^{L(\boldsymbol{x}|\delta,\alpha)+\rho(\delta,\alpha)} d\theta d\alpha}$$

که $u(\delta, \alpha)$ تابعی از θ و α است و $L(\delta, \alpha)$ و $\rho(\delta, \alpha)$ به ترتیب تابع لگاریتم درستنمایی و لگاریتم توزیع پیشین توأم δ و α است؛ که کاهش‌یافته این معادله برابر است با:

$$\begin{aligned} I(\boldsymbol{x}) = u(\hat{\delta}, \hat{\alpha}) &+ \frac{1}{2}\Big[(\hat{u}_{\delta\delta} + 2\hat{u}_\delta \hat{\rho}_\delta)\hat{\sigma}_{\delta\delta} + (\hat{u}_{\alpha\alpha} + 2\hat{u}_\alpha \hat{\rho}_\alpha)\hat{\sigma}_{\alpha\alpha}\Big] \\ &+ \frac{1}{2}\Big[\hat{u}_\delta(\hat{L}_{\delta\delta\delta}\hat{\sigma}_{\delta\delta}\hat{\sigma}_{\delta\delta} + \hat{L}_{\alpha\alpha\delta}\hat{\sigma}_{\delta\delta}\hat{\sigma}_{\alpha\alpha}) \\ &+ \hat{u}_\alpha(\hat{L}_{\delta\delta\alpha}\hat{\sigma}_{\delta\delta}\hat{\sigma}_{\alpha\alpha} + \hat{L}_{\alpha\alpha\alpha}\hat{\sigma}_{\alpha\alpha}\hat{\sigma}_{\alpha\alpha})\Big] \end{aligned}$$

درحالی‌که :

$$u_{ij} = \frac{\partial^2 u(\delta, \alpha)}{\partial\delta^i \partial\alpha^j},\ L_{ij} = \frac{\partial^{i+j} u(\delta, \alpha)}{\partial\delta^i \partial\alpha^j}\ \ i, j = 0, 1, 2, 3,\ i+j = 3$$

$$\rho_{ij} = \frac{\partial\rho(\delta, \alpha)}{\partial\delta^i \partial\alpha^j},\quad \rho = ln\pi(\delta, \alpha),$$

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} L_{02} & L_{11} \\ L_{11} & L_{20} \end{bmatrix}^{-1}$$

$$L_{11} = 2\sum_{i=n}^n \frac{x^2 exp(-\alpha x^2)}{\{1 - \bar{\delta} exp(-\alpha x^2)\}^2},\quad L_{20} = -n\delta^{-2},$$

$$L_{02} = -\frac{n}{\alpha^2} + 2\bar{\delta} \sum_{i=n}^n \frac{x^4 exp(-\alpha x^2)}{\{1 - \bar{\delta} exp(-\alpha x^2)\}^2},$$

$$D = \frac{1}{L_{02}L_{20} - L_{11}L_{11}},\quad \sigma_{11} = DL_{20},\quad \sigma_{22} = DL_{02},$$

$$\sigma_{12} = DL_{11},\quad L_{30} = \frac{2n}{\delta^3}, L_{12} = L_{21},$$

$$L_{03} = \frac{2n}{\alpha^3} + \bar{\delta} \sum_{i=n}^n \frac{2x^6 exp(-\alpha x^2)\{1 - \bar{\delta} exp(-\alpha x^2)\}}{\{1 - \bar{\delta} - exp(-\alpha x^2)\}^3},$$

$$\rho = (b_1 - 1)ln\delta + (b_3 - 1)ln\alpha - b_2\delta - b_4\alpha,$$

$$p_1 = \frac{\partial\rho}{\partial\delta} = \frac{b_1 - 1}{\delta} - b_2,\quad \rho_2 = \frac{\partial\rho}{\partial\alpha} = \frac{b_3 - 1}{\alpha} - b_4$$

برای مقادیری که در بالا به دست آمد، برآورد بیزی پارامترها تحت توابع زیان مربع خطا، آنتروپی، لاینکس، مربع خطی لگاریتمی و لاینکس اصلاح‌شده در جدول (۶) آمده است. به‌طوری‌که $\hat{\delta}$ و $\hat{\alpha}$ برآورد پارامتر δ و α است.

برآورد بیزی پارامترها برای تشکیل بازه اطمینان بیزی با استفاده از نرم‌افزار R محاسبه و در مطالعات شبیه‌سازی ذکرشده است.

۴.۲ روش زنجیره مارکوف مونت‌کارلو

برآورد بیز تحت تابع زیان مربع خطا

$$u_{\hat{B}S}(\delta, \alpha) = E[u(\delta, \alpha)|\boldsymbol{x}] = \int_\delta \int_\alpha u(\delta, \alpha)\pi^*(\delta, \alpha|\boldsymbol{x}) d\alpha d\delta$$

برآورد بیز تحت تابع زیان آنتروپی

$$\begin{aligned} u_{\hat{B}G}(\delta, \alpha) &= \big[E[u(\delta, \alpha)^{-a}|\boldsymbol{x}]\big]^{-\frac{1}{a}} \\ &= \Big(\int_\delta \int_\alpha [u(\delta, \alpha)]^{-a} \pi^*(\delta, \alpha|\boldsymbol{x}) d\alpha d\delta\Big)^{-\frac{1}{a}} \end{aligned}$$

برآورد بیز تحت تابع زیان لاینکس

$$\begin{aligned} u_{\hat{B}L}(\delta, \alpha) &= -\frac{1}{a} ln\big[E[e^{-au(\delta,\alpha)}|\boldsymbol{x}]\big] \\ &= -\frac{1}{a} ln\Big(\int_\delta \int_\alpha e^{-au(\delta,\alpha)} \pi^*(\delta, \alpha|\boldsymbol{x}) d\alpha d\delta\Big) \end{aligned}$$

برآورد بیز تحت تابع زیان لاینکس اصلاح‌شده

$$u_{\hat{B}mL}(\delta,\alpha) = exp\big[E[u(\delta,\alpha)^{-a}|\boldsymbol{x}]\big] = exp\Big(\int_{\delta}\int_{\alpha}[u(\delta,\alpha)]^{-a}\pi^{*}(\delta,\alpha|\boldsymbol{x})d\alpha d\delta\Big)$$

برآورد بیز تحت تابع زیان لگاریتم مربع خطا

$$u_{\hat{B}SL}(\delta,\alpha) = exp\big[E[ln(u(\delta,\alpha))^{-a}|\boldsymbol{x}]\big] = exp\Big(\int_{\delta}\int_{\alpha}[ln(u(\delta,\alpha))]^{-a}\pi^{*}(\delta,\alpha|\boldsymbol{x})d\alpha d\delta\Big)$$

جدول ۶. برآوردهای بیز تحت تابع زیان‌های مختلف به روش لیندلی

تابع زیان	پارامتر	برآورد بیز
مربع خطا	δ	$\hat{\delta}+\hat{\rho}_{\delta}\hat{\sigma}_{\delta\delta}+\frac{1}{2}[\hat{\sigma}_{\delta\delta}(\hat{L}_{\delta\delta\delta}\hat{\sigma}_{\delta\delta}+\hat{L}_{\alpha\alpha\delta}\hat{\sigma}_{\alpha\alpha})]$
	α	$\hat{\alpha}+\hat{\rho}_{\alpha}\hat{\sigma}_{\alpha\alpha}+\frac{1}{2}[\hat{\sigma}_{\alpha\alpha}(\hat{L}_{\delta\delta\alpha}\hat{\sigma}_{\delta\delta}+\hat{L}_{\alpha\alpha\alpha}\hat{\sigma}_{\alpha\alpha})]$
آنتروپی	δ	$\hat{\delta}[1+(\frac{1}{\hat{\delta}^{2}}-\frac{1}{\hat{\delta}}\hat{\rho}_{\delta})\hat{\sigma}_{\delta\delta}-\frac{1}{2\hat{\delta}}\hat{\sigma}_{\delta\delta}(\hat{L}_{\delta\delta\delta}\hat{\sigma}_{\delta\delta}+\hat{L}_{\alpha\alpha\delta}\hat{\sigma}_{\alpha\alpha})]^{-1}$
	α	$\hat{\alpha}[1+(\frac{1}{\hat{\alpha}^{2}}-\frac{1}{\hat{\alpha}}\hat{\rho}_{\alpha})\hat{\sigma}_{\alpha\alpha}-\frac{1}{2\hat{\alpha}}\hat{\sigma}_{\alpha\alpha}(\hat{L}_{\delta\delta\alpha}\hat{\sigma}_{\delta\delta}+\hat{L}_{\alpha\alpha\alpha}\hat{\sigma}_{\alpha\alpha})]^{-1}$
لاینکس	δ	$\hat{\delta}-ln\{1+[(\frac{1}{2}-\hat{\rho}_{\delta})\sigma_{\delta\delta}-\frac{1}{2}\hat{\sigma}_{\delta\delta}(\hat{L}_{\delta\delta\delta}\hat{\sigma}_{\delta\delta}+\hat{L}_{\alpha\alpha\delta}\hat{\sigma}_{\alpha\alpha}]\}$
	α	$\hat{\alpha}-ln\{1+[(\frac{1}{2}-\hat{\rho}_{\alpha})\sigma_{\alpha\alpha}-\frac{1}{2}\hat{\sigma}_{\alpha\alpha}(\hat{L}_{\delta\delta\alpha}\hat{\sigma}_{\delta\delta}+\hat{L}_{\alpha\alpha\alpha}\hat{\sigma}_{\alpha\alpha}]\}$
مربع خطای لگاریتمی	δ	$\hat{\delta}exp\Big[\frac{\hat{\sigma}_{\delta\delta}}{2\hat{\delta}}\big(-\frac{1}{\hat{\delta}}+2\hat{\rho}_{\delta}+(\hat{L}_{\delta\delta\delta}\hat{\sigma}_{\delta\delta}+\hat{L}_{\alpha\alpha\delta}\hat{\sigma}_{\alpha\alpha})\big)\Big]$
	α	$\hat{\alpha}exp\Big[\frac{\hat{\sigma}_{\alpha\alpha}}{2\hat{\alpha}}\big(-\frac{1}{\hat{\alpha}}+2\hat{\rho}_{\alpha}+(\hat{L}_{\delta\delta\alpha}\hat{\sigma}_{\delta\delta}+\hat{L}_{\alpha\alpha\alpha}\hat{\sigma}_{\alpha\alpha})\big)\Big]$
لاینکس اصلاح‌شده	δ	$\hat{\delta}\Big[1+\big(\frac{c(c+1)}{2\hat{\delta}^{2}}-\frac{c}{\hat{\delta}}\hat{\rho}\big)\hat{\sigma}_{\delta\delta}-\frac{c}{2\hat{\delta}}\hat{\sigma}_{\delta\delta}(\hat{L}_{\delta\delta\delta}\hat{\sigma}_{\delta\delta}+\hat{L}_{\alpha\alpha\delta}\hat{\sigma}_{\alpha\alpha})\Big]^{-\frac{1}{c}}$
	α	$\hat{\alpha}\Big[1+\big(\frac{c(c+1)}{2\hat{\alpha}^{2}}-\frac{c}{\hat{\alpha}}\hat{\rho}\big)\hat{\sigma}_{\alpha\alpha}-\frac{c}{2\hat{\alpha}}\hat{\sigma}_{\alpha\alpha}(\hat{L}_{\delta\delta\alpha}\hat{\sigma}_{\delta\delta}+\hat{L}_{\alpha\alpha\alpha}\hat{\sigma}_{\alpha\alpha})\Big]^{-\frac{1}{c}}$

محاسبه معادلات بالا به‌صورت تحلیل بسیار دشوار است؛ بنابراین روش زنجیره مارکوف مونت‌کارلو را استفاده کردیم. نمونه‌هایی از ۲۰ تولید می‌کنیم و معادلات بالا را تقریب می‌زنیم. هدف اصلی روش مونت‌کارلو زنجیره مارکوف محاسبه مقدار تقریبی انتگرال‌های بالا است.

