

تحلیل همه‌گیری کووید-۱۹ با استفاده از نظریهٔ پرکولاسیون

رامین کاظمی^۱، محمدقاسم وحیدی اصل^۲

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۱۲/۰۴

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۱۲/۲۶

چکیده:

دانش آمار، چه در عصر شمارش‌های اولیه و چه در متعالی‌ترین شکل کنونی آن همواره در خدمت طبقات اجتماعی مختلف و از جمله هیئت‌های حاکمه بوده؛ بسته به وسع خود، و البته وسع و صداقت کاربرنده، ابعاد زیادی از مجهولات را روشن کرده است. به‌عنوان مثال، آمارهای مربوط به کووید-۱۹ (بیماری کروناویروس) در کشورهای مختلف، هراندازه هم ناقص و محدود و چه‌بسا در مواردی مخدوش، در تعیین آستانهٔ بحرانی بین معیشت (ایجاد قرنطینه و محدودیت‌ها) و سلامت (کاهش ابتلا و مرگ‌ومیر) و انتخاب مسیری که در حالت خلاف آن، دشواری‌های بیشتر رخ می‌نموده، هدایت‌گر و هم‌چنین عصای دست پژوهش‌گران، مدیران، و حکومت‌گران بوده است. با این توصیف، از زمان شیوع همه‌گیری کووید-۱۹ در ووهان چین، تحقیقات متعددی باهدف توصیف و ایجاد پشت‌بندهای مهار شیوع بیماری انجام شده است. ضمن تأیید نقش علم آمار در تحلیل داده‌های همه‌گیری کووید-۱۹ در ابعاد مختلف، اهمیت توجه بیشتر به مدل‌های احتمالاتی، و به‌طورکلی نظریهٔ احتمال که توانایی پاسخ‌گویی به مسائل مهم مرتبط با «هندسه»ی کووید-۱۹ و موارد مشابه را دارد، برای برنامه‌ریزان و مدرسان آمار و احتمال، به‌ویژه در دورهٔ کارشناسی، تبیین می‌شود. در این راستا، با مروری بر یکی از مفاهیم به‌خوبی تثبیت‌شدهٔ همه‌گیری‌شناسی، نظریهٔ پرکولاسیون، گوشه‌هایی از نحوهٔ انتشار کووید-۱۹ را بر پایهٔ این مدل، بررسی می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: همه‌گیری، کووید-۱۹، پرکولاسیون، پرکولاسیون‌شدگی.

۱ مقدمه

عام‌تر و استفادهٔ آسان‌تر، بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرد اما نه تنها فلسفهٔ وجودی علم آمار بر بنیاد احتمال است بلکه نظریهٔ احتمال در همهٔ زمینه‌ها کاربردهای مختلفی دارد که، در برخی از آن‌ها، علم آمار در پاسخ به مسائل مرتبط با هندسهٔ آن ناتوان است. البته در لزوم دانش آمار، مخصوصاً در شکل پیشرفتهٔ اعجاب‌انگیز امروزی آن، هیچ تردیدی نیست. اما آیا آمار به‌تنهایی برای پاسخ به همهٔ مسائلی که در حیطهٔ روش علمی^۳ مطرح می‌شوند، کفایت می‌کند (صرف‌نظر از اینکه مدل‌های آماری، زیرمجموعه‌ای از مدل‌های احتمالاتی‌اند)؟ با بررسی برخی از ابعاد همه‌گیری کووید-۱۹، خواهیم دید که پاسخ منفی است. برای رفع این مشکل، می‌توان به مدل‌های پرکولاسیون، مدل‌های آوندی و درخت‌های تصادفی اشاره کرد. هرچند درک کاملی از مدل‌های مذکور به فهم عمیق و دقیق احتمال پیشرفته وابسته است اما علاوه بر مدل‌های پیچیدهٔ آن‌ها، می‌توان زیرمدل‌های ساده‌ای از آن‌ها را برای تحلیل انتشار

به‌استثنای چندین مسئله و مدل احتمالاتی ساده و البته پرکاربرد نظیر مسائل اشغال، جعبه‌های تهی، تطبیق، قوطی کبریت باناخ، و مدل آوند پولیا و آن‌هم در کتاب‌های مقدماتی نظریهٔ احتمال در آغاز دورهٔ کارشناسی آمار، سایر مدل‌های احتمالاتی و مرسوم که به مسائل زیادی از طریق آن‌ها می‌توان پاسخ داد، نادیده گرفته می‌شوند. به‌طورکلی، نقش علم احتمال در دورهٔ کارشناسی و سیستم آموزشی ما کم‌رنگ به نظر می‌رسد و گویی تنها برای تدریس درس آماری به استخدام درآمده یا بخشی از علم آمار است. این در حالی است که نظریهٔ احتمال خود شاخه‌ای جداگانه از علم ریاضیات است و تنها ارتباط آن با آمار در این است که مبحث آمار بدون استفاده از مفاهیم «شانس» و «تصادف» پایه و اساسی ندارد. هرچند آمار به دلیل کاربردهای

^۱ گروه آمار، دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره) (نویسنده مسئول: r.kazemi@sci.ikiu.ac.ir)

^۲ گروه آمار، دانشگاه شهید بهشتی

ابتدا شروع به تحلیل پویایی شیوع همه‌گیری کرده‌اند تا بتوانند اقداماتی را برای مهار شیوع آن اتخاذ کنند. برای رسیدن به این هدف، کارهای مدل‌سازی، پیش‌بینی و تحلیل شیوع ویروس روزبه‌روز افزایش بیشتری می‌یابد. از این رو، فوریتی برای توصیف ریاضی مناسب شیوع کووید-۱۹ با هدف مهار این بیماری وجود دارد. این امر به‌ویژه با هدف حمایت از سازمان‌های دولتی سلامت در سراسر جهان برای به حداکثر رساندن تأثیرگذاری راهبردهای حمایت پزشکی در چنین بحران جهانی ضروری است. تحلیل ارائه‌شده در اینجا به‌خوبی نتایج منتشرشده در این همه‌گیری را تأیید می‌کند به‌ویژه اینکه در چارچوب نظریهٔ پرکولاسیون مقدماتی می‌توان [۱۳]:

- احتمال پرکولاسیون را با احتمال ابتلای افراد به کووید-۱۹ مرتبط کرد؛

- مفاهیم اتصالات مسدود و نامسدود را می‌توان به ترتیب با فردی که فاصله‌گذاری اجتماعی را رعایت می‌کند یا نمی‌کند، و به این ترتیب بر احتمال مبتلا شدن دیگران توسط یک فرد آلوده تأثیر می‌گذارد، مرتبط کرد.

همچنین، اهمیت فاصله‌گذاری اجتماعی در جلوگیری از شیوع کووید-۱۹ مورد تأکید قرار خواهد گرفت. در بخش بعدی، تاریخچه‌ای مختصر از نظریهٔ پرکولاسیون با اشاره به نتایج شاخص و جریان‌ساز در این حوزه معرفی می‌شود.

۳ نظریهٔ پرکولاسیون: تاریخچه‌ای کوتاه از آغاز تاکنون

مدل‌های پرکولاسیون، انتشار یا تراوش یک مایع درون یک مادهٔ متخلخل را توصیف می‌کنند. این نظریه در اواسط قرن بیستم، قبل از تبدیل شدن به یکی از موضوعات اصلی مورد توجه علم احتمال و ریاضی فیزیک، به‌طور شگفت‌انگیزی پا به عرصه گذاشت. عصر طلایی نظریهٔ پرکولاسیون احتمالاً دههٔ هشتاد است که در طی آن اکثر نتایج عمده برای کلاسیک‌ترین این مدل‌ها یعنی پرکولاسیون برنولی به‌دست آمده است، اما در واقع طی دو دههٔ بعد بود که نظریهٔ پرکولاسیون را در تلاقی چندین حوزه قرار داد. به‌طور شهودی، پرکولاسیون یک مدل احتمالاتی ساده

بیماری‌های همه‌گیر و از جمله کووید-۱۹ به کار گرفت. دامنهٔ کاربرد این مدل‌ها، ضمن برخورداری از پشتوانهٔ نظری قوی، از بیماری‌های همه‌گیر، آتش‌سوزی جنگل‌ها، توصیف اثرات بی‌نظمی در ابرساناها^۴، توصیف نیمه‌هادی‌های مغناطیسی رقیق‌شده^۵، و تحلیل شبکهٔ ترافیک تا جلوگیری از گسترش پاتوژن‌های گیاهی است. در این مقاله، سعی خواهیم کرد که در قالب مدل پرکولاسیون برنولی روی شبکهٔ پته (یک گراف نامتناهی بی‌دور که در آن همهٔ رأس‌ها ظرفیت یا درجهٔ یکسانی دارند)، به‌عنوان مدلی مقدماتی و ساده برای تحلیل گسترش کووید-۱۹، اهمیت توجه بیشتر به مدل‌های احتمالاتی، و به‌طورکلی نظریهٔ احتمال و کتاب‌های مرتبط، را برای برنامه‌ریزان و مدرسان درس‌های آمار و احتمال، به‌ویژه در دورهٔ کارشناسی، مشخص کنیم. همچنین، به مدل‌های جذاب و پیچیدهٔ پرکولاسیون که به هندسهٔ گسترش بیماری کووید-۱۹ نزدیک‌تر هستند اشاره‌ای کوتاه خواهیم کرد.

۲ انطباق مدل پرکولاسیون با همه‌گیری کووید-۱۹

در یک رده‌بندی کلی، بیماری‌ها را می‌توان به دو ردهٔ بیماری‌های واگیردار و غیرواگیر تقسیم کرد. بیماری‌های واگیردار، بسته به پایین بودن یا بالا بودن احتمال واگیری ممکن است در سطحی محدود مانده و مهار شوند یا تبدیل به همه‌گیری شده و کل جامعه را درنوردند. این «آستانه»^۶ گذر از ابتلای عده‌ای محدود به تعدادی «نامتناهی»^۷ و در نتیجه بروز همه‌گیری، کدام است؟ این آستانه‌ها در حوزهٔ مدل‌های سرایت‌پذیری، همه‌گیری، و انواع مدل‌های احتمالاتی قرار دارند. برای مثال، مدل آوند پولیا، یکی از نخستین مدل‌ها برای بررسی سرایت بیماری‌ها است.

در دو سال گذشته، همه‌گیری کووید-۱۹ به‌سرعت در سراسر جهان در حال گسترش بوده است و تأثیرات هولناک آن در زندگی ما در گستره‌ای وسیع نیاز به گفتن ندارد. چنین شیوع سریع کووید-۱۹ در انسان‌ها با پروتئین اسپایک^۸ مرتبط است، که به‌نوبهٔ خود دارای قرارگاهی است که توسط آنزیمی بنام فیورین^۹ فعال می‌شود. پروتئین اخیر روی سطح ویروس آویزان است و بنابراین متأسفانه منجر به ابتلای بسیار آسان سلول‌های انسانی می‌شود. تلاش‌ها برای مبارزه با این همه‌گیری به فرایندهای تولید واکسن مؤثرتر محدود نشده است، بلکه دانشمندان

⁴effects of disorder in superconductors

⁵diluted magnetic semiconductors

⁶spike protein

⁷furin

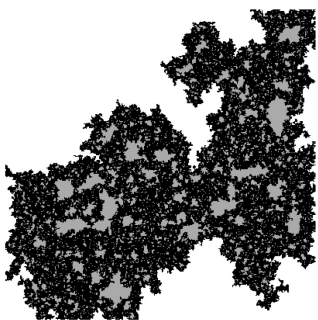
⁸random maze

رأس می‌تواند مستقل از بقیه یال‌ها با احتمال p باز باشد (اجازه انتقال ماده را بدهد) یا با احتمال $1-p$ بسته باشد. در این صورت، این سؤال مطرح می‌شود که برای هر p داده شده، احتمال اینکه مسیری از یال‌های باز از رئوس بالایی به رئوس پایینی وجود داشته باشد، چقدر است؟ بنابراین، هدف اولیه این سؤال بررسی رفتار یک گراف برای n های بزرگ است. در این مدل، هر یال با احتمال p در بازه $[0, 1]$ و مستقل از وضعیت یال‌های دیگر باز و بنابراین با احتمال $1-p$ بسته است. به‌طور معادل، $w(e)$ ها برای هر $e \in E$ ، متغیرهای تصادفی مستقل برنولی با پارامتر p هستند. احتمال دانان به ویژگی‌های اتصال شیء تصادفی به دست آمده در گراف القاشده به وسیله w علاقه‌مند هستند. در مورد پرکولاسیون بندی، رئوس این گراف، رئوس G و یال‌ها فقط یال‌های باز هستند. در پرکولاسیون بستنی، این گراف زیرگراف G است که توسط رئوس باز القا می‌شود. یعنی، گرافی که از رئوس باز و یال‌های بین آن‌ها تشکیل شده است. یک خوشه باز یک مؤلفه از زیرگراف باز است. مانند نظریه گراف، فرض می‌شود که این خوشه‌ها به‌طور موضعی متناهی‌اند. گوئیم یک خوشه باز نامتناهی است اگر و تنها اگر برای هر بست x در این خوشه، وقوع پیشامد $\{x \rightarrow \infty\}$ ممکن باشد. توجه شود که منظور از نماد $\{x \rightarrow y\}$ آن است که مسیر بازی از x به y موجود است. برای یک بست مفروض x ، C_x را خوشه باز شامل x در نظر می‌گیریم هرگاه چنین خوشه‌ای موجود باشد و در غیر این صورت C_x را مجموعه تهی در نظر می‌گیریم. بنابراین، $C_x = \{y \in G : x \rightarrow y\}$ مجموعه‌ای از بست‌های y است که یک مسیر باز از x به آن‌ها وجود دارد. به‌وضوح، در پرکولاسیون بندی، C_x همیشه شامل x است و در پرکولاسیون بستنی، $C_x = \emptyset$ اگر و تنها اگر x بسته باشد. فرض کنید $\theta_x(p)$ احتمال این باشد که خوشه C_x نامتناهی است. به عبارتی، $\theta_x(p) = P(x \rightarrow \infty)$. بنابراین، $\theta_x(p)$ به گراف اصلی G وابسته است خواه روی پرکولاسیون بندی یا بستنی متمرکز باشیم. کمیت $\theta(p)$ یا $\theta_x(p)$ را به‌عنوان احتمال پرکولاسیون می‌شناسند. کمیت مهم دیگر در مدل‌های پرکولاسیون، احتمال بحرانی یا آستانه پرکولاسیون p_c است، به‌طوری‌که اگر $p < p_c$ ، اندازه خوشه مورد انتظار متناهی است، اما اگر $p > p_c$ ، یک خوشه نامتناهی با احتمال مثبت وجود دارد. شبکه مربعی گرافی نامتناهی است که رأس‌های آن نقاط با مختصات صحیح در صفحه و یال‌های آن نقاط واصل بین دو رأسی است که فاصله اقلیدسی آن‌ها یک باشد. برای پرکولاسیون بندی مقدار آستانه بحرانی برابر با $\frac{1}{2}$ و این مقدار برای پرکولاسیون بستنی از طریق شبیه‌سازی تقریباً 0.592746 ± 0.000001 است. تعیین این مقدار به‌صورت تحلیلی و دقیق

برای تراوش درون یک سنگ متخلخل است. درون سنگ به‌عنوان یک ماز یا هزارتوی تصادفی^۹ توصیف می‌شود که آب یا هر مایع دیگر می‌تواند در آن جریان داشته باشد. سؤال این است که بدانیم وقتی سنگ در یک سطل آب غوطه‌ور شد، آب تا چه اندازه در درون آن نفوذ می‌کند. از نظر ریاضی، این پدیده را می‌توان به‌عنوان زیرگرافی تصادفی از یک گراف مرجع G با مجموعه (شمارای) رئوس V و مجموعه یال‌های E (که زیرمجموعه‌ای از زوج‌های نامرتبی از عناصر در V است) مدل‌بندی کرد. پرکولاسیون روی G ممکن است به دو صورت بندی یا بستنی باشد. در حالت اول، هر یال $e \in E$ ، یا باز یا بسته است، واقعیتی که توسط تابع w از مجموعه یال‌ها به مجموعه $\{0, 1\}$ نگاشت می‌شود که در آن $w(e)$ برابر با ۱ است هرگاه یال e با احتمال معینی باز باشد و ۰ است هرگاه با احتمالی متمم احتمال قبلی بسته باشد. به عبارتی، یک یال باز برای عبور آب باز است، درحالی‌که یال‌های بسته این‌گونه نیستند. بنابراین، یک مدل پرکولاسیون بندی شامل انتخاب تصادفی یال‌های G برای باز یا بسته بودن است. پرکولاسیون بستنی مانند پرکولاسیون بندی است با این تفاوت که رئوس $v \in V$ یا باز یا بسته هستند، و بنابراین w یک تابع (تصادفی) از V به مجموعه $\{0, 1\}$ است. ساده‌ترین و قدیمی‌ترین مدل پرکولاسیون بندی، یعنی پرکولاسیون برنولی، توسط برودینت و هم‌رزلی معرفی شده است [۵]. آن‌ها در طراحی ماسک‌های گاز که از آن‌ها در معادن زغال‌سنگ استفاده می‌شد، به مسئله جالبی برخورد کردند. جزء اصلی ماسک گاز با دانه‌های کربن پُر می‌شود که گاز باید در آن جریان پیدا کرده و بالاخره جذب دانه‌های کربن شود. کربن منفذهایی دارد که به نحو پیچیده‌ای باهم ارتباط دارند و نوعی ماز پیچ‌درپیچ تشکیل می‌دهند. گاز با جذب شدن در سطح داخلی منفذها می‌تواند به آن‌ها وارد شود. برودینت و هم‌رزلی دریافته‌اند که اگر منفذها گشاد و به‌خوبی باهم مرتبط باشند، گاز به عمق صافی کربن نفوذ می‌کند. در غیر این صورت، گاز نمی‌تواند از سطح خارجی کربن فراتر رود. جریان گاز در داخل این ماز، فرایند جدیدی به شمار می‌آید. برودینت و هم‌رزلی این پدیده را پرکولاسیون نامیدند و نظریه‌ای که زمینه‌ساز این نوع فرایند است، نظریه پرکولاسیون نام نهاده شد. در برخی متون، علت نام‌گذاری نظریه پرکولاسیون و سرآغاز آن را این سؤال معرفی کرده‌اند: فرض کنید مایعی از بالای جسمی متخلخل ریخته شده است، آیا مایع می‌تواند با گذر از منافذ این جسم خود را به سطح پایینی آن برساند؟ این سؤال که در دنیای واقعی و فیزیک مطرح می‌شود در ریاضیات به‌صورت شبکه‌ای سه‌بُعدی از $n \times n \times n$ رأس مدل‌بندی می‌شود (هرکدام از این رئوس را محفظه^۹ نیز می‌نامند). یال بین هر دو