طبق الگوریتم گیبس باید از توزیع شرطی کامل پسین پارامترهای مختلف استفاده کرد؛ توزیع شرطی کامل پسین پارامترهای مدل توزیع به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$\pi_{1}^{*}(\delta|other)\propto\delta^{n+b_{1}-1}e^{-b_{2}\delta}\prod_{i=1}^{n}\{1-\bar{\delta}exp(-\alpha x_{i}^{2})\}^{-2} \qquad (۲۱)$$

$$\pi_{2}^{*}(\alpha|other)\propto\alpha^{n+b_{3}-1}e^{-\alpha\{\sum_{i=1}^{n}x_{i}^{2}b_{4}\}}\prod_{i=1}^{n}\{1-\bar{\delta}exp(-\alpha x_{i}^{2})\}^{-2} \qquad (۲۲)$$

مراحل این الگوریتم به شرح زیر است:

۱. مقدار اولیه $\Theta^{(0)}=\big(\delta^{(0)},\alpha^{(0)}\big)$ را در نظر بگیرید.

۲. $i=1$ قرار می‌دهیم.

۳. با استفاده از توزیع طراحی‌شده ۲۱ و ۲۲ مقادیر (δ^{*},α^{*}) را تولید کنید.

۴. در مرحله ۲ را برای $i=1,2,3,...,N$ و مقادیر $(\delta^{(2)},\alpha^{(1)}),\cdots,(\delta^{(N)},\alpha^{(N)})$ تکرار می‌کنیم.

بر این اساس خواهیم داشت:

$$\mathbb{E}(u(\delta,\alpha)|y)=\int u(\delta,\alpha)\ \pi(\delta,\alpha|y)d\delta d\alpha=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}u(\delta_{j},\alpha_{j})$$

در نتیجه، برآورد پارامترها بر اساس توابع زیان مختلف در جدول (۷) خلاصه‌شده است:

جدول ۷. برآوردهای بیز تحت تابع زیان‌های مختلف به روش زنجیره مارکوف مونت‌کارلو

	برآورد
مربع خطا	$\hat{\delta}_{S}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta^{(i)}$
	$\hat{\delta}_{S}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta^{(i)}$
آنتروپی	$\hat{\delta}_{E}=\frac{N}{\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\delta^{(i)}}}$
	$\hat{\alpha}_{E}=\frac{N}{\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\alpha^{(i)}}}$
لاینکس	$\hat{\delta}_{L}=-ln\Big\{\frac{\sum_{i=1}^{N}exp(-\delta^{(i)})}{N}\Big\}$
	$\hat{\alpha}_{L}=-ln\Big\{\frac{\sum_{i=1}^{N}exp(-\alpha^{(i)})}{N}\Big\}$
لاینکس اصلاح‌شده	$\hat{\delta}_{mL}=\Big(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\delta^{(i)})^{-\frac{1}{c}}\Big)^{-\frac{1}{c}}$
	$\hat{\alpha}_{mL}=\Big(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\alpha^{(i)})^{-\frac{1}{c}}\Big)^{-\frac{1}{c}}$
مربع خطای لگاریتمی	$\hat{\delta}_{SL}=exp\Big(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta^{(i)}\Big)$
	$\hat{\alpha}_{SL}=exp\Big(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\alpha^{(i)}\Big)$

۳ توزیع مارشال اولکین پارتو

$H(x;\xi) = log(x/k)$ و $h(x;\xi) = 1/x$ که به توزیع پارتو ختم می‌شود، تابع توزیع آن به‌صورت

$$F(x;\delta,\alpha,k) = \frac{1 - exp[-\alpha log(\frac{x}{k})]}{1 - \bar{\delta} exp[-\alpha log(\frac{x}{k})]} \tag{23}$$

که $\alpha > 0$ ، $\delta > 0$ و $k > 0$ با استفاده از معادله (۲۳) تابع بقا این توزیع جدید به‌صورت زیر است:

$$\bar{F}(x;\delta,\alpha,k) = \frac{\delta exp[-\alpha log(\frac{x}{k})]}{1 - \bar{\delta} exp[-\alpha log(\frac{x}{k})]} \tag{24}$$

تابع نرخ مخاطره به‌صورت معادله (۲۵) است

$$\tau(x;\delta,\alpha,k) = \frac{\alpha/x}{1 - \bar{\delta} exp[-\alpha log(\frac{x}{k})]} \tag{25}$$

همچنین تابع چگالی احتمال آن به شرح زیر می‌باشد

$$f(x;\delta,\alpha,k) = \frac{\delta\alpha/x exp[-\alpha log(\frac{x}{k})]}{\{1 - \bar{\delta} exp[-\alpha log(\frac{x}{k})]\}^2} \tag{26}$$

۱.۳ برآورد گشتاوری

k امین گشتاور برای توزیع مارشال اولکین پارتو به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} T_k(z) &= \sum_{j=0}^{\infty} w_j T_k^{(j)}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} w_j \int_{-\infty}^{z} x^k\ g(x;(j+1)\alpha,\xi)\ dx \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} w_j \int_{-\infty}^{z} x^k\ \alpha/x(j+1) exp\Big(-\alpha(j+1)log(\frac{x}{k})\Big)dx \end{aligned}$$

می‌دانیم

$$w_j = \begin{cases} \eta_j & 0 < \delta < 0 \\ \nu_j & \delta > 1 \end{cases}$$

بنابراین اولین گشتاور توزیع به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$= \begin{cases} \sum_{j=0}^{\infty} \delta\bar{\delta}^j \int_0^{\infty} \alpha(j+1)exp(-\alpha(j+1)log(\frac{x}{k}))dx & 0 < \delta < 0 \\ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{\delta(j+1)!} \sum_{k=j}^{\infty} (k+1)!(1-1/\delta)^k & \delta > 1 \\ \times \int_0^{z} \alpha(j+1)exp(-\alpha(j+1)log(\frac{x}{k}))dx & \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sum_{j=0}^{\infty} \delta\bar{\delta}^j \alpha(j+1) \frac{z(\frac{z}{k})^{-\alpha(j+1)}}{1-\alpha(j+1)} & 0 < \delta < 0 \\ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{\delta}(1-1/\delta)^j \alpha(j+1) \frac{-z(\frac{z}{k})^{-\alpha(j+1)}}{1-\alpha(j+1)} & \delta > 1 \end{cases}$$

و مقادیر عددی گشتاورهای اول توزیع مارشال اولکین پارتو به ازای δهای مختلف در جداول (۸) و (۹) به دست آورده شده است.

جدول ۸. جدول مقادیر گشتاور اول توزیع مارشال اولکین پارتو به ازای $0 < \delta < 0$

	δ					
α	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۸
۰/۳۳	۶/۹۳۸	۱۱/۹۳۱	۱۴/۲۱۶	۱۴/۲۹۳	۱۲/۷۱۲	۳/۸۴۲
۰/۴۷	۰/۲۱۲	۱/۴۴۳	۲/۴۷۰	۳/۲۳۳	۳/۶۹۶	۳/۰۸۹
۰/۹۵	۰/۷۵۰	۲/۶۴۸	۴/۶۰۴	۶/۵۹۷	۸/۶۱۸	۱۴/۸۰۲
۰/۹۹	۸/۷۶۶	۱۸/۶۷۲	۲۸/۶۳۲	۳۸/۶۲۶	۴۸/۶۴۶	۷۸/۸۱
۰/۹۹۹	۹۸/۷۶	۱۹۸/۶۷	۲۹۸/۶۳	۳۹۸/۶۳	۴۹۸/۶۵	۷۹۸/۸۲

جدول ۱۰. مقادیر عددی برآورد بیشینه درستنمایی پارامترها

$-loglik$	MLE	پارامترها
۲۰۴/۰۲۸	۰/۹۴۰۸	$\hat{\delta}$
۲۰۴/۰۲۸	۴/۶۷۵۱	$\hat{\alpha}$
۲۰۴/۰۲۸	۳/۶۷۷۴	$\hat{k}$

جدول ۹. جدول مقادیر گشتاور اول توزیع مارشال اولکین پارتو به ازای $\delta > 0$

	δ					
α	۱/۵	۲	۴	۷	۸	۱۰
۰/۳	۰/۷۴۷	۱/۲۴۰	۱/۵۶۹	۱/۲۱۷	۱/۱۱۷	۰/۹۵۳
۰/۶	۲/۱۹۹	۲/۰۴۳	۱/۲۹۳	۰/۸۰۲	۰/۷۱۰	۰/۵۷۸
۰/۸	۳/۱۵۹	۲/۵۱۴	۱/۳۵۰	۰/۷۹۱	۰/۶۹۵	۰/۵۵۹
۰/۹	۶/۴۰۸	۴/۹۲۳	۲/۵۳۵	۱/۴۶۴	۱/۲۸۳	۱/۰۲۹
۰/۹۹	۶۶/۳۶	۴۹/۸۷	۲۵/۰۰	۱۴/۲۹	۱۲/۵۱	۱۰/۰۱

۲.۳ فاصله اطمینان

فرض کنید $x_1, x_2, \ldots, x_n$ یک نمونه n تایی از متغیر تصادفی X باشد. تابع لگاریتم درست نمایی برای بردار پارامتری $\boldsymbol{\theta} = (\delta,\alpha,k)^\top$ به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \ell(\boldsymbol{\theta}) &= nlog(\delta\alpha) + \sum_{i=1}^{n} log\frac{1}{x} - \alpha\sum_{i=1}^{n} log(\frac{x}{k}) \\ &- 2\sum_{i=1}^{n} log\{1 - \bar{\delta} exp[-\alpha log\frac{x}{k}]\} \end{aligned}$$