⁹compartment

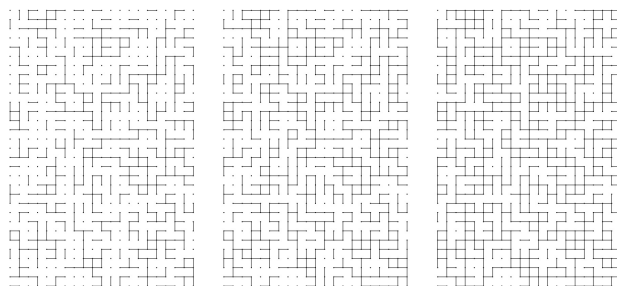
این قضیه و برخی از ایده‌های مبتکرانه در اثبات آن، تلاش‌های بیشتر نویسندگان را در سی سال پس‌از آن به سمت وسوی متعالی سوق داد. نظریهٔ پرکولاسیون در دههٔ نود و اوایل دههٔ بعدی دچار یک جهش بزرگ شد. در حالی که برخی از مسائل تاریخی دهه‌های گذشته حل شده بودند، چالش‌های جدیدی در حاشیهٔ نظریه ظاهر شد. به‌طور ویژه، مشخص شد که درک عمیق‌تر پرکولاسیون، مستلزم استفاده از فن‌هایی است که از طیف گسترده‌تری از ریاضیات به دست می‌آیند. در نتیجه، پرکولاسیون برنولی در تقاطع چندین حوزه از ریاضیات جایگاه جدیدی یافت با این مضمون که دیگر تنها یک مدل احتمالاتی نیست. بنجامینی و شرام [۲] در مقاله‌ای زیبا با عنوان "پرکولاسیون فراتر از \mathbb{Z}^d "، پرسش‌های فراوان و چندین پاسخ، را در ارتباط با پرکولاسیون برنولی روی گراف‌های کیلی با ارائهٔ فهرستی از مسائل پیونددهندهٔ ویژگی‌های پرکولاسیون برنولی به ویژگی‌های گروه‌های جبر لی مطرح کردند. این مقاله تعدادی از مسائل جدید را در این زمینه مطرح کرد و توجه محققانی را که در نظریهٔ گروه‌های هندسی فعال بودند به کاربردهای بالقوهٔ نظریهٔ پرکولاسیون جلب کرد.



شکل ۰۲. یک مؤلفهٔ همبند w برای پرکولاسیون بندی روی مشبکهٔ مربعی \mathbb{Z}^2 [۳].

هم‌زمان، علاقهٔ مجددی به سؤالات مربوط به پرکولاسیون مسطح مشاهده شد. نظریهٔ میدان همدیس^{۱۰}، که توسط بلاوین، پولیاکوف، و زامولوچیکوف [۱] معرفی شد، از جملهٔ مواردی است که پیوند محکمی با نظریهٔ پرکولاسیون پیدا کرد. پرکولاسیون اولین‌گذر^{۱۱} یکی از کلاسیک‌ترین حوزه‌های نظریهٔ احتمال است. این موضوع اولین بار به‌عنوان مدلی از جریان سیال درون یک محیط متخلخل معرفی شد. این، بخشی از نظریهٔ پرکولاسیون است و پرکولاسیون کلاسیک برنولی را می‌توان به‌عنوان حالت خاصی از پرکولاسیون اولین‌گذر در نظر آورد. عمدهٔ زیبایی این مدل در تعریف سادهٔ آن (به‌عنوان یک فضای متریک تصادفی) است. اغلب، هدف از پرکولاسیون اولین‌گذر، درک فاصلهٔ تصادفی در یک گراف است، جایی که وزن‌هایی به یال‌ها اختصاص

همچنان مسئله‌ای هنوز حل نشده است (شکل ۱ را ببینید). بنابراین، در صورتی که در یک مدل آرمانی، طرز قرار گرفتن افراد جامعه نسبت به هم را استقرار آن‌ها در یک مشبکهٔ مربعی در نظر بگیریم، با احتمال سرایت $p < \frac{1}{2}$ همه‌گیری محدود می‌ماند و خوشه‌های نامتناهی ایجاد نمی‌شود.



شکل ۰۱. پیکربندی نمونه‌گیری شدهٔ w از پرکولاسیون بندی برنولی روی مشبکهٔ مربعی \mathbb{Z}^2 برای مقادیر پارامتر $p < 1/2$ ، $p = 1/2$ و $p > 1/2$ [۳].

برای لحظه‌ای پرکولاسیون برنولی روی مشبکهٔ ابرمکعبی \mathbb{Z}^d با مجموعهٔ بست‌های داده‌شده توسط نقاط \mathbb{R}^d با مختصات اعداد صحیح، و بندهای بین بست‌ها در فاصله اقلیدسی ۱ از یکدیگر را در نظر بگیرید. سؤالی که ممکن است مطرح شود این است که آیا مؤلفهٔ همبند شامل مبدأ متناهی است؟ ویژگی زیرجمعی متناهی اندازهٔ احتمال نشان می‌دهد که احتمال اتصال مبدأ به رأسی با فاصله n کوچک‌تر از $(2d)^n$ است. برای اثبات صرفاً از این واقعیت استفاده می‌شود که یکی از $(2d)^n$ مسیر از خودگریز به طول n که از مبدأ شروع می‌شود باید فقط از یال‌های بازساخته شود. منظور از یک مسیر از خودگریز آن است که از هیچ رأسی بیش از یک بار عبور نمی‌شود. به‌عنوان پیامدی از آن، نتیجه می‌شود که به محض اینکه $p < 1/(2d)$ ، $\theta(p) = 0$. این استدلال ابتدایی در [۵] توضیح داده شده است. در مشبکهٔ \mathbb{Z}^2 ، هریس این نتیجه را با نشان دادن اینکه $\theta(\frac{1}{2}) = 0$ ، بهبود بخشید [۱۹]. نظریهٔ پرکولاسیون بیشتر روی مطالعهٔ احتمال‌های بحرانی متمرکز شده است؛ یعنی، این سؤال که، کجا پرکولاسیون اتفاق می‌افتد؟

شهرت دههٔ هشتاد تا حد زیادی مدیون ستارگان موسیقی پاپ و در حد کمتری به خاطر احتمال‌دانانی مانند هری کِستن و مایکل آیزنمن است. این افراد در پیشرفت شگفت‌انگیزی که این نظریه در این دوره تجربه کرد، سهم زیادی دارند. در واقع، این دهه با آتش‌بازی قضیهٔ کِستن [۸] شروع شد که نشان می‌دهد نقطهٔ بحرانی پرکولاسیون بندی برنولی روی مشبکهٔ مربعی \mathbb{Z}^2 برابر با $\frac{1}{2}$ است (شکل ۲ را ببینید).

¹⁰Conformal field theory

¹¹first passage percolation

[۱۲]. این مدل‌ها به‌عنوان مدل‌های گسسته برای آزمایش‌های زندگی واقعی معرفی شدند اما بعداً برای مدل‌سازی طیف وسیعی از پدیده‌ها و سیستم‌های ساخته شده از مواد فرومغناطیسی مفید واقع شدند. آن‌ها همچنین گسسته‌سازی نظریه میدان اقلیدسی و کوانتومی را نشان می‌دهند و به همین دلیل از نظر فیزیک نظری مهم‌اند. درحالی‌که انگیزه اصلی از فیزیک سرچشمه می‌گرفت، آن‌ها به‌عنوان اشیای ریاضی بسیار پیچیده و غنی ظاهر می‌شدند، که مطالعه آن‌ها مستلزم توسعه ابزارهای جدیدی بود که در بسیاری از حوزه‌های دیگر ریاضیات کاربرد داشتند. یکی دیگر از فرایندهای پرکولاسیون طبیعی که برای آن خوددوگانی^{۱۸} (یعنی که برای $p = 1/2$ احتمال گذر تعریف شده برای شبکه مربعی دقیقاً $1/2$ است) رخ می‌دهد، پرکولاسیون پواسون-ورانوی^{۱۹} است که در زمینه پرکولاسیون اولین گذر توسط وحیدی اصل و ویرمن [۲۰، ۲۱، ۲۲] معرفی شده است. این مدل پرکولاسیون تصادفی توسط افراد زیادی مورد مطالعه قرار گرفته است و به هندسه گسترش بیماری‌های همه‌گیر نزدیک‌تر است. در حقیقت سایر شبکه‌ها برای تحلیل گسترش کووید-۱۹، بیش از اندازه آرمانی هستند. با در نظر گرفتن موقعیت افراد به‌صورت رأس‌ها (یا ضلع‌ها)ی کاشی‌کاری وارانوی، مدلی واقعی‌تر برای بررسی گسترش بیماری که هندسه مسائل مرتبط با آن را دربرمی‌گیرد، داریم. همان‌طور که اشاره شد محیطی که پرکولاسیون در آن رخ می‌دهد، تصادفی است. این بدان معنی است که فن‌های مورد نیاز برای تعیین احتمال بحرانی نسبتاً متفاوت است. پیکربندی رسمی این مدل به شرح زیر است. فرایند پواسون Z ی با شدت λ روی \mathbb{R}^2 ساخته می‌شود و به شرط Z ، به هر نقطه z از Z ، به‌طور مستقل، یک رنگ سیاه یا سفید نسبت داده می‌شود به‌طوری‌که

$$P(\text{رنگ } z \text{ سیاه است}) = p.$$

به‌طور معادل، می‌توان Z را به‌عنوان اجتماع دو فرایند پواسون Z_b و Z_w به ترتیب با شدت‌های p و $1-p$ ، متناظر با نقاط سیاه و سفید، تولید کرد. در این حالت از رنگ‌های «سیاه یا سفید» به‌جای اصطلاحات رایج «باز یا بسته» استفاده می‌شود. این رنگ‌بندی برای شکل‌ها طبیعی‌تر به نظر می‌رسد. به شرط Z ، کاشی‌کاری وارانوی متناظر بدین‌صورت ساخته

داده می‌شوند. بیشتر مسائل بستگی به این دارند که مسیری را با کمترین وزن بین دو نقطه، که به‌عنوان ژئودزیک^{۱۲} شناخته می‌شود، بیابند، یا اینکه بفهمند هندسه تصادفی در مقیاس‌های بزرگ چگونه رفتار می‌کند. سی سال بعد، فیزیک‌دانی بنام کاردی [۱۱]، رابطه‌ای روشن برای حد احتمال‌های گذر در مستطیل‌هایی با نسبت تصویر ثابت ارائه کرد. هم‌زمان، شرام فرایندی تصادفی را معرفی کرد که امروزه تکامل شرام-لورنر^{۱۳} نامیده می‌شود و رفتار رابطه‌ها^{۱۴} بین بست‌های باز و بسته را توصیف می‌کند. مدت کوتاهی پس از اثبات فرمول کاردی توسط اسمیرنوف، توصیف کامل حد پرکولاسیون بستنی، از جمله شرح کامل «گروه حلقه»ی^{۱۵} مربوط به رابطه‌های مرزی هر مؤلفه همبند، توسط کامیا و نیومن [۶] به دست آمد. قضیه اسمیرنوف و تکامل شرام-لورنر یک ویژگی مشترک داشتند: هر دو به روشی عمیق بر تحلیل پیچیده تکیه دارند. اولین نتیجه از آنالیز مختلط گسسته یعنی مطالعه تابع‌های روی گراف‌هایی که تابع‌های تمام‌ریخت^{۱۶} را تقریب می‌زند، برای اثبات همگرایی استفاده می‌کند. دومی، تکامل تعینی لورنر را (که برای حل حدس بیپر باخ^{۱۷} از آن استفاده شد) برای ساختن فرایندهای تصادفی بازبینی می‌کند که کاربردهای آن اکنون در تمامی نظریه‌های احتمال گسترش یافته است. اواخر دهه نود شاهد ظهور دو مسئله جدید و مهم در مورد پرکولاسیون برنولی بود. هاگستروم، پرز، و استیف [۹] یک پویایی زمانی ساده را در پرکولاسیون برنولی معرفی کردند که با بازنمونه‌گیری هر یال با نرخ نمایی 1 به دست می‌آمد. به‌طور دقیق‌تر، یک متغیر نمایی به هر یال شبکه پیوست می‌شود. این بود که پرکولاسیون پویا به یک مدل بسیار جالب تبدیل شد که پدیده‌های غنی‌تری را آشکار می‌کرد. درحالی‌که نظریه پرکولاسیون برنولی هنوز حاوی چندین گوهر ناشناخته و شایسته راه‌حلی درخور زیبایی آن‌ها بود، آن سال‌ها علاقه به مدل‌های پرکولاسیون عمومی‌تر که در حوزه‌های مختلف فیزیک آماری به‌عنوان مدل‌های طبیعی مرتبط با سایر سیستم‌های تصادفی ظاهر می‌شدند، افزایش یافت. علی‌رغم اینکه پرکولاسیون برنولی یک اندازه حاصل‌ضربی است، وضعیت‌های یال‌ها در مدل‌های پرکولاسیون معمولاً «مستقل» نیستند. مدل‌های پرکولاسیون وابسته اغلب با مدل‌های اسپین شبکه مرتبط هستند

¹²geodesic¹³Schramm Loewner evolution¹⁴interfaces¹⁵loop ensemble¹⁶holomorphic functions¹⁷Bieberbach conjecture¹⁸self-duality¹⁹Poisson-Voronoi percolation

می‌شود که خانهٔ ورنوی $z \in Z$ ، نسبت به Z ، مجموعهٔ

$c(p) > 0$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$V(z) = V_Z(z) = \{x \in \mathbb{R}^2 : d(x, z) = \inf_{z' \in Z} d(x, z')\}$$

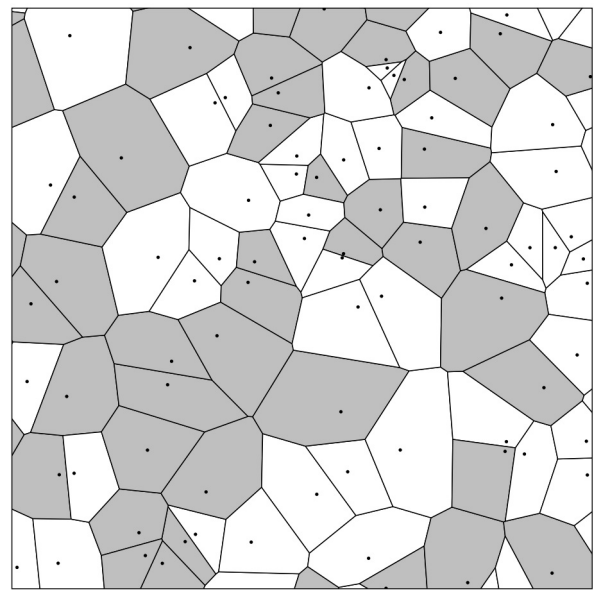
$$P(|C_x| \geq n) \leq \exp(-c(p)n).$$

است که در آن $d(x, y)$ متریک اقلیدسی است. با احتمال ۱، هر خانه برای هر مقدار k ، یک k -ضلعی محدب بسته است، هر رأس هر خانه دقیقاً در تلاقی سه کاشی قرار دارد و اگر دو کاشی در کنار هم باشند، یک یال کامل مشترک دارند. باین‌حال، توجه داشته باشید که خانه‌های $V(z_1)$ و $V(z_2)$ ممکن است بدون یال مشترک خود که حاوی نقطهٔ میانی $z_1 z_2$ است، در تلاقی باشند (نمونه‌های متعددی در شکل ۳ وجود دارد).

برای برخی مقادیر p ، خوشهٔ باز C_x با احتمال ۱ متناهی است اما اندازهٔ مورد انتظارش لزوماً متناهی نیست. این توجه ما را به دیگر احتمال بحرانی که توسط تمپرلی ارائه شده است، معطوف می‌کند. برای یک بست x ، قرار می‌دهیم $\chi_x(p) = E(|C_x|)$ که در آن E عملگر امید ریاضی است. اگر همهٔ بست‌ها معادل باشند، از نماد $\chi(p)$ برای سادگی استفاده می‌شود. بدیهی است $\chi_x(p)$ نسبت به p صعودی است. مانند قبل، $\chi_x(p)$ برای بست x متناهی است اگر و تنها اگر برای همهٔ بست‌ها متناهی باشد. در نتیجه، یک احتمال بحرانی به‌صورت زیر وجود دارد که به x بستگی ندارد:

$$p_T = \sup \{p : \chi_x(p) < \infty\} = \inf \{p : \chi_x(p) = \infty\}.$$

مانند آنچه کیستن برای پرکولاسیون بندی روی \mathbb{Z}^2 نشان داد، بولاباش و ریوردان [۳] نیز ثابت کردند که برای پرکولاسیون تصادفی ورنوی، دو نوع احتمال بحرانی برابر با $\frac{1}{2}$ هستند. برای دو نقطه u و v فاصله هذلولوی به‌صورت



شکل ۳. بخشی از کاشی‌کاری تصادفی ورنوی سیاه (خاکستری) و سفیدرنگ در \mathbb{R}^2 . نقطه‌ها، نقاط Z هستند [۳].

تعریف می‌شود که در آن $\|\cdot\|$ نرم اقلیدسی است. نتایج بنجامینی و شرام تفاوت‌های قابل‌توجهی را بین پرکولاسیون پواسون-ورنوی در صفحهٔ هذلولوی و پرکولاسیون پواسون-ورنوی در صفحهٔ اقلیدسی برجسته می‌کند. برای شروع، در مورد دوم مشخص است [۳، ۲۳] که احتمال بحرانی برای همهٔ مقادیر پارامتر شدت λ برابر با $\frac{1}{2}$ است. شاید جالب‌تر، تفاوت در رفتار تعداد خوشه‌های نامتناهی سیاه باشد. در حالت اقلیدسی وقتی که $p \leq 1/2$ خوشه‌های سیاه نامتناهی وجود ندارد، و در غیر این صورت، دقیقاً یک خوشهٔ سیاه نامتناهی وجود دارد (تقریباً به‌طور حتم). برای حالت هذلولوی، بنجامینی و شرام نشان دادند که اگر $p \leq p_c(\lambda)$ همهٔ خوشه‌های سیاه متناهی هستند. اگر $p \geq 1 - p_c(\lambda)$ آنگاه دقیقاً یک خوشهٔ سیاه نامتناهی وجود دارد. اما اگر $p_c(\lambda) < p < 1 - p_c(\lambda)$ آنگاه تعدادی نامتناهی، خوشهٔ سیاه متمایز و نامتناهی وجود دارد (تقریباً به‌طور حتم). اخیراً، هسنین و مولر [۱۰] نشان دادند که احتمال بحرانی وجود یک خوشهٔ نامتناهی سیاه روی صفحهٔ هذلولوی به‌طور مجانبی برابر با $\pi\lambda/3$ است وقتی $\lambda \rightarrow 0$ (شکل ۴).