با استفاده از تابع لگاریتم درستنمایی بالا، مؤلفه‌های بردار $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{\theta}) = (U_\delta, U_\alpha, U_k^\top)^\top$ به‌صورت زیر حاصل می‌شوند:

$$\mathcal{U}_\delta(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \delta} = \frac{n}{\delta} - 2\sum_{i=1}^{n} \frac{exp(-\alpha log\frac{x}{k})}{1-\bar{\delta}exp(-\alpha log\frac{x}{k})}$$

$$\mathcal{U}_\alpha(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} - \sum_{i=1}^{n} log\frac{x}{k} - 2\bar{\delta}\sum_{i=1}^{n} \frac{log\frac{x}{k}\ exp(-\alpha log\frac{x}{k})}{1-\bar{\delta}exp(-\alpha log\frac{x}{k})}$$

$$\mathcal{U}_k(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial \ell(\theta)}{\partial k} = \alpha\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k} + 2\bar{\delta}\alpha\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k}\frac{lexp(-\alpha log\frac{x}{k})}{1-\bar{\delta}exp(-\alpha log\frac{x}{k})}$$

حل کردن معادلات بالا به دلیل نداشتن یک راه‌حل صریح کار ساده‌ای نیست، چون نمی‌تواند برآورد بیشینه درستنمایی را به‌صورت بسته به دست آورد، محاسبه آن باید به‌صورت عددی با استفاده از حل معادلات تکرارشونده که به نقاط اولیه بستگی دارد انجام شود. ازاین‌رو ما با استفاده از زبان برنامه‌نویسی R و داده‌های تصادفی تولیدشده از توزیع تعمیم‌یافته مارشال اولکین پارتو، برآوردها را به دست می‌آوریم. ماتریس اطلاعات افزارشده دارای مشتقات جزئی دوم که به‌راحتی می‌توان آن‌ها را به دست آورد؛ و در نهایت، ماتریس اطلاعات افراز شده عبارت است از

$$J(\boldsymbol{\theta}) = -\begin{pmatrix} \mathcal{U}_{\delta\delta} & \mathcal{U}_{\delta\alpha} & | & \mathcal{U}_{\delta k}^\top \\ \mathcal{U}_{\alpha\delta} & \mathcal{U}_{\alpha\alpha} & | & \mathcal{U}_{\alpha k}^\top \\ -- & -- & -- & -- \\ \mathcal{U}_{k\delta} & \mathcal{U}_{k\alpha} & | & \mathcal{U}_{kk}^\top \end{pmatrix}_{(\downarrow\delta=\hat{\delta},\alpha=\hat{\alpha},k=\hat{k})}$$

که اعضای آن به‌صورت زیر هستند.

$$\mathcal{U}_{\delta\delta}(\boldsymbol{\theta}) = -n\delta^{-2}$$

$$\mathcal{U}_{\delta\alpha}(\boldsymbol{\theta}) = 2\sum_{i=1}^{n} \frac{log(\frac{x}{k})exp[-\alpha log(\frac{x}{k})]}{\{1-\bar{\delta}exp[-\alpha log(\frac{x}{k})]\}^2}$$

$$\mathcal{U}_{\delta k}(\boldsymbol{\theta}) = -2\alpha\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k}\frac{exp[-\alpha log(\frac{x}{k})]}{\{1-\bar{\delta}exp[-\alpha log(\frac{x}{k})]\}^2}$$

$$\mathcal{U}_{\alpha\alpha}(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{n}{\alpha^2} + 2\bar{\delta}\sum_{i=1}^{n} \frac{[log(\frac{x}{k})]^2\ exp[-\alpha log(\frac{x}{k})]}{\{1-\bar{\delta}exp[-\alpha log(\frac{x}{k})]\}^2}$$

$$\mathcal{U}_{\alpha k}(\boldsymbol{\theta}) = 2\bar{\delta}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k}\frac{exp[-\alpha log(\frac{x}{k})]}{1-\bar{\delta}exp[-\alpha log(\frac{x}{k})]} \times \left[1 - \sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha log(\frac{x}{k})}{1-\bar{\delta}exp[-\alpha log(\frac{x}{k})]}\right] - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{k}$$

$$\mathcal{U}_{kk}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x} + \alpha\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{k^2} - 2\bar{\delta}\alpha\sum_{i=1}^{n}\frac{exp[-\alpha log(\frac{x}{k})]}{1-\bar{\delta}exp[-\alpha log(\frac{x}{k})]} \left[\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k}\frac{exp[-\alpha log(\frac{x}{k})]}{1-\bar{\delta}exp[-\alpha log(\frac{x}{k})]}\right]$$

بنابراین، ماتریس مجانبی واریانس کوواریانس $[\hat{V}]$ برای برآورد بیشینه درستنمایی با معکوس کردن ماتریس اطلاعات افراز شده $J(\underline{\theta})$ به دست می‌آید.

$$[\hat{V}] = J^{-1}(\boldsymbol{\theta}) = -\begin{pmatrix} \widehat{var(\delta)} & cov(\delta,\alpha) & cov(\delta,k) \\ cov(\alpha,\delta) & \widehat{var(\alpha)} & cov(\alpha,k) \\ cov(k,\delta) & cov(k,\alpha) & \widehat{var(k)} \end{pmatrix}_{\downarrow(\hat{\delta},\hat{\alpha},\hat{k})}$$

هنگامی‌که شرایط منظم استاندارد برقرار باشد، می‌توان نشان داد که $\sqrt{n}([\hat{\delta},\hat{\alpha},\hat{k}]^\top - [\delta,\alpha,k]^\top)$ به توزیع نرمال چندمتغیره $N_2(0, K([\alpha,\delta,k])^{-1})$میل می‌کند و $K([\delta,\alpha,k])$ امید ریاضی ماتریس اطلاعات است که برای آن عبارت حدی زیر برقرار است.[1]

$$lim_{n\to\infty} J_n([\delta],\alpha,k) = K([\delta,\alpha,k])$$

بر اساس این مطلب ناحیه‌های اطمینان برای توزیع قابل‌دسترس است. سپس فاصله اطمینان $100(1-\eta)\%$ برای پارامترهای α و δ به‌صورت

$$\left(\hat{\delta}\pm Z_{\frac{\eta}{2}}\sqrt{\widehat{var(\delta)}}\right), \left(\hat{\alpha}\pm Z_{\frac{\eta}{2}}\sqrt{\widehat{var(\alpha)}}\right), \left(\hat{k}\pm Z_{\frac{\eta}{2}}\sqrt{\widehat{var(k)}}\right)$$

داده می‌شود، که $Z_{\frac{\eta}{2}}$ نرمال استاندارد است.

جدول ۱۱. مقادیر عددی برآورد فاصله اطمینان پارامتری برای داده‌های تصادفی تولیدشده از توزیع تعمیم‌یافته مارشال اولکین پارتو

پارامترها	فاصله اطمینان	مقادیر به‌دست‌آمده	
δ	(۰٫۸۲۱, ۱٫۰۵۹)	$\mathcal{U}_{\delta\delta}$	−۱۱۲٫۹۶۳۲
		$\mathcal{U}_{\alpha\delta}$	−۱٫۷۸۹
		$\mathcal{U}_{\delta k}^\top$	−۳۳٫۶۸۸
		$\widehat{var(\delta)}$	۰٫۰۰۳۷
		$cov(\delta,\alpha)$	۰٫۰۰۰۰۵۲
		$cov(\delta,k)$	−۰٫۰۰۰۲۰۸
α	(۴٫۵۶۴, ۴٫۷۸۵۹)	$\mathcal{U}_{\alpha\alpha}$	−۷٫۰۶۸
		$\mathcal{U}_{\alpha k}^\top$	۲۷۹۵٫۰۲۵
		$\widehat{var(\alpha)}$	۰٫۰۰۳۲
		$cov(\alpha,k)$	۰٫۰۰۱۲
k	(۳٫۶۶۶, ۳٫۶۸۸)	$\mathcal{U}_{kk}$	۱۰۹٫۶۳
		$\widehat{var(k)}$	۰٫۰۰۰۰۳۱
		$cov(k,\delta)$	۰٫۰۰۰۷۸
		$cov(kk)$	−۰٫۰۰۰۳۴

۱. برای بررسی اینکه پارامتر δ از نظر آماری متفاوت از یک است به‌عبارت‌دیگر برای آزمون $H_0 : \delta = 1$ در مقابل $H_1 : \delta \neq 1$ ما از آماره $LR = 2\{l(\hat{\delta}) - l(\tilde{\delta})\}$ استفاده می‌کنیم؛ که $\hat{\delta}$ برآورد بیشینه درستنمایی δ تحت H_1 است و $\tilde{\delta}$ برآورد بیشینه

درستنمایی تحت H_0 است. تحت فرض H_0توزیع حدی، توزیع χ^2 با یک درجه آزادی است. اگر مقدار آماره آزمون LR از چندک ٪$(1-\alpha)$۱۰۰ توزیع χ^2 یک درجه آزادی بزرگ‌تر شود، فرض H_0 را رد می‌کنیم.

۲. برای بررسی اینکه پارامتر α از نظر آماری متفاوت از یک است به‌عبارت‌دیگر برای آزمون $H_0 : \alpha = 0$ در مقابل $H_1 : \alpha \neq 0$ ما از آماره $LR = 2\{l(\hat{\alpha}) - l(\tilde{\alpha})\}$ استفاده می‌کنیم؛ که $\hat{\alpha}$ برآورد بیشینه درستنمایی نامقید α تحت H_1 است و $\tilde{\alpha}$ برآورد بیشینه درستنمایی مقید تحت H_0 است. تحت فرض H_0توزیع حدی، توزیع نرمال است. اگر مقدار آماره آزمون LR از چندک ٪$(1-\alpha)$۱۰۰ توزیع نرمال بزرگ‌تر شود، فرض H_0 را رد می‌کنیم.

۳. برای بررسی اینکه پارامتر k از نظر آماری متفاوت از یک است به‌عبارت‌دیگر برای آزمون $H_0 : k = 1$ در مقابل $H_1 : k \neq 1$ ما از آماره $LR = 2\{l(\hat{k}) - l(\tilde{k})\}$ استفاده می‌کنیم؛ که $\hat{k}$ برآورد بیشینه درستنمایی k تحت H_1 است و $\tilde{k}$ برآورد بیشینه درستنمایی تحت H_0 است. تحت فرض H_0توزیع حدی، توزیع χ^2 با یک درجه آزادی است. اگر مقدار آماره آزمون LR از چندک ٪$(1-\alpha)$۱۰۰ توزیع χ^2 یک درجه آزادی بزرگ‌تر شود، فرض H_0 را رد می‌کنیم.