گراف کاشی‌کاری ورنوی، گراف نامتناهی G با مجموعهٔ رئوس Z است، که در آن دو نقطه z_1 و z_2 در مجاورت هم قرار می‌گیرند هرگاه خانه‌های ورنوی آن‌ها کنار هم باشند. مفاهیم پرکولاسیون در کاشی‌کاری ورنوی همان مفاهیم معمول پرکولاسیون بستنی در گراف (تصادفی) G است. در این حالت گوییم که پرکولاسیون رخ می‌دهد هرگاه یک خوشهٔ همبند نامتناهی از خانه‌های سیاه وجود داشته باشد. بولاباش و ریوردان [۳] نشان دادند که در این حالت احتمال بحرانی برابر با $\frac{1}{2}$ است. به‌طور دقیق‌تر، اگر $p > 1/2$ ، اجتماع خانه‌های سیاه شامل یک مؤلفهٔ نامتناهی با احتمال ۱ است، درحالی‌که اگر $p < 1/2$ ، توزیع اندازهٔ مؤلفهٔ خانه‌های سیاه شامل یک نقطهٔ معین به‌صورت نمایی کاهش می‌یابد. این نتایج مشابه نتایج کیستن برای پرکولاسیون بندی در \mathbb{Z}^2 است. آن‌ها همچنین نشان دادند که برای هر $\frac{1}{2} < p < 1$ و هر $n \geq 1$ ، یک ثابت

از مفاهیم مقدماتی در چارچوب نظریه پرکولاسیون استفاده می‌کنیم که احتمال وقوع پرکولاسیون را در قالب اتصالات مسدود p و نامسدود $1-p$ تعیین می‌کند. احتمال پرکولاسیون با احتمال آلوده شدن فردی به کووید-۱۹ از طریق تماس با یک فرد مبتلا ارتباط دارد. اتصال مسدود نشان‌دهنده یک فرد آلوده است که قرنطینه را رعایت و در نتیجه شیوع بیماری را "مسدود" می‌کند. به همین ترتیب، ارتباط نامسدود به فردی آلوده اشاره دارد که فاصله‌گذاری اجتماعی را رعایت نمی‌کند و در نتیجه، به افزایش احتمال ابتلای افراد جدید کمک می‌کند. علاوه بر این، از یک شبکه اتصالات سه‌تایی ساده برای توصیف شیوع کووید-۱۹ استفاده می‌شود به این معنا که یک فرد آلوده می‌تواند دو نفر دیگر را آلوده کند و غیره (شکل ۵). اساساً، برای هر تعداد اتصال n ، یک احتمال کل P_n را داریم که شامل احتمال‌های پرکولاسیون و عدم پرکولاسیون است. در ساده‌ترین حالت، یعنی $n=1$ ، تنها دو وضعیت ممکن وجود دارد، یعنی مسیر مسدود نیست (p) یا مسدود است ($1-p$). بنابراین، احتمال کل در این حالت به صورت $P_1 = p + (1-p) = 1$ داده می‌شود. برای $n=2$ ، چهار وضعیت ممکن وجود دارد: اتصال ۱ مسدود و اتصال ۲ نامسدود، اتصال ۱ نامسدود و اتصال ۲ مسدود، اتصال ۱ و ۲ مسدود و اتصال ۲ نامسدود، و احتمال‌های مربوط به هر حالت، به ترتیب، به صورت $2 \times (1-p)p$ ، $(1-p)(1-p)$ ، و p^2 داده می‌شود. در این حالت، احتمال کل برابر با مجموع احتمال‌های هر حالت است و به صورت

$$P_2 = 2 \times (1-p)p + (1-p)(1-p) + p^2,$$

است، که می‌توان آن را به صورت $P_2 = (p + (1-p))^2$ بازنویسی کرد. با پیروی از چنین منطقی، تابع ریاضی کلی احتمال کل P_n ، یعنی شامل احتمال پرکولاسیون‌شدگی^{۲۱} و پرکولاسیون‌نشستگی^{۲۲}، برحسب تعداد اتصالات، همان‌طور که انتظار می‌رود،

$$P_n = (p + (1-p))^n = 1,$$

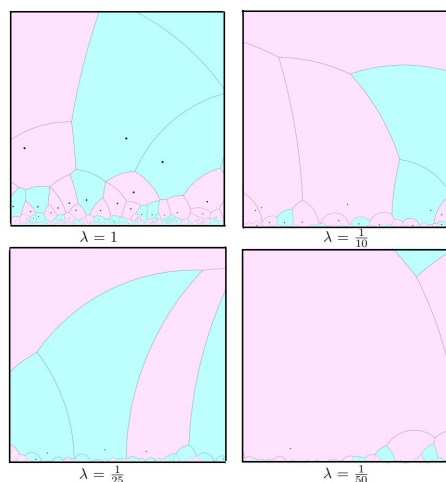
است. توجه داشته باشید که P_n هم شامل احتمال پرکولاسیون‌شدگی و هم پرکولاسیون‌نشستگی است، اما ما تنها به احتمال آلودگی (پرکولاسیون‌شدگی) توجه داریم. بنابراین، ما تنها آن جمله‌های P_n را در نظر می‌گیریم که در احتمال پرکولاسیون سهم دارند. با در نظر گرفتن $n=3$ ، به‌عنوان مثال،

$$P_3 = 3(1-p)p^2 + (1-p)^3 + 3(1-p)^2p + p^3 = 1.$$

²⁰dynamical mean-field theory

²¹percolative

²²non-percolative



شکل ۴. شبیه‌سازی پرکولاسیون پواسون-ورانوی هذلولوی [۱۰].

در فیزیک ماده چگال، از روش‌های قدرتمندی برای کشف ساختار الکترونیکی سیستم‌ها استفاده می‌شود. در اینجا، نظریه تابعی چگالی و نظریه میدان میانگین دینامیکی^{۲۰} شایسته ذکر است. دومی امکان بررسی سیستم‌های به اصطلاح همبسته قوی را فراهم می‌کند، یعنی سیستم‌هایی که در آن‌ها برهمکنش بین الکترون‌ها و در نتیجه ظهور فازهای غیرمنتظره وجود دارد. در یک توصیف خام، نظریه میدان میانگین دینامیکی یک اتم را به‌عنوان ناخالصی در یک ماتریس، با چندین الکترون تحت تأثیر یک میدان مؤثر فرض می‌کند [۱۷]. چنین تقریبی زمانی دقیق می‌شود که عدد هماهنگی z بی‌نهایت شود، یعنی نزدیک‌ترین همسایه‌های بی‌نهایت را در نظر می‌گیرد [۱۶]. در بخش ۴ با تحلیل شیوع کووید-۱۹، نظریه پرکولاسیون را با احتمال مبتلا شدن یک فرد برحسب تعداد افراد حاضر در داخل و خارج قرنطینه مرتبط می‌کنیم. شکل ۵ احتمال ابتلا را به‌عنوان تابعی از تعداد اتصالات n و ارتباط متناظر آن‌ها را با مسیرهای مسدود و نامسدود، که در چارچوب نظریه پرکولاسیون موضوع شناخته شده‌ای است، نشان می‌دهد. برای اطلاعات بیشتر و مطالعه سیر کامل تحولات نظریه پرکولاسیون، به‌ویژه پرکولاسیون روی شبکه‌های مختلف، از آغاز تاکنون به مراجع [۴] و [۷] رجوع کنید.

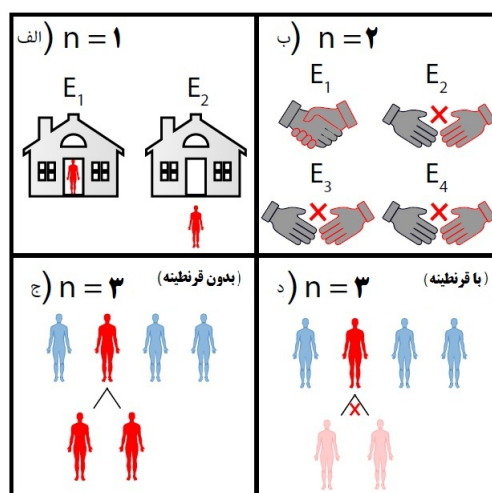
۴ مدل بندی کووید-۱۹

در این بخش، که بر اساس مطالب ارائه شده در مرجع [۱۳] تدوین شده است، و به‌منظور توصیف احتمال ابتلا به کووید-۱۹ یا هر بیماری دیگر،

n	احتمال پرکولاسیون P^*	پیگر بندی‌های مسیر
1	p	
2	p^2	
3	$2p^2 - p^3$	
4	$3p^2 - 3p^3 + p^4$	
5	$4p^2 - 6p^3 + 4p^4 - p^5$	

شکل ۶. تعداد اتصالات n (ستون سمت چپ) با احتمال‌های پرکولاسیون متناظر جمله‌های P^* (ستون وسط) و نمایش شماتیک پیگر بندی‌های ممکن مسیری (ستون راست). خطوط قرمز نشان‌دهنده تقسیم مسیرهای آبی است. هر پیگر بندی، با در نظر گرفتن همهٔ امکان‌های مسدودی و نامسدودی مسیرها، دارای $2n$ وضعیت ممکن است [۱۳].

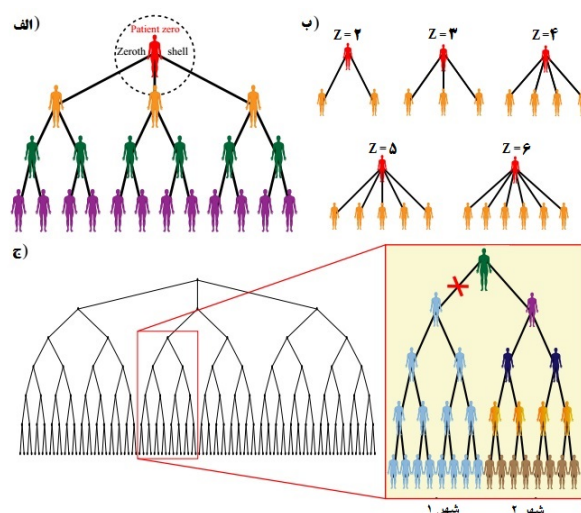
با این حال، احتمال پرکولاسیون، که در اینجا با P^* برچسب‌گذاری می‌شود، تنها با جمله‌های $P^* = (2p^2 - p^3)$ داده می‌شود.