۳.۳ استنباط بیزی برای توزیع تعمیم‌یافته مارشال اولکین پارتو

در این بخش، برآورد بیز از پارامترهای مجهول را تحت توابع زیان مربع خطا، تابع زیان لاینکس، تابع زیان آنتروپی، مربع خطی لگاریتمی و لاینکس اصلاح‌شده را دریافت می‌کنیم. فرض بر این است که پارامترهای δ، α و k مستقل هستند و از توزیع‌های پیشین گاما پیروی می‌کنند.

$$\pi_1(\delta) \propto \delta^{b_1-1} e^{-b_2\delta}$$

$$\pi_2(\alpha) \propto \alpha^{b_3-1} e^{-b_4\alpha}$$

$$\pi_3(k) \propto k^{b_5-1} e^{-b_6 k}$$

در اینجا تمام ابرپارامترهای b_1، b_2، b_3، b_4، b_5 و b_6 معلوم و غیر منفی فرض شده است. توزیع توأم پیشین برای α و δ برابر

$$\pi(\delta, \delta) \propto \delta^{b_1-1} e^{-b_2\delta} \alpha^{b_3-1} e^{-b_4\alpha} k^{b_5-1} e^{-b_6 k}$$

بنابراین تابع توأم پسین به‌صورت زیر به‌دست‌آمده است

$$\pi(\delta, \alpha, k|\boldsymbol{x}) \propto \delta^{n+b_1-1} \alpha^{n+b_2-1} k^{b_5-1} e^{-\alpha\{\sum_{i=2}^{n} log(x_i)+b_4\}-b_6 k}$$
$$\prod_{i=1}^{n} (\frac{1}{x_i}\{1 - \hat{\delta} exp(-\alpha log(x_i/k))\}^{-2}$$

واضح است که محاسبه تحلیلی عبارت بالا غیرممکن است زیرا به دست آوردن فرم‌های بسته برای توزیع‌های پسین برای هر پارامتر بسیار دشوار است. روش‌های مختلفی برای حل این انتگرال‌ها وجود دارد. روش اولی که برای تقریب این انتگرال استفاده کردیم روش تقریب لیندلی است. همان‌طور که در بخش ۵.۱ گفتیم داریم

$$\begin{aligned} I(x) &= E\big(u(\delta, \alpha, k)|X = x\big) \\ &= \frac{\int_\delta \int_\alpha \int_k u(\delta, \alpha, k) e^{L(\boldsymbol{x}|\delta,\alpha,k)+\rho(\delta,\alpha,k)} d\theta d\alpha dk}{\int_\delta \int_\alpha \int_k e^{L(\boldsymbol{x}|\delta,\alpha,k)+\rho(\delta,\alpha,k)} d\theta d\alpha dk} \end{aligned}$$

که $u(\delta, \alpha, k)$ تابعی از θ، α و k است و $L(\delta, \alpha, k)$ و $\rho(\delta, \alpha, k)$ به ترتیب تابع لگاریتم درستنمایی و لگاریتم توزیع پیشین توأم δ، α و k است؛ که کاهش‌یافته این معادله بر اساس تقریب لیندلی برای $m = 3$ برابر است با:

$$\begin{aligned} I(\boldsymbol{x}) = u(\hat{\delta}, \hat{\alpha}, \hat{k}) &+ \frac{1}{2}\Big[(\hat{u}_{\delta\delta} + 2\hat{u}_\delta\hat{\rho}_\delta)\hat{\sigma}_{\delta\delta} + (\hat{u}_{\alpha\alpha} + 2\hat{u}_\alpha\hat{\rho}_\alpha)\hat{\sigma}_{\alpha\alpha}) \\ &+ (\hat{u}_{kk} + 2\hat{u}_k\hat{\rho}_k)\hat{\sigma}_{kk}\Big] \\ &+ \frac{1}{2}\Big[\hat{u}_\delta(\hat{L}_{\delta\delta\delta}\hat{\sigma}_{\delta\delta}\hat{\sigma}_{\delta\delta} + \hat{L}_{\alpha\alpha\delta}\hat{\sigma}_{\delta\delta}\hat{\sigma}_{\alpha\alpha} + \hat{L}_{kk\delta} \\ &\hat{\sigma}_{\delta\delta}\hat{\sigma}_{kk}) + \hat{u}_\alpha(\hat{L}_{\delta\delta\alpha}\hat{\sigma}_{\delta\delta}\hat{\sigma}_{\alpha\alpha} + \hat{L}_{\alpha\alpha\alpha}\hat{\sigma}_{\alpha\alpha}\hat{\sigma}_{\alpha\alpha} + \hat{L}_{kk\alpha}\hat{\sigma}_{\alpha\alpha}\hat{\sigma}_{kk}) \\ &+ \hat{u}_k(\hat{L}_{\delta\delta k}\hat{\sigma}_{\delta\delta}\hat{\sigma}_{kk} + \hat{L}_{\alpha\alpha k}\hat{\sigma}_{\alpha\alpha}\hat{\sigma}_{kk} + \hat{L}_{kkk}\hat{\sigma}_{kk}\hat{\sigma}_{kk})\Big] \end{aligned}$$

درحالی‌که :

$$\sigma_{ij}=\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}=-L_{ij}^{-1}, i,j=\delta,\alpha,k$$

$$L_{11}=-n\delta^{-2}, L_{22}=-\frac{n}{\alpha^2}+2\hat{\delta}\sum_{i=n}^{n}\frac{[log(\frac{x}{k})]^2 exp(-\alpha log(\frac{x}{k}))}{\{1-\bar{\delta}exp[-\alpha log(\frac{x}{k})]\}^2},$$

$$D=L_{11}L_{23}^2-L_{11}L_{22}L_{33}+L_{13}^2L_{22},$$

$$\sigma_{11}=\frac{L_{22}L_{33}-L_{23}^2}{D}, \quad \sigma_{22}=\frac{L_{11}L_{33}-L_{13}^2}{D}, \quad \sigma_{33}=\frac{L_{11}L_{22}}{D},$$

$$\sigma_{12}=\sigma_{21}=\frac{L_{11}L_{13}}{D}, \quad \sigma_{13}=\sigma_{31}=\frac{L_{13}L_{22}}{D}, \quad \sigma_{23}=\sigma_{32}=\frac{-L_{11}L_{23}}{D},$$

$$L_{33}=\sum_{i=n}^{n}\frac{1}{x}+\alpha\sum_{i=n}^{n}\frac{1}{k^2}-2\bar{\delta}\alpha\sum_{i=n}^{n}\frac{exp(-\alpha log(\frac{x}{k}))}{1-\bar{\delta}exp(-\alpha log(\frac{x}{k}))}$$
$$\times\left[\frac{1}{k^2}-\frac{1}{k}\frac{\alpha log(\frac{x}{k})}{1-\bar{\delta}-exp(-\alpha log(\frac{x}{k}))}\right],$$

$$L_{13}=-2\alpha\sum_{i=n}^{n}\frac{1}{k}\frac{exp(-\alpha log(\frac{x}{k}))}{\{1-\bar{\delta}exp[-\alpha log(\frac{x}{k})]\}^2},$$

$$L_{23}=2\hat{\delta}\sum_{i=n}^{n}\frac{1}{k}\frac{exp(-\alpha log(\frac{x}{k}))}{1-\bar{\delta}exp[-\alpha log(\frac{x}{k})]}\left[1-\sum_{i=n}^{n}\frac{\alpha log(\frac{x}{k})}{1-\bar{\delta}exp[-\alpha log(\frac{x}{k})]}\right]$$

$$-\sum_{i=n}^{n}\frac{1}{k},\quad \rho=(b_1-1)ln\delta+(b_3-1)ln\alpha+(b_5-1)lnk-b_2\delta-b_4\alpha-b_6k,$$

$$p_1=\frac{\partial\rho}{\partial\delta}=\frac{b_1-1}{\delta}-b_2,\ \rho_2=\frac{\partial\rho}{\partial\alpha}=\frac{b_3-1}{\alpha}-b_4,$$

$$\rho_3=\frac{\partial\rho}{\partial k}=\frac{b_5-1}{k}-b_6$$

باقی $\hat{L}_{ijk}$ها با برنامه R به‌دست‌آمده است. برای مقادیری که در بالا به دست آمد، برآورد بیزی پارامترها تحت توابع زیان مربع خطا، آنتروپی، لاینکس، مربع خطی لگاریتمی و لاینکس اصلاح‌شده در جدول (۱۲) آمده است. به‌طوری‌که $\hat{\delta}$، $\hat{\alpha}$ و $\hat{k}$ برآورد پارامتر δ، α و k است.

جدول ۱۲. برآوردهای بیز تحت تابع زیان‌های مختلف به روش لیندلی

تابع زیان	پارامتر	برآورد بیز
مربع خطا	δ	$\hat{\delta}+\hat{\rho}_\delta\hat{\sigma}_{\delta\delta}+\frac{1}{2}[\hat{\sigma}_{\delta\delta}(\hat{L}_{\delta\delta\delta}\hat{\sigma}_{\delta\delta}+\hat{L}_{\alpha\alpha\delta}\hat{\sigma}_{\alpha\alpha})+\hat{L}_{kk\delta}\hat{\sigma}_{kk}]$
	α	$\hat{\alpha}+\hat{\rho}_\alpha\hat{\sigma}_{\alpha\alpha}+\frac{1}{2}[\hat{\sigma}_{\alpha\alpha}(\hat{L}_{\delta\delta\alpha}\hat{\sigma}_{\delta\delta}+\hat{L}_{\alpha\alpha\alpha}\hat{\sigma}_{\alpha\alpha})+\hat{L}_{kk\alpha}\hat{\sigma}_{kk}]$
	k	$\hat{k}+\hat{\rho}_k\hat{\sigma}_{kk}+\frac{1}{2}[\hat{\sigma}_{kk}(\hat{L}_{\delta\delta k}\hat{\sigma}_{\delta\delta}+\hat{L}_{\alpha\alpha k}\hat{\sigma}_{\alpha\alpha})+\hat{L}_{kkk}\hat{\sigma}_{kk}]$
آنتروپی	δ	$\hat{\delta}[1+(\frac{1}{\hat{\delta}^2}-\frac{1}{\hat{\delta}}\hat{\rho}_\delta)\hat{\sigma}_{\delta\delta}-\frac{1}{2\hat{\delta}}\hat{\sigma}_{\delta\delta}(\hat{L}_{\delta\delta\delta}\hat{\sigma}_{\delta\delta}+\hat{L}_{\alpha\alpha\delta}\hat{\sigma}_{\alpha\alpha}+\hat{L}_{kk\alpha}\hat{\sigma}_{kk})]^{-1}$
	α	$\hat{\alpha}[1+(\frac{1}{\hat{\alpha}^2}-\frac{1}{\hat{\alpha}}\hat{\rho}_\alpha)\hat{\sigma}_{\alpha\alpha}-\frac{1}{2\hat{\alpha}}\hat{\sigma}_{\alpha\alpha}(\hat{L}_{\delta\delta\alpha}\hat{\sigma}_{\delta\delta}+\hat{L}_{\alpha\alpha\alpha}\hat{\sigma}_{\alpha\alpha}+\hat{L}_{kk\alpha}\hat{\sigma}_{kk})]^{-1}$
	k	$\hat{k}[1+(\frac{1}{\hat{k}^2}-\frac{1}{\hat{k}}\hat{\rho}_k)\hat{\sigma}_{kk}-\frac{1}{2\hat{k}}\hat{\sigma}_{kk}(\hat{L}_{\delta\delta k}\hat{\sigma}_{\delta\delta}+\hat{L}_{\alpha\alpha k}\hat{\sigma}_{\alpha\alpha}\hat{L}_{kkk}\hat{\sigma}_{kk})]^{-1}$
لاینکس	δ	$\hat{\delta}-ln\{1+[(\frac{1}{2}-\hat{\rho}_\delta)\sigma_{\delta\delta}-\frac{1}{2}\hat{\sigma}_{\delta\delta}(\hat{L}_{\delta\delta\delta}\hat{\sigma}_{\delta\delta}+\hat{L}_{\alpha\alpha\delta}\hat{\sigma}_{\alpha\alpha}+\hat{L}_{kk\delta}\hat{\sigma}_{kk}]\}$
	α	$\hat{\alpha}-ln\{1+[(\frac{1}{2}-\hat{\rho}_\alpha)\sigma_{\alpha\alpha}-\frac{1}{2}\hat{\sigma}_{\alpha\alpha}(\hat{L}_{\delta\delta\alpha}\hat{\sigma}_{\delta\delta}+\hat{L}_{\alpha\alpha\alpha}\hat{\sigma}_{\alpha\alpha}+\hat{L}_{kk\alpha}\hat{\sigma}_{kk}]\}$
	k	$\hat{k}-ln\{1+[(\frac{1}{2}-\hat{\rho}_k)\sigma_{kk}-\frac{1}{2}\hat{\sigma}_{kk}(\hat{L}_{\delta\delta k}\hat{\sigma}_{\delta\delta}+\hat{L}_{\alpha\alpha k}\hat{\sigma}_{\alpha\alpha}+\hat{L}_{kkk}\hat{\sigma}_{kk}]\}$
مربع خطای لگاریتمی	δ	$\hat{\delta}exp\left[\frac{\hat{\sigma}_{\delta\delta}}{2\hat{\delta}}\big(-\frac{1}{\hat{\delta}}+2\hat{\rho}_\delta+(\hat{L}_{\delta\delta\delta}\hat{\sigma}_{\delta\delta}+\hat{L}_{\alpha\alpha\delta}\hat{\sigma}_{\alpha\alpha}+\hat{L}_{kk\delta}\hat{\sigma}_{kk})\big)\right]$
	α	$\hat{\alpha}exp\left[\frac{\hat{\sigma}_{\alpha\alpha}}{2\hat{\alpha}}\big(-\frac{1}{\hat{\alpha}}+2\hat{\rho}_\alpha+(\hat{L}_{\delta\delta\alpha}\hat{\sigma}_{\delta\delta}+\hat{L}_{\alpha\alpha\alpha}\hat{\sigma}_{\alpha\alpha}+\hat{L}_{kk\alpha}\hat{\sigma}_{kk})\big)\right]$
	k	$\hat{k}exp\left[\frac{\hat{\sigma}_{kk}}{2\hat{k}}\big(-\frac{1}{\hat{k}}+2\hat{\rho}_\alpha+(\hat{L}_{\delta\delta k}\hat{\sigma}_{\delta\delta}+\hat{L}_{\alpha\alpha k}\hat{\sigma}_{\alpha\alpha}+\hat{L}_{kkk}\hat{\sigma}_{kk})\big)\right]$
لاینکس اصلاح‌شده	δ	$\hat{\delta}\left[1+(\frac{c(c+1)}{2\hat{\delta}^2}-\frac{c}{\hat{\delta}}\hat{\rho})\hat{\sigma}_{\delta\delta}-\frac{c}{2\hat{\delta}}\hat{\sigma}_{\delta\delta}(\hat{L}_{\delta\delta\delta}\hat{\sigma}_{\delta\delta}+\hat{L}_{\alpha\alpha\delta}\hat{\sigma}_{\alpha\alpha}\hat{L}_{kk\delta}\hat{\sigma}_{kk})\right]^{-\frac{1}{c}}$
	α	$\hat{\alpha}\left[1+(\frac{c(c+1)}{2\hat{\alpha}^2}-\frac{c}{\hat{\alpha}}\hat{\rho})\hat{\sigma}_{\alpha\alpha}-\frac{c}{2\hat{\alpha}}\hat{\sigma}_{\alpha\alpha}(\hat{L}_{\delta\delta\alpha}\hat{\sigma}_{\delta\delta}+\hat{L}_{\alpha\alpha\alpha}\hat{\sigma}_{\alpha\alpha}\hat{L}_{kk\alpha}\hat{\sigma}_{kk})\right]^{-\frac{1}{c}}$
	k	$\hat{k}\left[1+(\frac{c(c+1)}{2\hat{k}^2}-\frac{c}{\hat{k}}\hat{\rho})\hat{\sigma}_{kk}-\frac{c}{2\hat{k}}\hat{\sigma}_{kk}(\hat{L}_{\delta\delta k}\hat{\sigma}_{\delta\delta}+\hat{L}_{\alpha\alpha k}\hat{\sigma}_{\alpha\alpha}+\hat{L}_{kkk}\hat{\sigma}_{kk})\right]^{-\frac{1}{c}}$

برآورد بیزی پارامترها برای تشکیل بازه اطمینان بیزی با استفاده از نرم‌افزار R محاسبه و در مطالعات شبیه‌سازی ذکرشده است.

۴.۳ روش زنجیره مارکوف مونت‌کارلو

برآورد بیز تحت تابع زیان مربع خطا

$$u_{\hat{B}S}(\delta,\alpha,k)=E[u(\delta,\alpha,k)|\boldsymbol{x}]$$
$$=\int_\delta\int_\alpha\int_k u(\delta,\alpha,k)\pi^*(\delta,\alpha,k|\boldsymbol{x})dk\ d\alpha\ d\delta$$

برآورد بیز تحت تابع زیان آنتروپی

$$u_{\hat{B}G}(\delta,\alpha,k)=\big[E[u(\delta,\alpha,k)^{-a}|\boldsymbol{x}]\big]^{-\frac{1}{a}}$$
$$=\Big(\int_\delta\int_\alpha\int_k[u(\delta,\alpha,k)]^{-a}\pi^*(\delta,\alpha,k|\boldsymbol{x})dk\ d\alpha\ d\delta\Big)^{-\frac{1}{a}}$$

برآورد بیز تحت تابع زیان لاینکس

$$u_{\hat{B}L}(\delta,\alpha,k)=-\frac{1}{a}ln\big[E[e^{-au(\delta,\alpha,k)}|\boldsymbol{x}]\big]$$
$$=-\frac{1}{a}ln\Big(\int_\delta\int_\alpha\int_k e^{-au(\delta,\alpha,k)}\pi^*(\delta,\alpha,k|\boldsymbol{x})dk\ d\alpha\ d\delta\Big)$$

برآورد بیز تحت تابع زیان لاینکس اصلاح‌شده

$$u_{\hat{B}mL}(\delta,\alpha,k)=exp\big[E[u(\delta,\alpha,k)^{-a}|\boldsymbol{x}]\big]$$
$$=exp\Big(\int_\delta\int_\alpha\int_k[u(\delta,\alpha,k)]^{-a}\pi^*(\delta,\alpha,k|\boldsymbol{x})dk\ d\alpha\ d\delta\Big)$$

برآورد بیز تحت تابع زیان لگاریتم مربع خطا

$$u_{\hat{B}SL}(\delta,\alpha,k)=exp\big[E[ln(u(\delta,\alpha,k))^{-a}|\boldsymbol{x}]\big]$$
$$=exp\Big(\int_\delta\int_\alpha\int_k[ln(u(\delta,\alpha,k))]^{-a}\pi^*(\delta,\alpha,k|\boldsymbol{x})dk\ d\alpha\ d\delta\Big)$$

محاسبه معادلات بالا به‌صورت تحلیل بسیار دشوار است؛ بنابراین روش زنجیره مارکوف مونت‌کارلو را استفاده کردیم. نمونه‌هایی از تابع

چگالی توأم پسین تولید می‌کنیم و معادلات بالا را تقریب می‌زنیم. هدف اصلی روش مونت‌کارلو زنجیره مارکوف محاسبه مقدار تقریبی انتگرال‌های بالا است.

طبق الگوریتم گیبس باید از توزیع شرطی کامل پسین پارامترهای مختلف استفاده کرد؛ توزیع شرطی کامل پسین پارامترهای مدل توزیع تعمیم‌یافته مارشال اولکین پارتو به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$\pi_1^*(\delta|other) \propto \delta^{n+b_1-1} e^{-b_2\delta} \prod_{i=1}^{n}\{1-\bar{\delta}exp(-\alpha log(\frac{x_i}{k}))\}^{-2} \quad (۲۷)$$

$$\pi_2^*(\alpha|other) \propto \alpha^{n+b_3-1} e^{-\alpha\{\sum_{i=1}^{n} log(\frac{x_i}{k})+b_4\}} \prod_{i=1}^{n}\{1-\bar{\delta}exp(-\alpha log(\frac{x_i}{k}))\}^{-2} \quad (۲۸)$$

$$\pi_3^*(k|other) \propto k^{b_5-1} e^{-\alpha\sum_{i=1}^{n} log(\frac{x_i}{k})-b_6 k} \prod_{i=1}^{n}\{1-\bar{\delta}exp(-\alpha log(\frac{x_i}{k}))\}^{-2} \quad (۲۹)$$

مراحل این الگوریتم به شرح زیر است:

۱. مقدار اولیه $\Theta^{(0)} = \left(\delta^{(0)}, \alpha^{(0)}, k^{(0)}\right)$ را در نظر بگیرید.

۲. $i = 1$ قرار می‌دهیم.

۳. با استفاده از توزیع طراحی‌شده (۲۷)، (۲۸) و (۲۹) مقادیر $(\delta^*, \alpha^*, k^*)$ را تولید کنید.

۴. مرحله ۲ را برای $i = 1, 2, 3, ..., N$ و مقادیر $(\delta^{(1)}, \alpha^{(1)}, k^{(1)}), \cdots, (\delta^{(N)}, \alpha^{(N)}, k^{(N)})$ تکرار می‌کنیم.