شکل ۵. نمایش شماتیک احتمال ابتلا به کووید-۱۹ بر اساس تعداد اتصالات n . (الف) برای $n = 1$ دو حالت ممکن E_1 و E_2 وجود دارد، که در آن E_1 نشان‌دهندهٔ یک مسیر مسدود (فرد آلوده در قرنطینه است) و E_2 یک مسیر نامسدود (فرد آلوده در قرنطینه نیست) است، اما در تماس با افراد دیگر نیست. (ب) برای $n = 2$ ، چهار حالت ممکن وجود دارد که با E_1, E_2, E_3, E_4 برچسب‌گذاری شده‌اند. برهمکنش بین یک فرد آلوده (دست با رنگ قرمز مشخص شده است) و فرد غیرآلوده (دستی که با رنگ مشکی مشخص شده است) با دست‌دادن نشان داده می‌شود. تنها حالت E_1 نشان‌دهندهٔ یک پرکولاسیون واقعی، یعنی سرایت است زیرا برهمکنش تماسی در واقع رخ داده است. (ج) برای $n = 3$ ، یک فرد آلوده (رنگ قرمز) می‌تواند به دلیل در قرنطینه نبودن، دو نفر دیگر را آلوده کند، در حالی که در (د) فرد قرنطینه را رعایت کرده و از آلوده شدن دو نفر دیگر جلوگیری (که با رنگ قرمز روشن نشان داده شده‌اند) کرده است (رنگ آبی نشان‌دهندهٔ افراد غیرآلوده است). برای $n = 3$ ، ۸ امکان ترکیبی وجود دارد، اما برای پرهیز از درهم‌رفتگی تنها دو مورد از آن‌ها را نشان داده‌ایم [۱۳].

اساساً، برای تعیین احتمال پرکولاسیون لازم است که یک کار آنالیز ترکیبی با استفاده از مقدار n با در نظر گرفتن همهٔ احتمال‌ها برای وجود همهٔ وضعیت‌های ممکن E_n انجام شود. سپس، تمام احتمال‌های مرتبط با سهم وضعیت‌هایی را که احتمال وقوع پرکولاسیون مربوط به آن‌ها صفر است، کنار می‌گذاریم، و بنابراین احتمال پرکولاسیون را به صورت مجموع تمام احتمال‌های وجود همهٔ وضعیت‌های باقی‌مانده به دست می‌آوریم. شکل ۶ توسعه‌ای از چنین تحلیلی را برای سایر مقادیر n تنها با در نظر گرفتن جمله‌های مربوط به احتمال پرکولاسیون‌شدگی نشان می‌دهد. در این مرحله، حالت $n = 3$ را در نظر می‌گیریم و نیز با در نظر گرفتن شبکه موسوم به بنه^{۳۳} به تحلیل گسترده‌تری می‌پردازیم. همان‌طور که می‌توان از شکل ۶ دریافت، برای $n = 3$ ، مسیری وجود دارد که به دو مسیر دیگر منتهی می‌شود که مسیرهایی متوالی هستند که از هر یک از این دو نشئت می‌گیرند اما در اینجا نشان داده نشده‌اند.

و z مسیر تشکیل شده‌اند، پوستهٔ صفر شبکه را تشکیل می‌دهند (قاب الف) (شکل ۷). سپس، هر قرارگاه جدید در مرز پوستهٔ صفر منجر به ایجاد $z - 1$ مسیر و قرارگاه‌های جدید می‌شود که پوستهٔ شمارهٔ یک را تشکیل می‌دهند. این کار را می‌توان متوالیاً تکرار کرد و پوسته‌های دیگر را تا به انتهای شبکه تشکیل داد، آخرین قرارگاه‌ها تنها یک مسیر دارند و امکان تشکیل پوسته‌های جدید دیگر وجود ندارد. در این بافتار، قرارگاه مرکزی را به عنوان مرجع در نظر می‌گیریم و به این ترتیب می‌توانیم مسیری را از قرارگاه مرکزی به قرارگاهی در مرز پوستهٔ نهایی دنبال کنیم. برای این کار ضروری است که هم مسیرهای در دسترس و هم قرارگاه‌های اشغال شده وجود داشته باشد و پرکولاسیون تحقق یابد. به این ترتیب، می‌توان احتمال پرکولاسیون P^* را به عنوان احتمال دست‌دادن در نظر گرفت که اجازه می‌دهد یک مسیر از قرارگاه مرکزی به یک قرارگاه در پوستهٔ نهایی شبکه متصل شود. به روشی مشابه، احتمال عدم پرکولاسیون را به صورت Q نشان می‌دهیم. اگر هر قرارگاه اشغال شده با احتمال p منجر به $z - 1$ مسیر شود، می‌توانیم تعداد قرارگاه‌های اشغال شده را به طور متوسط $(z - 1)p$ برآورد کنیم. باین حال، با در نظر داشتن اینکه هر قرارگاه می‌تواند اشغال شده باشد یا نباشد، کاهش مسیرهای موجود در هر پوسته از رسیدن به قرارگاه نهایی جلوگیری می‌کند و در نتیجه پرکولاسیون رخ نمی‌دهد. با رفتن از یک پوسته به پوستهٔ دیگر، اگر $(z - 1)p < 1$ ، احتمال رسیدن به پوستهٔ نهایی (پرکولاسیون) کاهش می‌یابد. چنین تحلیلی مهم از این نظر است که منجر به آستانهٔ پرکولاسیون $p_c = \frac{1}{z-1}$ می‌شود. به عنوان مثال، با به کارگیری $z = 3$ ، اکنون روی عامل‌هایی تمرکز می‌کنیم که ممکن است از پرکولاسیون جلوگیری کند. در این حالت خاص، هر قرارگاهی به دو مسیر منجر می‌شود و هر یک از آن‌ها با احتمال Q منتهی به عدم پرکولاسیون می‌شوند. از تعریف‌های استاندارد مجموعه‌ها و احتمالات، دو پیشامد مستقل اند اگر و تنها اگر احتمال اشتراک بین آن‌ها را بتوان به صورت حاصل ضرب احتمال‌های آن‌ها نوشت. بنابراین، احتمال عدم پرکولاسیون برای $(z - 1)$ برابر با Q^z خواهد بود. همچنین، قرارگاه‌ها باید اشغال شده باشند تا پرکولاسیون رخ دهد، به طوری که احتمال کل باید به صورت $Q = (1 - p) + pQ^z$ باشد. جواب‌های معادله اخیر $Q = 1$ هستند، یعنی هیچ پرکولاسیونی رخ نمی‌دهد و $Q = \frac{1-p}{p}$ که در صورتی می‌تواند برابر با صفر باشد که $p = 1$ و در نتیجه پرکولاسیون رخ می‌دهد. با تحلیل قرارگاه مرکزی و سه مسیر منشعب از آن، احتمال پرکولاسیون باید p را به حساب بیاورد و احتمال عدم پرکولاسیون را نادیده بگیرد، یعنی $P^* = p - pQ^z$ را کاهش دهد. با جایگزین کردن



شکل ۷. الف) نمایش شبکهٔ بته برای $z = 3$ ، که در آن پوستهٔ صفر با یک فرد آلوده (به رنگ قرمز) اشغال شده است. در این پیکربندی، هر فرد مبتلا می‌تواند دو نفر دیگر را آلوده کند. برای رعایت اختصار، تنها به چهار پوسته در این نمایش از شبکهٔ بته اکتفا می‌کنیم، یعنی پوستهٔ صفر ($n' = 0$ ، رنگ قرمز)، پوستهٔ اول ($n' = 1$ ، رنگ نارنجی)، پوستهٔ دوم ($n' = 2$ ، رنگ سبز)، و پوستهٔ سوم ($n' = 3$ ، رنگ بنفش). نقطهٔ شروع با بیمار صفر نشان داده شده است (رنگ قرمز). ب) نمایش تعداد افرادی که یک فرد آلوده (رنگ قرمز) می‌تواند برحسب تعداد نزدیک‌ترین همسایگان z برای $2 \leq z \leq 6$ را، با استفاده از شبکهٔ بته آلوده کند. ج) نمایش شماتیک درخت کیلی برای $z = 3$ برای پوسته‌های مختلف. ناحیهٔ بزرگ‌نمایی شده با رنگ قرمز دو شاخهٔ مجزا را، که دو شهر فرضی متمایز ۱ و ۲ را نشان می‌دهند، به تصویر می‌کشد. یک فرد آلوده (رنگ سبز) قادر نیست که به شهر ۱ دسترسی پیدا کند و بنابراین همه سالم هستند (رنگ آبی). در شاخهٔ سمت راست، فرد آلوده می‌تواند به شهر ۲ برسد و در نتیجه بیماری را گسترش دهد. رنگ‌های کار رفته برای نشان دادن افراد در شاخهٔ سمت راست، نمایندهٔ پوسته‌های مختلف بعدی هستند [۱۳].

با در نظر گرفتن چنین مسیرهای پی‌درپی‌ای، می‌توانیم پوسته‌هایی نامتناهی ایجاد کنیم که منجر به شکل‌گیری شبکهٔ بته به صورتی می‌شود که در شکل ۷ نشان داده شده است. به منظور کامل بودن، در ادامه شکل‌گیری چنین شبکه‌ای را بر اساس بحث‌های گزارش شده در کتاب‌های درسی، مانند مرجع [۱۸] شرح می‌دهیم. در شرایط آغازین، یک قرارگاه مرکزی با احتمال اشغال بودن p و احتمال خالی بودن $1 - p$ منجر به تعداد z مسیر می‌شود (عدد هم‌ارایی z^c)، که یک قرارگاه نیز در انتهای هر مسیر دارد. این مجموعهٔ قرارگاه‌ها که توسط قرارگاه مرکزی

مانند شبکه اردوش-رینی^{۲۵} نیز استفاده کرد که در آن ساختمان چنین درختی احتمالاتی است و z ثابت نیست. در حالت اخیر، امکان دارد که تلاقی بین شاخه‌ها صورت گیرد. می‌توان اثرات قرنطینه‌های انتخابی را در قالب مدل اس‌ئی‌آر^{۲۶} نیز تحلیل کرد که تعداد افرادی را نیز در نظر می‌گیرد که در معرض بیماری قرار گرفته‌اند. بنابراین، این امکان وجود دارد که با به‌کارگیری عامل‌های معمولی برای مدل اس‌ئی‌آر، تعداد شهرهای متصل، ناحیه‌های خاص، استان‌ها، یا حتی کشورها و تعداد افرادی که از ناحیه‌ای به ناحیهٔ دیگر در رفت‌وآمد هستند، تعداد ابتلاهای جدید را پیش‌بینی کرد [۱۳].