بر این اساس خواهیم داشت:

$$\mathbb{E}(u(\delta,\alpha,k)|y) = \int u(\delta,\alpha,k)\ \pi(\delta,\alpha,k|y)d\delta d\alpha dk = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u(\delta_j,\alpha_j,k_j)$$

در نتیجه، برآورد پارامترها بر اساس توابع زیان مختلف در جدول (۱۳) خلاصه‌شده است:

جدول ۱۳. برآوردهای بیز تحت تابع زیان‌های مختلف به روش زنجیره مارکوف مونت‌کارلو

	برآورد
مربع خطا	$\hat{\delta}_S = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta^{(i)}$
	$\hat{\delta}_S = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta^{(i)}$
	$\hat{k}_S = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}k^{(i)}$
آنتروپی	$\hat{\delta}_E = \frac{N}{\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\delta^{(i)}}}$
	$\hat{\alpha}_E = \frac{N}{\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\alpha^{(i)}}}$
	$\hat{k}_E = \frac{N}{\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{k^{(i)}}}$
لاینکس	$\hat{\delta}_L = -ln\left\{\frac{\sum_{i=1}^{N}exp(-\delta^{(i)})}{N}\right\}$
	$\hat{\alpha}_L = -ln\left\{\frac{\sum_{i=1}^{N}exp(-\alpha^{(i)})}{N}\right\}$
	$\hat{k}_L = -ln\left\{\frac{\sum_{i=1}^{N}exp(-k^{(i)})}{N}\right\}$
لاینکس اصلاح‌شده	$\hat{\delta}_{mL} = \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\delta^{(i)})^{-\frac{1}{c}}\right)^{-\frac{1}{c}}$
	$\hat{\alpha}_{mL} = \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\alpha^{(i)})^{-\frac{1}{c}}\right)^{-\frac{1}{c}}$
	$\hat{k}_{mL} = \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(k^{(i)})^{-\frac{1}{c}}\right)^{-\frac{1}{c}}$
مربع خطای لگاریتمی	$\hat{\delta}_{SL} = exp\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta^{(i)}\right)$
	$\hat{\alpha}_{SL} = exp\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\alpha^{(i)}\right)$
	$\hat{\alpha}_{SL} = exp\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\alpha^{(i)}\right)$

مطالعات شبیه‌سازی

در این بخش، یک مطالعه شبیه‌سازی برای اعمال روش‌های بیزی زنجیره مارکوف مونت‌کارلو و لیندلی بر اساس توابع زیان مختلف انجام شده است. ازآنجایی‌که در رویکرد بیزی، انتخاب ابرپارامترهای توزیع پسین اهمیت زیادی دارد، بنابراین برای بررسی مقادیر مختلف ابرپارامترها بر روی نتایج نهایی، از پس زمینه‌های اطلاعاتی و نا آگاهانه استفاده می‌شود. در مورد پس‌زمینه‌های اطلاعاتی پیشین، ابرپارامترها طوری تنظیم می‌شوند که میانگین توزیع‌های پیشین برابر با مقدار حدسی پارامترهای مدل باشد. برای بررسی بیشتر می‌توان دو دسته از ابرپارامترها را در نظر گرفت که در حالت اول واریانس پسین‌ها کم و در حالت دوم واریانس پسین‌ها زیاد است؛ اما در حالت ناخودآگاه فرض بر این بود که هیچ اطلاعاتی در مورد ابرپارامترها در دسترس نبود و مقدار آن‌ها صفر در نظر گرفته شد. در این مطالعه شبیه‌سازی، برای توزیع تعمیم‌یافته مارشال اولکین ریلی پارامترهای مدل به‌صورت $\delta = \alpha = 2$ و برای توزیع تعمیم‌یافته مارشال اولکین پارتو پارامترهای مدل به‌صورت $\delta = \alpha = k = 2$ در نظر گرفته‌شده است. در مورد پیشینه‌های اطلاعاتی با واریانس کم، ابرپارامترهای توزیع تعمیم‌یافته مارشال اولکین ریلی

به‌صورت $b_1 = b_3 = 4$ و ابرپارامترهای توزیع تعمیم‌یافته مارشال اولکین پارتو $b_1 = b_3 = b_5 = 4$، $b_2 = b_4 = b_6 = 2$ در نظر گرفته‌شده است و در نتیجه میانگین و واریانس توزیع‌های پیشین به ترتیب ۲ و ۱ است؛ اما در مورد توزیع‌های اطلاعاتی با واریانس زیاد، ابرپارامترها به‌صورت $b_1 = b_3 = b_5 = 0.4$، $b_2 = b_4 = b_6 = 0.2$ در نظر گرفته می‌شوند، در این حالت میانگین پسین‌ها مانند قبل ۲ به دست می‌آید؛ اما واریانس آن‌ها بزرگ‌تر از حالت پیشین و برابر با ۱۰ است.

در ادامه، ۱۰۰۰ نمونه شبیه‌سازی‌شده با اندازه‌های $n = 20$، ۳۰ و ۵۰ از توزیع‌های تعمیم‌یافته مارشال اولکین ریلی و پارتو تولید و برآوردهای بیزی بر اساس هر دو روش و توابع زیان مختلف به دست آمد و در نهایت مجذورهای خطای میانگین آن‌ها در جداول مربوطه گزارش‌شده است. توجه داشته باشید که برای اجرای روش زنجیره مارکوف مونت‌کارلو برای به دست آوردن برآورد بیزی از پارامترها و برای دستیابی به همگرایی پارامترها و همچنین همگرایی زنجیره مارکوف تولیدشده به توزیع‌های ثابت آن، این زنجیره ۴۰۰۰ بار تکرار می‌شود و ۱۰۰۰ تکرار اولیه برای محاسبه برآوردها نادیده گرفته می‌شود. به‌منظور پیاده‌سازی الگوریتم متروپلیس-هستینگس برای تولید نمونه از توزیع‌های تمام شرطی با توجه به ارتباط بین توزیع گاما و توزیع نمایی، می‌توان توزیع پیشنهادی هر یک از الگوریتم‌ها را نمایی در نظر گرفت؛ بنابراین در این مرحله امید ریاضی و واریانس توزیع پیشنهادی به ترتیب برابر با $\frac{1}{\delta^{(t)}}$ و $\frac{1}{2(\delta^{(t)})}$ خواهد بود. برای تولید نمونه‌ی $(t+1)$ از توزیع پسین تمام شرطی (۲۱) بر اساس الگوریتم متروپلیس-هستینگس به‌صورت زیر عمل می‌شود:

۱. $\delta^* \sim \exp\left(\delta^{(t)}\right)$

۲. $H = \frac{\pi_1^*\left(\delta^* | \alpha^{(t)}\right) * \mathrm{dexp}\left(\delta^{(t)} | \delta^*\right)}{\pi_1^*\left(\delta^{(t)} | \alpha^{(t)}\right) * \mathrm{dexp}\left(\delta^* | \delta^{(t)}\right)}$

۳. $\tilde{u} \sim uniform(0, 1)$

۴. $if(\tilde{u} \leq H)\left\{\delta^{(t+1)} = \delta^*\right\} else \left\{\delta^{(t+1)} = \delta^{(t)}\right\}$

و پس از تولید نمونه‌ی $\delta^{(t+1)}$ به‌طور مشابه، برای تولید نمونه‌ی $(t+1)$ از توزیع پسین تمام شرطی (۲۲) بر اساس الگوریتم متروپلیس-هستینگس به‌صورت زیر عمل می‌شود:

۱. $\alpha^* \sim \exp\left(\alpha^{(t)}\right)$

۲. $H = \frac{\pi_2^*\left(\alpha^* | \delta^{(t+1)}\right) * \mathrm{dexp}\left(\alpha^{(t)} | \alpha^*\right)}{\pi_2^*\left(\alpha^{(t)} | \delta^{(t+1)}\right) * \mathrm{dexp}\left(\alpha^* | \alpha^{(t)}\right)}$

۳. $\tilde{u} \sim uniform(0, 1)$

۴. $if(\tilde{u} \leq H)\left\{\alpha^{(t+1)} = \alpha^*\right\} else \left\{\alpha^{(t+1)} = \alpha^{(t)}\right\}$

که در آن منظور $dexp(x \mid y)$ مقدار تابع چگالی نمایی با پارامتر y در نقطه x است.

جدول ۱۴. میانگین مربعات خطا برای توزیع تعمیم‌یافته مارشال اولکین ریلی، حالت پیشین با واریانس کم

تعداد نمونه n	تابع زیان	زنجیره مارکوف مونت‌کارلو		لیندلی	
		δ	α	δ	α
۲۰	مربع خطا	۱٫۰۹۸۵۶	۰٫۸۵۶۶۳	۲٫۱۹۶۸۱	۲٫۰۰۶۶۳
	آنتروپی	۱٫۲۸۵۴۱	۰٫۹۶۱۵۴	۲٫۳۴۷۰۶	۲٫۰۱۲۹۷
	لاینکس	۱٫۳۲۰۸۹	۰٫۹۶۲۲۳	۲٫۳۵۰۶۱	۲٫۰۳۹۴۴
	مربع خطای لگاریتمی	۲٫۳۰۱۵۲	۰٫۹۸۲۵۸۷	۳٫۲۷۲۹۷	۲٫۰۳۹۴۴
	لاینکس اصلاح‌شده	۱٫۳۶۱۵۴	۰٫۸۶۴۵۸	۲٫۴۹۰۴۴۰	۲٫۰۰۷۸
۳۰	مربع خطا	۱٫۰۰۵۶۲	۰٫۰۸۴۴۰۲	۲٫۱۳۲۳۶	۲٫۰۰۴۴۲
	آنتروپی	۱٫۱۵۴۵۶	۰٫۸۸۲۵۴	۲٫۲۲۰۶۳۶	۲٫۰۰۸۶۳
	لاینکس	۱٫۱۵۲۳۵	۰٫۸۸۲۵۴	۲٫۲۲۱۵۳	۲٫۰۰۸۶۳
	مربع خطای لگاریتمی	۱٫۵۶۲۸۴	۰٫۹۲۵۵۶	۲٫۷۸۴۹۵	۲٫۰۲۶۲۱
	لاینکس اصلاح‌شده	۱٫۰۵۰۵	۰٫۸۵۸۸۲	۲٫۳۳۰۴۴	۲٫۰۰۵۲
۵۰	مربع خطا	۱٫۰۳۶۴۱	۱٫۰۰۰۱۳	۲٫۰۷۸۹۲	۲٫۰۰۲۶۵
	آنتروپی	۱٫۰۶۳۵۲	۰٫۸۲۰۳۴	۲٫۱۲۶۰۴	۲٫۰۰۵۱۶
	لاینکس	۱٫۰۶۳۵۲	۰٫۸۲۰۳۴	۲٫۱۲۶۲۰	۲٫۰۰۵۱۶
	مربع خطای لگاریتمی	۱٫۲۱۳۱۴	۱٫۰۲۱۵۶	۲٫۴۳۶۶۹	۲٫۰۱۵۶۷
	لاینکس اصلاح‌شده	۱٫۰۶۴۵۱	۰٫۷۹۱۲۵	۲٫۱۹۶۷۸	۲٫۰۰۳۱۱

جدول ۱۵. میانگین مربعات خطا برای توزیع تعمیم‌یافته مارشال اولکین ریلی، حالت پیشین با واریانس زیاد

تعداد نمونه n	تابع زیان	زنجیره مارکوف مونت‌کارلو		لیندلی	
		δ	α	δ	α
۲۰	مربع خطا	۲٫۲۶۳۰۴	۱٫۷۶۴۶۷	۴٫۵۲۵۴۲	۴٫۱۳۳۶۷
	آنتروپی	۲٫۶۴۷۹۴	۱٫۹۸۰۷۸	۴٫۸۳۴۹۵	۴٫۱۴۶۷۲
	لاینکس	۲٫۷۲۱۰۳	۱٫۹۸۲۱۹	۴٫۸۴۲۲۵	۴٫۱۴۶۷۲
	مربع خطای لگاریتمی	۴٫۷۴۱۱۴	۲٫۰۲۴۱۲	۶٫۷۴۲۳۲	۴٫۲۰۱۲۴
	لاینکس اصلاح‌شده	۲٫۸۰۴۷۸	۱٫۷۸۱۰۳	۵٫۱۳۰۳	۴٫۱۳۶۰۷
۳۰	مربع خطا	۲٫۰۷۱۵۷	۱٫۷۳۸۶۹	۴٫۳۹۲۶۸	۴٫۱۲۹۱۲
	آنتروپی	۲٫۳۷۸۴	۱٫۸۱۸۰۴	۴٫۵۷۴۵۱	۴٫۱۳۷۷۸
	لاینکس	۲٫۳۷۳۸۵	۴٫۵۷۴۵۱	۴٫۵۷۴۵۱	۴٫۱۳۷۷۸
	مربع خطای لگاریتمی	۳٫۲۱۹۴۵	۱٫۹۰۶۶۶	۵٫۷۳۷۰۰	۴٫۱۷۳۹۹
	لاینکس اصلاح‌شده	۲٫۱۶۴۰۳	۱٫۷۶۹۱۷	۴٫۸۰۰۷۱	۴٫۱۳۰۷۲
۵۰	مربع خطا	۲٫۱۳۵۰۱	۲٫۰۶۰۲۷	۴٫۲۸۲۵۹	۴٫۱۲۵۴۶
	آنتروپی	۲٫۱۹۰۸۵	۱٫۶۸۹۹	۴٫۳۷۹۶۴	۴٫۱۳۰۶۴
	لاینکس	۲٫۱۹۰۸۵	۱٫۶۸۹۹	۴٫۳۷۹۹۹	۴٫۱۳۰۶۴
	مربع خطای لگاریتمی	۲٫۴۹۹۰۷	۲٫۱۰۴۴۲	۵٫۰۱۹۵۹	۴٫۱۵۲۲۹
	لاینکس اصلاح‌شده	۲٫۱۹۲۸۹	۱٫۶۲۹۹۷	۴٫۵۲۵۳۷	۴٫۱۲۶۴۲

جدول ۱۶. میانگین مربعات خطا برای توزیع تعمیم‌یافته مارشال اولکین ریلی، حالت پیشین نا آگاهی

تعداد نمونه n	تابع زیان	زنجیره مارکوف مونت‌کارلو		لیندلی	
		δ	α	δ	α
۲۰	مربع خطا	۳٫۱۴۱۸۹	۲٫۴۴۹۹۸	۶٫۲۸۲۸۷	۵٫۷۳۸۹۸
	آنتروپی	۳٫۶۷۶۲۷	۲٫۷۵۰۰۲	۶٫۷۱۲۶	۵٫۷۵۷۱
	لاینکس	۳٫۷۷۷۷۴	۲٫۷۵۱۹۸	۶٫۷۲۲۷۴	۵٫۷۵۷۱
	مربع خطای لگاریتمی	۶٫۵۸۲۳۶	۲٫۸۱۰۱۹	۹٫۳۶۰۷	۵٫۸۳۲۷۹
	لاینکس اصلاح‌شده	۳٫۸۹۴۰۲	۲٫۴۷۲۷	۷٫۱۲۲۶۵	۵٫۷۴۲۳۱۹
۳۰	مربع خطا	۲٫۸۷۶۰۷	۲٫۴۱۳۹۱	۶٫۰۹۸۵۷	۵٫۷۳۲۶۶
	آنتروپی	۳٫۳۰۲۰۵	۲٫۵۲۴۰۷	۶٫۳۵۱۰۱	۵٫۷۴۴۶۸
	لاینکس	۳٫۲۹۵۷۳	۲٫۵۲۴۰۷	۶٫۳۵۳۵۹	۵٫۷۴۴۶۸
	مربع خطای لگاریتمی	۴٫۴۶۹۷۲	۲٫۶۴۷۱۱	۷٫۹۶۴۹۶	۵٫۷۹۴۹۶
	لاینکس اصلاح‌شده	۳٫۰۰۴۴۳	۲٫۴۵۶۲۳	۶٫۶۶۵۰۶	۵٫۷۳۴۸۹
۵۰	مربع خطا	۲٫۹۶۴۱۴	۲٫۸۶۰۳۷	۵٫۹۴۵۷۳	۵٫۷۲۷۵۹
	آنتروپی	۳٫۰۴۱۶۷	۲٫۳۴۶۱۷	۶٫۰۸۰۴۷	۵٫۷۳۴۷
	لاینکس	۳٫۰۴۱۶۷	۲٫۳۴۶۱۷	۶٫۰۸۰۹۵	۵٫۷۳۴۷
	مربع خطای لگاریتمی	۳٫۴۶۹۵۹	۲٫۹۲۱۶۷	۶٫۹۶۸۹۵	۵٫۷۶۴۸۳
	لاینکس اصلاح‌شده	۳٫۰۴۴۵۰	۲٫۲۶۲۹۷	۶٫۲۸۲۸۰	۵٫۷۲۸۹۱

جدول ۱۷. میانگین مربعات خطا برای توزیع تعمیم‌یافته مارشال اولکین پارتو، حالت پیشین با واریانس کم

تعداد نمونه n	تابع زیان	زنجیره مارکوف مونت‌کارلو			لیندلی		
		δ	α	k	δ	α	k
۲۰	مربع خطا	۰٫۹۸۹۸۸	۰٫۵۱۳۵۱	۰٫۹۸۹۵۲	۱٫۹۹۹۱۹	۱٫۹۹۸۷	۲٫۰۰۰۴۸
	آنتروپی	۰٫۸۷۵۴۵	۰٫۵۱۲۱۴۴	۱٫۰۰۸۴۴	۱٫۹۰۴۷۶	۱٫۹۹۷۳۸	۲٫۰۰۰۹۶
	لاینکس	۱٫۰۹۲۱۳	۰٫۹۲۵۱۲	۱٫۰۰۰۰۸	۲٫۲۱۷۰۷	۲٫۰۰۹۷۹	۲٫۰۰۰۹۶
	مربع خطای لگاریتمی	۰٫۷۲۱۴۸	۰٫۹۵۵۱۷	۱٫۰۰۱۳۱	۱٫۸۰۸۲۳	۲٫۰۲۶۴۷	۲٫۰۰۲۹۰۶
	لاینکس اصلاح‌شده	۱٫۰۹۵۲۵	۰٫۴۶۲۵۶	۱٫۰۰۰۳۲	۲٫۲۷۷۹۶	۱٫۹۹۴۶۳	۲٫۰۰۰۴۷۳
۳۰	مربع خطا	۰٫۹۸۵۴۵	۰٫۶۸۴۴۰	۰٫۸۴۷۴۵	۱٫۹۹۹۹۰	۱٫۹۹۹۸	۲٫۰۰۰۰۵
	آنتروپی	۰٫۸۵۲۷۸	۰٫۴۱۲۵۴۶	۰٫۸۵۴۱۳	۱٫۹۳۵۴۸	۱٫۹۹۹۶۱	۲٫۰۰۰۱۱۴
	لاینکس	۰٫۸۵۴۵۶	۰٫۴۵۵۴۶	۰٫۸۵۴۱۳	۱٫۹۳۵۴۶	۱٫۹۹۹۶۱	۲٫۰۰۰۱۱
	مربع خطای لگاریتمی	۰٫۷۴۵۲۸	۰٫۳۲۵۴۸	۰٫۸۷۱۵۸	۱٫۸۷۰۸۳	۱٫۹۹۸۸۴	۲٫۰۰۰۳۴
	لاینکس اصلاح‌شده	۱٫۰۸۵۲۴	۰٫۶۸۱۳۵	۰٫۸۸۹۴۵	۲٫۱۹۹۳۴	۱٫۹۹۹۸۰	۲٫۰۰۰۰۵
۵۰	مربع خطا	۱٫۰۴۸۵۷	۰٫۸۸۷۴۵	۰٫۸۲۱۴۶	۱٫۹۹۹۹۶	۱٫۹۹۹۹۳	۲٫۰۰۰۰۱
	آنتروپی	۱٫۰۳۸۵۴	۰٫۸۹۵۴۲	۰٫۸۷۳۵۱	۱٫۹۹۹۹۶	۱٫۹۹۹۹۳	۲٫۰۰۰۰۳
	لاینکس	۱٫۰۳۴۵۴	۰٫۸۹۵۴۲	۰٫۸۷۳۵۱	۱٫۹۶۰۷۷	۱٫۹۹۹۸۶	۲٫۰۰۰۰۳
	مربع خطای لگاریتمی	۱٫۰۰۴۵۸	۰٫۹۵۱۳۲	۰٫۸۶۱۳۱۶	۱٫۹۲۱۵۰	۱٫۹۹۹۵۸	۲٫۰۰۰۱۱
	لاینکس اصلاح‌شده	۱٫۸۵۲۱۴	۰٫۹۹۷۴۱	۰٫۸۵۳۷۵	۲٫۱۱۹۷۳	۱٫۹۹۹۹۳	۲٫۰۰۰۰۵

جدول ۱۸. میانگین مربعات خطا برای توزیع تعمیم‌یافته مارشال اولکین پارتو، حالت پیشین با واریانس زیاد

تعداد نمونه n	تابع زیان	زنجیره مارکوف مونت‌کارلو			لیندلی		
		δ	α	k	δ	α	k
۲۰	مربع خطا	۱٫۵۲۴۴۲	۰٫۷۹۰۸۱	۱٫۵۲۳۸۶	۳٫۰۷۸۷۶	۳٫۰۷۸۰۰	۳٫۰۸۰۷۴
	آنتروپی	۱٫۳۴۸۲۰	۰٫۷۸۸۷۰۲	۱٫۵۴۱۳	۲٫۹۳۳۳۴	۳٫۰۷۵۹۷	۳٫۰۸۱۴۹
	لاینکس	۱٫۶۸۱۸۸	۱٫۴۲۴۶۹	۱٫۵۴۰۱۲	۳٫۴۱۴۲۹	۳٫۰۹۵۰۷	۳٫۰۸۱۴۹
	مربع خطای لگاریتمی	۱٫۱۱۱۰۹	۱٫۴۷۰۹۷	۱٫۵۴۲۰۲	۲٫۷۸۴۶۸	۳٫۱۲۰۷۷	۳٫۰۸۴۴۷
	لاینکس اصلاح‌شده	۱٫۶۸۶۶۹۷	۰٫۷۱۲۳۵۳	۱٫۵۴۰۴۹۴	۳٫۵۰۸۰۷۱	۳٫۰۷۱۷۳۸	۳٫۰۸۰۷۲۸
۳۰	مربع خطا	۱٫۵۱۷۵۹۶	۱٫۰۵۳۹۷۸	۱٫۳۰۵۰۷۶	۳٫۰۷۹۸۵۵	۳٫۰۷۹۷۰۳	۳٫۰۸۰۰۸۸
	آنتروپی	۱٫۳۱۳۲۹۵	۰٫۶۳۵۳۲۱	۱٫۳۱۵۳۶۹	۲٫۹۸۰۶۴۵	۳٫۰۷۹۴۰۴	۳٫۰۸۰۱۷۶
	لاینکس	۱٫۳۱۶۰۳	۰٫۷۰۱۴۱	۱٫۳۱۵۳۶	۲٫۹۸۰۶۱	۳٫۰۷۹۴۰۴	۳٫۰۸۰۱۷۶
	مربع خطای لگاریتمی	۱٫۱۴۷۷۴۵	۰٫۵۰۱۲۵۲	۱٫۳۴۲۲۴۷	۲٫۸۸۱۰۹۱	۳٫۰۷۸۲۱۵	۳٫۰۸۰۵۲۵
	لاینکس اصلاح‌شده	۱٫۶۷۱۲۷	۰٫۰۴۹۲۸۵	۱٫۳۶۹۷۵۶	۲٫۳۸۶۹۸۴	۳٫۰۷۹۷۰۶	۳٫۰۸۰۰۸۸
۵۰	مربع خطا	۱٫۶۱۴۷۹۹	۱٫۳۶۶۶۷۶	۱٫۲۶۵۰۵۶	۳٫۰۷۹۹۴۳	۳٫۰۷۹۸۹۴	۳٫۰۸۰۰۲۹
	آنتروپی	۱٫۵۹۹۳۵۵	۱٫۳۷۸۹۵۵	۱٫۳۴۵۲۱۵	۳٫۰۱۹۶۰۷	۳٫۰۷۹۷۸۷	۳٫۰۸۰۰۵۹
	لاینکس	۱٫۵۹۳۸۷۲	۱٫۳۷۸۹۵۵	۱٫۳۴۵۲۱۵	۳٫۰۱۹۶	۳٫۰۷۹۷۸۷	۳٫۰۸۰۰۵۹
	مربع خطای لگاریتمی	۱٫۵۴۷۰۵۶	۱٫۴۶۵۰۳۹	۱٫۳۲۶۴۲۷	۲٫۹۵۹۱۲۱	۳٫۰۷۹۳۶۴	۳٫۰۸۰۱۷۶
	لاینکس اصلاح‌شده	۲٫۸۵۲۳۰۵	۱٫۵۳۶۰۱۴	۱٫۳۱۴۷۸۱	۳٫۲۶۴۳۹۷	۳٫۰۷۹۸۹۵	۳٫۰۸۰۰۸۸