توجه شود که در این بخش، تمام توجه به بررسی همه‌گیری بر روی شبکهٔ بته بود درحالی‌که این مدل بسیار ساده و غیرواقعی است. تنها حسن آن در این است که مسئلهٔ پرکولاسیون به‌طور دقیق و کامل بر روی این شبکه حل شده است درحالی‌که همه‌گیری بسیار پیچیده است و نباید مدل‌بندی همه‌گیری به این شبکه محدود شود. در واقع، با توجه به پیچیدگی نحوهٔ انتشار بیماری کووید-۱۹، باید از پیچیده‌ترین و نزدیک‌ترین مدل‌ها - آن‌هم به‌صورت تقریبی - استفاده شود. همان‌طور که در تعریف مدل‌های پواسون-ورانوی هذلولوی دیده می‌شود، آستانهٔ پرکولاسیون و کران‌های مربوط به اندازهٔ خوشه‌های باز، در حالت‌های زیر و زیر بحرانی، با مسئلهٔ انتشار کووید-۱۹ همخوان‌تر است. با اشاره به بحث صورت گرفته در زمینه شیوع کووید-۱۹، می‌توان یک قرارگاه اشغال‌شده در شبکهٔ بته را با یک فرد آلوده و مسیرهای جابه‌جایی چنین افرادی و احتمال ابتلای آن‌ها به افراد سالم مرتبط کرد (شکل ۷). اگر یک فرد مبتلا به انتهای مسیری برود و یک فرد سالم را پیدا کند، آن فرد مبتلا می‌شود و می‌تواند، به‌عنوان مثال، دو نفر دیگر را آلوده کند. اما اگر فرد سالم در قرنطینه بماند و در مسیر ابتلا قرار نگیرد، محل خالی می‌شود و احتمال پرکولاسیون را کاهش می‌دهد. به همین ترتیب، اگر فرد مبتلا قرنطینه را رعایت کند، مسیر منتهی به آلودگی قطع می‌شود و احتمال پرکولاسیون نیز کاهش می‌یابد. واضح است که با افزایش تعداد مسیرهای ممکن، عملیات روی داده‌ها به یک موضوع پیچیده تبدیل می‌شود و از حل مسئله به‌صورت ساده جلوگیری می‌کند. از این رو، برای مقابله با چنین پیچیدگی، فن‌های پیشرفتهٔ تحلیل داده‌ها موردنیاز است. به‌عنوان مثال، این می‌تواند شامل روش‌های مونت‌کارلوی زنجیر مارکوفی مانند بستهٔ ام‌سی‌ئی^{۲۷} و الگوریتم‌های مبتنی بر یادگیری ماشین مانند مواردی باشد که در بسته سای‌کیت‌لرن^{۲۸} ارائه شده است

جواب‌های قبلی به‌دست‌آمده برای Q ، دو حالت مختلف خواهیم داشت. اگر $Q = 1$ ، آنگاه $P^* = 0$ که نشان‌دهندهٔ شرایط غیرپرکولاسیونی است، یعنی $p < p_c$. اگر $Q = \frac{(1-p)}{p}$ ، آنگاه

$$P^* = p \left\{ 1 - \left[\frac{(1-p)}{p} \right]^z \right\}.$$

شایان ذکر است که چنین تحلیلی برای مقادیر مختلف z ، متمایز است زیرا به تعداد مسیرهای ممکن بستگی دارد. همچنین، توجه داشته باشید که P^* برای $z = 3$ عام است و به طول S' مسیر بستگی ندارد:

$$S' \propto \frac{1}{p - p_c},$$

که با اندازهٔ شبکه ارتباط دارد. با تحلیل ساده‌ترین حالت، یعنی زنجیری تشکیل‌شده از مجموعه‌ای از قرارگاه‌ها، می‌توان تابع همبستگی جفتی $G(r)$ را تعریف کرد. این تابع با احتمال پرکولاسیون بین دو قرارگاه مرجع اشغال‌شده با فاصله r از هم ارتباط دارد. چنین فاصله‌ای قرارگاه‌های دیگری را که ممکن است بین قرارگاه‌های اشغال‌شده وجود داشته باشند، به هم پیوند می‌دهد. تابع $G(r)$ به صورت $G(r) = e^{-r/\xi}$ داده می‌شود که در آن $\xi = 1/(p_c - p)$. برای $p \rightarrow p_c$ ، ξ و اگر می‌شود $G(r) \rightarrow 1$. در مورد شیوع کووید-۱۹، این بدان معنی خواهد بود که اگر تعداد مسیرهای نامسدود به چنین آستانه‌ای برسد، یعنی بخشی قابل‌ملاحظه‌ای از جمعیت، فاصلهٔ اجتماعی را رعایت نکند، در این صورت افزایش چشم‌گیری در تعداد ابتلاهای جدید در طول زمان رخ خواهد داد. از همان روش ریاضی که قبلاً مورد بحث قرار گرفت، می‌توان با در نظر گرفتن شاخه‌های درخت کیلی به‌عنوان شهر استفاده کرد (قاب (ج) شکل ۷). اخیراً کارآمد بودن قرنطینهٔ متناوب مورد توجه قرار گرفته است. این بدان معنی است که شهرهای مجاور در برنامه‌ای از پیش تعیین‌شده در روزهای مختلف به فاصله‌گذاری اجتماعی می‌پیوندند. در نتیجه، فعالیت‌های اقتصادی را می‌توان در چنین شهرهایی از سرگرفت، بدون اینکه احتمال انتشار بیماری بین این شهرها افزایش یابد. ایدهٔ موجود در ورای این مطلب، در این واقعیت نهفته است که اگر فرد مبتلا نتواند به یکی از این شهرها برسد (قاب (ج) شکل ۷)، احتمال آلوده شدن یک فرد، و همچنین احتمال همهٔ ابتلاهای بعدی که ممکن است در این شهر رخ دهد، کاهش می‌یابد. برای بحث در مورد درخت کیلی، از مفهوم درخت منظم استفاده کرده‌ایم به این معنی که شاخه‌های درخت همیشه به یک شکل با استفاده از یک عدد z ساخته شده‌اند. با این حال، می‌توان از درخت‌های تصادفی،

²⁵Erdős-Rényi network

²⁶SEIR

²⁷emcee

²⁸SciKitLearn

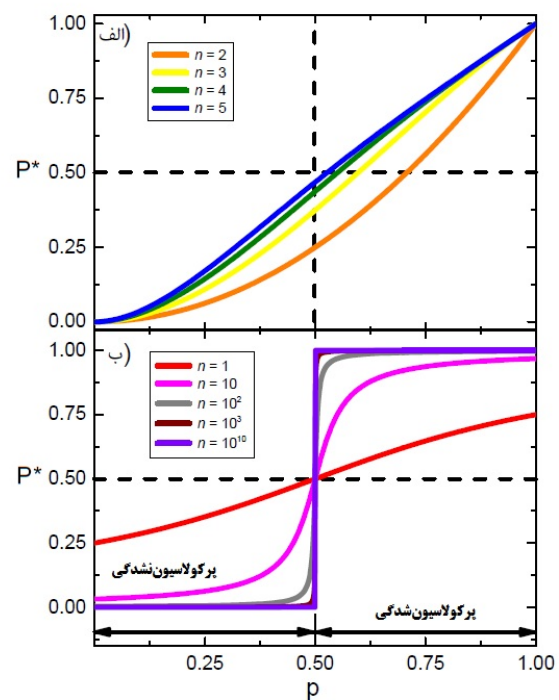
۵ تحلیل داده‌ها و موضوع ابتلا

به دلیل انطباق نظریهٔ پرکولاسیون با شیوع کووید-۱۹ که قبلاً مورد بحث قرار گرفت، اکنون در مورد تأثیرات احتمال پرکولاسیون در افزایش تعداد اتصالات بحث می‌کنیم. در شکل ۸ نشان داده شده است که برای مثال، با مقایسهٔ رفتار بین احتمال‌های پرکولاسیون، مشاهده می‌کنیم که P^* برای مقادیر بالاتر n سریع‌تر رشد می‌کند. برای مقادیر متناهی n ، احتمال پرکولاسیون با افزایش تعداد مسیرهای نامسدود p افزایش می‌یابد، یعنی احتمال ابتلای افراد به کووید-۱۹ متناسب با تعداد افرادی که در قرنطینه نیستند، افزایش می‌یابد. باین‌حال، وقتی $n \rightarrow \infty$ ، احتمال پرکولاسیون برای $1/2 \rightarrow p$ به ۱ نزدیک می‌شود. یعنی، اگر مردم در سراسر جهان فاصله‌گذاری اجتماعی را رها کنند، احتمال ابتلای افراد به کووید-۱۹ به‌طور چشم‌گیری افزایش می‌یابد. در واقع، هرچه افراد بیشتر آلوده شوند، تعداد بیشتری از اتصالات n برقرار می‌شود. بنابراین تعداد حداقل مسیرهای نامسدود p (افرادی که قرنطینه را رعایت نمی‌کنند) برای پرکولاسیون، یعنی شیوع بیماری، کاهش می‌یابد. به عبارت دیگر، احتمال ابتلای افراد به کووید-۱۹ از نظر افرادی که قرنطینه را رعایت نمی‌کنند، زمانی که تعداد کل اتصالات (ابتلاهای) n افزایش یابد، سریع‌تر رشد می‌کند. باین‌حال، یک مقایسهٔ جالب از چنین احتمال پرکولاسیونی را می‌توان انجام داد. چون کسر افراد در قرنطینه و افراد غیرآلوده به یکدیگر مرتبط هستند، یعنی با افزایش یکی دیگری کاهش می‌یابد به طوری که $P^* + Q = 1$ ، می‌توان مقایسه‌ای با فیزیک نیمه‌رساناها و قانون به‌خوبی تثبیت‌شدهٔ گنش جرمی داشت. دومی ثابت می‌کند که حاصل ضرب چگالی الکترون‌ها و حفره‌ها در دمای معین ثابت است و همچنین به حاصل ضرب جرم‌های متناظر آن‌ها بستگی دارد. به عبارت دیگر، مقدار الکترون‌هایی که از ظرفیت به نوار رسانایی ارتقا می‌یابند برابر با تعداد حفره‌های باقی‌مانده در نوار ظرفیت است. به‌عنوان یک قیاس، p و $(1-p)$ را می‌توان به یک روش تفسیر کرد زیرا هر افزایش (کاهش) در p مستلزم کاهش (افزایش) دقیقاً به همان نسبت در $(1-p)$ است.