جدول ۱۹. میانگین مربعات خطا برای توزیع تعمیم‌یافته مارشال اولکین پارتو، حالت پیشین نا آگاهی

تعداد نمونه n	تابع زیان	زنجیره مارکوف مونت‌کارلو			لیندلی		
		δ	α	k	δ	α	k
۲۰	مربع خطا	۲٫۳۴۷۶۲۱	۱٫۲۱۷۸۶	۲٫۳۴۶۷۴۷	۴٫۷۴۱۳	۴٫۷۴۰۱۲۲	۴٫۷۴۴۳۴۶
	آنتروپی	۲٫۰۷۶۲۳۱	۱٫۲۱۴۶۰۱	۲٫۳۷۳۶۰۲	۴٫۵۱۷۳۴۸	۴٫۷۳۷۰۰۳	۴٫۷۴۵۴۹۸
	لاینکس	۲٫۵۹۰۱	۲٫۱۹۴۰۳۲	۲٫۳۷۱۷۹۹	۵٫۲۵۸۰۱۷	۴٫۷۶۶۴۲	۴٫۷۴۵۴۹۸
	مربع خطای لگاریتمی	۱٫۷۱۱۰۸۲	۲٫۲۶۵۲۹۴	۲٫۳۷۴۷۱۱	۴٫۲۸۸۴۱۸	۴٫۸۰۵۹۹۴	۴٫۷۵۰۰۹۲
	لاینکس اصلاح‌شده	۱۲٫۵۹۷۵۱۳	۱٫۰۹۷۰۲۴	۲٫۳۷۲۳۶۱	۵٫۴۰۲۴۲۹	۴٫۷۳۰۴۷۷	۴٫۷۴۴۳۲۱
۳۰	مربع خطا	۲٫۳۳۷۰۹۸	۱٫۶۲۳۱۲۶	۲٫۰۰۹۸۱۷	۴٫۷۴۲۹۷۷	۴٫۷۴۲۷۴۳	۴٫۷۴۳۳۳۶
	آنتروپی	۲٫۰۲۲۴۷۴	۰٫۹۷۸۳۹۴	۲٫۰۲۵۶۶۸	۴٫۵۹۰۱۹۳	۴٫۷۴۲۲۸۲	۴٫۷۴۳۴۷۱
	لاینکس	۲٫۰۲۶۶۹۴	۱٫۰۸۰۱۸۴	۲٫۰۲۵۶۶۸	۴٫۵۹۰۱۴۱	۴٫۷۴۲۲۸۲	۴٫۷۴۳۴۷۱
	مربع خطای لگاریتمی	۱٫۷۶۷۵۲۷	۰٫۷۷۱۹۲۸	۲٫۰۶۷۰۶	۴٫۴۳۶۸۸	۴٫۷۴۰۴۵۱	۴٫۷۴۴۰۰۹
	لاینکس اصلاح‌شده	۲٫۵۷۳۷۷	۱٫۶۱۵۸۹۹	۲٫۱۰۹۴۲۴	۵٫۲۱۵۹۵۵	۴٫۷۴۲۷۴۷	۴٫۷۴۳۳۳۶
۵۰	مربع خطا	۲٫۴۸۶۷۹	۲٫۱۰۴۶۸۱	۱٫۹۴۸۱۸۶	۴٫۷۴۳۱۱۲	۴٫۷۴۳۰۳۷	۴٫۷۴۳۲۴۵
	آنتروپی	۲٫۴۶۳۰۰۷	۲٫۱۲۳۵۹۱	۲٫۰۷۱۶۳۱	۴٫۶۵۰۱۹۵	۴٫۷۴۲۸۷۲	۴٫۷۴۳۲۹۱
	لاینکس	۲٫۴۵۴۵۶۳	۲٫۱۲۳۵۹۱	۲٫۰۷۱۶۳۱	۴٫۶۵۰۱۸۴	۴٫۷۴۲۸۷۲	۴٫۷۴۳۲۹۱
	مربع خطای لگاریتمی	۲٫۳۸۲۴۶۶	۲٫۲۵۶۱۶	۲٫۰۴۲۶۹۸	۴٫۵۵۷۰۴۶	۴٫۷۴۲۲۲۱	۴٫۷۴۳۴۷۱
	لاینکس اصلاح‌شده	۴٫۳۹۲۵۵	۲٫۳۶۵۴۶۲	۲٫۰۲۴۷۶۳	۵۰۲۷۱۷۱	۴٫۷۴۳۰۳۸	۴٫۷۴۳۳۳۶

با توجه به جداول (۱۴) تا (۱۶)، واضح است که در هر دو روش تفاوت زیادی در توابع زیان مختلف در برآوردهای بیزی یافت نمی‌شود. همچنین مشخص است که هر دو روش لیندلی و زنجیره مارکوف مونت‌کارلو تقریباً عملکرد یکسانی در برآورد پارامترها دارند، اما همان‌طور که مشخص است، برآوردهای روش زنجیره مارکوف مونت‌کارلو دارای میانگین مربع خطای کمتری نسبت به برآورد لیندلی با تابع زیان یکسان هستند، اما این تفاوت در α ناچیز است. در برآورد پارامتر δ می‌توان از این تفاوت به‌عنوان معیاری برای مقایسه عملکرد دو روش استفاده کرد و نتیجه گرفت که برآوردهای روش زنجیره مارکوف مونت‌کارلو بهینه تر از تقریب لیندلی هستند. همچنین لازم به ذکر است که در تمامی موارد با افزایش حجم نمونه مقادیر میانگین مربع خطای کاهش می‌یابد و این نشان دهنده سازگاری برآوردهای به‌دست‌آمده در این مطالعه است. شایان ذکر است که هر چه اطلاعات پیشین فراپارامترها کمتر باشد، میانگین مربع خطای آن‌ها افزایش می‌یابد و این موضوع در مقایسه جداول (۱۴)، (۱۵) و (۱۶) مربوط به توزیع تعمیم‌یافته مارشال اولکین ریلی و جداول (۱۷)، (۱۸) و (۱۹) که مربوط به توزیع تعمیم‌یافته مارشال اولکین پارتو است، به وضوح قابل مشاهده است.

مراجع

[1] Cox, DR, Hinkley, DV. (1974), *Theoretical Statistics*. Chapman and Hall, London.

[2] Gompertz, B. (1825), On e of the function expressive of the law of human mortality and on the new model of determining the value of life contingencies. *Philos. Trans. R. Soc. Lond.*, **115**, 513–585. the natu

[3] Gurvich, M, DiBenedetto, A, Ranade, S. (1997), A new statistical distribution for characterizing the random strength of brittle materials. *J. Mater. Sci.*, **32**, 2559–2564 .

[4] Lai, CD, Xie, M, Murthy, DNP. (2003), A modified Weibull distribution. *Trans. Reliab.*, **52**, 33–37.

[5] Lindley, D.V. (1980), Approximate Bayes method, *Trabajos de estadistica*, **31**, 223-237 .

[6] Marshall, A. W., and Olkin, I. (1997), A new method for adding a parameter to a family of distributions with application to the exponential and Weibull families. *Biometrika* , **84**, 641-652.

[7] Rayleigh, JWS. (1880), On the resultant of a large number of vibrations of the same pitch and of arbitrary phase. *Phil. Mag.*, **10**, 73–78.

[8] Nadarajah, S., Jayakumar, K. and Ristic, M.M. (2012), A new family of lifetime models, *Journal of statistical computation and simulation*, **83(8)**, 1389–1404.

[9] Santos, M. (2014), The Marshall-Olkin extended Weibull family of distributions. *Journal of Statistical Distributions and Applications*, **1**, 9.

[10] Shannon, CE. (1948), A mathematical theory of communication. *Bell Syst. Techn. J.*, *27*, 379–423.

[11] Xie, M, Lai, D. (1995), Reliability analysis using additive Weibull model with bathtub-shaped failure rate function. *Reliab. Eng. Syst. Saf.*, **52**, 87–93.

[12] Xie, M, Tang, Y, Goh, TN. (2002), A modified Weibull extension with bathtub-shaped failure rate function. *Reliab. Eng. Syst. Saf.*, **76**, 279–285.

Bayesian inference for extended Weibull marshall-olkin distributions

Nahid Sanjari Farsipour[1] Bahram Taremi[2] Zahra Memar Kashani[3]

Abstract:

Marshall-Olkin introduced a family of distributions which obtained by adding a parameter to other distributions. Santoz-Net et al studied an extended Weibull distributions. In this paper two Rayleigh and Weibull extended Pareto distributions are studied, various research such as moments and Bayesian statistics under different loss functions such as squared error, Entropy, Linex, Squared error in logarithm and Modified Linex are studied. Also the Markov chain Monte Carlo (MCMC) method has been studied for these two distributions.

Keywords: Survival function, Hazard function, Extended Weibull distribution, Rayleigh distribution, Pareto distribution, Bayesian statistics, MCMC method.

[1] Statistics group, Faculty of Mathematics, Al-Zahra University, Tehran
[2] Statistics department, College of Science, Shiraz University, Shiraz
[3] Statistics group, Faculty of Mathematics, Al-Zahra University, Tehran