۶ بحث و نتیجه‌گیری

تاریخچه‌ای مختصر از نظریهٔ پرکولاسیون، از ظهور آن تا کنون، ارائه شد. نشان داده شد که احتمال پرکولاسیون (در اینجا ابتلا) از نظر تعداد افرادی که به فاصله‌گذاری اجتماعی توجه نمی‌کنند، زمانی که تعداد کل

[۱۵]. چندین روش به‌منظور جمع‌آوری مجموعه داده‌ها، با هدف ایجاد یک توصیف ریاضی مناسب از یک رفتار جمعی، مانند شیوع همه‌گیری، به کار گرفته شده است. در میان این روش‌ها، رگرسیون خودکار با داده‌های جستجوی گوگل^{۲۹} نقشی اساسی دارد و برای مثال در مورد آنفولانزا به‌کاربرده می‌شود. اخیراً، این روش در مورد کووید-۱۹ برای پیش‌بینی هم‌زمان شیوع بیماری در استان‌های کوچک چین به کار گرفته شده است [۱۴]. همان‌طور که قبلاً بحث شد، رفتار احتمال پرکولاسیون P^* به‌عنوان تابعی از p هنگامی که تعداد اتصالات n افزایش می‌یابد، تغییر می‌کند.



شکل ۸. احتمال پرکولاسیون P^* به‌عنوان تابعی از اتصالات نامسدود p برای تعداد مختلف اتصالات شبکه n با استفاده از الف) چندجمله‌ای احتمال‌های پرکولاسیون نشان داده شده در شکل ۶ و ب) معادله (۱) [۱۳].

برای مدلی که تعداد نسبتاً بالایی از اتصالات n را ارائه می‌دهد، توزیع احتمال پرکولاسیون صورت می‌گیرد. تابع چندجمله‌ای احتمال پرکولاسیون (شکل ۸) را می‌توان با

$$P^*(n, p) = \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi} \arctan \left[n \frac{(p - p_c)}{p_c} \right], \quad (1)$$

تقریب زد که در آن p_c به مقدار بحرانی اتصالات اشاره دارد [۱۴]. معادله (۱) تابع توزیع کوشی نیز نامیده می‌شود.

همه‌گیری دارد. لذا، ضروری است که گروه‌های آمار برای پاسخ‌گویی به همهٔ نیازهای رشته‌های دانشگاهی و سازمان‌های خارج از دانشگاه‌ها، به تجهیز خود به متخصصانی که درس‌های مربوط را هم به لحاظ نظری و هم کاربردی‌سازی آموزش دهند، اقدام کنند. بدیهی است که نظریهٔ احتمال، مدل‌های احتمالاتی، و فرایندهای تصادفی از مؤثرترین ابزارهای کار است. در نتیجه، پیشنهاد می‌شود که گروه‌های آمار در کشور، با توجه به تجربیات جهانی، به بازاندیشی در نقش و سازمان‌دهی خود همت کنند.

موارد افزایش می‌یابد، بزرگ‌تر می‌شود و بنابراین اهمیت قرنطینه در مهار کووید-۱۹ را آشکار می‌کند. در این راستا، امیدواریم دستگاه‌های سلامت دولتی بتوانند از این موضوع بهره‌مند شوند. بنابراین، لازم است حتی با وجود واکسن‌های مؤثر، فاصله‌گذاری اجتماعی برای جلوگیری از شیوع کووید-۱۹ اتخاذ شود. اما همان‌طور که در مقدمه اشاره شد، هدف اصلی اثبات این مهم بود که نظریهٔ احتمال (و همهٔ متفرعات آن) علاوه بر حضور در همهٔ سازوکارهای تصادفی در آمار، کاربردهای متنوعی در همهٔ حوزه‌های علمی و از جمله حوزهٔ اشاره‌شده در اینجا یعنی

مراجع

- [1] Belavin, A.A., Polyakov, A.M., Zamolodchikov A.B. (1984). Infinite conformal symmetry of critical fluctuations in two dimensions. *J. Statist. Phys*, **34**, 763–774.
- [2] Benjamini, I., Schramm, O. (1996). Percolation beyond \mathbb{Z}^d , many questions and a few answers. *Electron. Comm. Probab*, **1(8)**, 41–59.
- [3] Bollobas, B., Riordan, O. (2006). The critical probability for random Voronoi percolation in the plane is 1/2. *Probab. Theor. Rel. Fields*, **136(3)**, 417-468.
- [4] Bollobas, B., Riordan, O. (2012). *Percolation*. Cambridge University Press.
- [5] Broadbent, S.R., Hammersley, J.M. (1957). Percolation processes. I. crystals and mazes. *Proc. Cambridge Philos. Soc*, **53**, 629–641.
- [6] Camia, F., Newman, C. (2006). Two-dimensional critical percolation: the full scaling limit. *Comm. Math. Phys*, **268(1)**, 1–38.
- [7] Duminil-Copin, H. (2017). Sixty years of percolation, arxiv:1712.04651v1.
- [8] Kesten, H. (1980). The critical probability of bond percolation on the square lattice equals 1/2. *Comm. Math. Phys*, 41–59.
- [9] Haggstrom, O., Peres, Y. and Steif, J. (1997). Dynamical percolation. *Ann. Inst. H. Poincare Probab. Statist*, **33**, 497–528.
- [10] Hansen, B.T., Muller, T. (2021). Poisson-Voronoi percolation in the hyperbolic plane with small intensities, arXiv:2111.04299v2.
- [11] Cardy, J.L. (1992). Critical percolation in finite geometries. *J. Phys. A*, **25**, L201–L206.
- [12] Duminil-Copin, H. (2017). Lectures on the Ising and Potts models on the hypercubic lattice, arXiv:1707.00520.
- [13] Mello, I.F., Squillante, L., Gomes, G.O., Seridonio, A.C., and Souza, M. (2021). Epidemics, the Ising-model and percolation theory: a comprehensive review focussed on covid-19. *Physica A*, 1–33.
- [14] Morio, J., Balesdent, M. (2016). Estimation of rare event probabilities in complex aerospace and other systems: a practical approach. *J. Mach. Lear. Res*, 2825–2830.

- [15] Pedregosa, F., Varoquaux, G., Gramfort, A., Michel, V., Thirion, B., Grisel, O., Blondel, M., Prettenhofer, P., Weiss, R., Dubourg, V., Vanderplas, J., Passos, A., Cournapeau, D., Brucher, M., Perrot, M., Duchesnay, E. (2011). Scikit-learn: machine learning in Python. *J. Mach. Learn. Res.*, **12**, 2825–2830.
- [16] Smirnov, S. private communications.
- [17] Smirnov, S. (2001). Critical percolation in the plane: conformal invariance, Cardy's formula, scaling limits. *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math.*, **333**, 239–244.
- [18] Stauffer, D., Aharony, A. (1994). *Introduction to percolation theory*. Taylor and Francis, London.
- [19] Harris, T.E. (1960). A lower bound for the critical probability in a certain percolation process. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 13–20.
- [20] Vahidi-Asl, M.Q., Wierman, J.C. (1990). First-passage percolation on the Voronoï tessellation and Delaunay triangulation. In *Random Graphs '87* (Poznań, 1987). Wiley, 341-359.
- [21] Vahidi-Asl, M.Q., Wierman, J.C. (1992). A shape result for first-passage percolation on the Voronoï tessellation and Delaunay triangulation. In *Random Graphs*, **2** (Poznań, 1989). Wiley, 247-262.
- [22] Vahidi-Asl, M.Q., Wierman, J.C. (1993). Upper and lower bounds for the route length of first-passage percolation in Voronoï tessellations. *Bull. Iranian Math. Soc.* **19**, 15-28.
- [23] Zvavitch, A. (1996). The critical probability for Voronoi percolation. MSc. thesis, Weizmann Institute of Science, available from http://www.math.kent.edu/~zvavitch/master_version_dvi.zip.

Analysis of Covid-19 epidemic using percolation theory

Ramin Kazemi¹, Mohammad Qasem Vahidi-Asl²

Abstract:

Knowledge of statistics, ever since its inception, has served every aspect of human life and every individual and social class. It has shown its extraordinary potential in dealing with numerous problems encountering human beings since the occurring of Covid-19 in Wuhan, China. A vast amount of literature has appeared showing the power of the science of statistics in answering different questions regarding this disease and all its consequences. But it comes short of, as an instance, in modelling the geometry of disease spread among societies and in the world as a whole. Here the only way to deal with this matter is to resort to probability theory and its many ramifications in providing realistic models in describing this spread. A very power tool in this regard is percolation theory, which besides its many applications in mathematical physics, is very handy in modelling epidemic diseases, among them the Covid-19. A short description of this theory with its use in modelling the spread of epidemic deceases, shows the importance of dealing with probability as a separate subject in the curricula and not a subordinate of the science of statistics which is now dominant in the statistics major curricula in the Iranian schools.

Keywords: Epidemic, Covid-19, percolation, percolative.

¹Department of statistics, Imam Khomeini international university

²Department of statistics, Shahid Beheshti university