تعمیمی از آزمون نسبت درستنمایی برای فرض‌های فازی

حمزه ترابی [۱]، رقیه شمشیری [۱]

htorabi@yazduni.ac.ir

چکیده

آزمون فرض‌ها یکی از اساسی‌ترین مفاهیم در استنباط آماری است و در آن نیز مانند سایر مسائل آماری، ممکن است با برخی مفاهیم مبهم روبرو شویم. نظریه‌ی مجموعه‌های فازی ابزاری توانمند برای فرمول‌بندی چنین مفاهیم مبهمی است. در این مقاله، پس از بیان برخی مفاهیم مربوط به آزمون فرض‌های فازی، با بهره از نظریه‌ی مجموعه‌های فازی، تعمیمی از آزمون نسبت درستنمایی برای این آزمون‌ها بیان می‌شود. در پایان چند مثال کاربردی ارائه می‌گردد.

واژه‌های کلیدی: فرض فازی، ناحیه رد، احتمال خطای نوع اول و دوم، تابع درستنمایی، برآوردگر درستنمایی ماکسیمم، آزمون نسبت درستنمایی.

۱ مقدمه

در کنار ارتباط‌هایی که نظریه مجموعه‌های فازی با سایر شاخه‌های علوم پیدا کرده است، ارتباط آن با نظریه‌ی احتمال و آمار شایان توجه است؛ از این جهت که هر دو نظریه برای مطالعه‌ی الگوها و سیستم‌های دارای عدم قطعیت وضع شده‌اند. نظریه‌ی احتمال و آمار با عدم قطعیت ناشی از تصادف و نظریه‌ی مجموعه‌های فازی با عدم قطعیت ناشی از ابهام روبرو است.

تصمیم‌گیری در استنباط آماری کلاسیک بر پایه‌ی نمونه‌ی تصادفی، فرض‌های دقیق، متغیرهای تصادفی، قانون‌های تصمیم و... است که در آن تمامی مفاهیم مربوطه، دقیق و خوش‌تعریف هستند. به لهمن (۱۹۹۴)، کسلا و برگر (۲۰۰۲) و شائو (۲۰۰۳) مراجعه نمایید.

یکی از جذاب‌ترین مسائل در استنباط آماری، آزمون فرض‌ها است. از نظر دقیق بودن مفاهیم، آزمون فرض‌ها به چهار حالت تقسیم‌بندی می‌شوند: (۱) فرض‌ها و داده‌ها دقیق، (۲) فرض‌ها دقیق، داده‌ها فازی، (۳) فرض‌ها فازی، داده‌ها دقیق و (۴) فرض‌ها و داده‌ها فازی؛ به مسائل مربوط به حالت‌های (۲)، (۳) و (۴)، **آزمون فرض‌ها در محیط فازی** گفته می‌شود.

آزمون فرض‌های آماری با داده‌های فازی، نخستین بار توسط کازالس و همکاران (۱۹۸۶) مورد مطالعه قرارگرفت. مسئله‌ی آزمون فرض‌ها، وقتی مشاهدات دقیق هستند اما خود فرض‌ها مبهم و نادقیق‌اند، نخستین بار توسط آرنولد (۱۹۹۵) مطالعه شد. وی روش خود را با بررسی حالاتی از آزمون فرض‌های یک طرفه و دوطرفه توضیح داده است. همین مسئله یعنی آزمون فرض‌های فازی (با داده‌های دقیق) توسط دلگادو و همکاران (۱۹۸۵) با رویکرد نظریه‌ی تصمیم مطالعه شده است. طاهری و بهبودیان (۱۹۹۹) باارائه‌ی تعریف‌های مناسبی برای احتمال خطای نوع اول و دوم، مسئله‌ی بالا را

[۱] گروه آمار، دانشگاه یزد

بررسی و لم نیمن — پیرسون را برای آزمون فرض‌های فازی، بیان و اثبات کرده‌اند. همین مسئله با شیوه‌ای متفاوت توسط واتانابه و ایمایزومی (۱۹۹۳) نیز مطالعه شده است. در روش آن‌ها تابع توان فازی نقش محوری دارد و نتیجه‌ی آزمون نیز به‌صورت فازی بیان می شود. طاهری و بهبودیان (۲۰۰۱) یک شیوه بیزی برای آزمون فرض‌های فازی با داده‌های معمولی ارائه داده‌اند. طاهری و بهبودیان (۲۰۰۲) هم‌چنین این مسئله را درحالتی که داده‌های نمونه مبهم باشند، بررسی کرده‌اند. ترابی و بهبودیان (۲۰۰۵) آزمون نسبت درستنمایی را برای آزمون فرض‌های فازی با داده‌های مبهم ارائه داده‌اند. هم‌چنین ترابی و همکاران (۲۰۰۶) تعمیمی از لم نیمن ـپیرسون را به آزمون فرض‌های فازی با داده‌های فازی ارائه داده‌اند. فیلزموزر و فیتل (۲۰۰۴) برای آزمون فرض‌های دقیق با داده‌های فازی، p—مقدار را تعریف کرده‌اند.

کاربرد آزمون فرض‌های فازی در زمینه‌های گوناگون رو به گسترش است. برای نمونه، می‌توان برای کاربرد در مخابرات به سون و همکاران (۱۹۹۲) و در فیزیک به پاریس (۲۰۰۱) مراجعه نمود.

در بخش دوم، تعاریف مربوط به آزمون فرض‌های فازی و در بخش سوم آزمون نسبت درستنمایی را برای آزمون فرض‌های فازی بیان می‌کنیم. سرانجام در بخش چهارم، با چند مثال روش ذکر شده را بیشتر بررسی می‌نماییم.

۲ آزمون فرض های فازی (FHT)

یکی از مسائل مهم در آزمون فرض‌های فازی، تنظیم و صورت‌بندی فرض‌هاست. در این آزمون فرض‌ها، ماهیت فرض‌ها به‌گونه‌ای است که نمی‌توان آن‌ها را به‌صورت دقیق فرمول‌بندی کرد.

تعریف ۱.۲ در یک مسئله‌ی آزمون فرض، هر فرض به‌صورت $H : \theta \in \tilde{H}$ را یک فرض فازی می‌گوییم که درآن $\tilde{H}$ یک مجموعه‌ی فازی از مجموعه‌ی مرجع فضای پارامتر (Θ) با تابع عضویت $\tilde{H}(\theta)$ است.

در آزمون فرض‌های فازی، فرض $H_\circ : \theta \in \tilde{H}_\circ$ را در برابر $H_1 : \theta \in \tilde{H}_1$ بر پایه‌ی نمونه‌ی تصادفی $X_1,\ldots,X_n$ از جامعه‌ای با چگالی $f(x;\theta)$ آزمون می‌نماییم.

روشن است که در آزمون فرض غیر فازی $H_\circ : \theta \in \Theta_\circ$ در برابر $H_1 : \theta \in \Theta_1$، می‌توان $\tilde{H}_j(\theta)$، $j = \circ, 1$ را به‌صورت زیر درنظر گرفت

$$\tilde{H}_j(\theta) = \begin{cases} 1 & \theta \in \Theta_j \\ \circ & \theta \notin \Theta_j. \end{cases}$$

تعریف ۲.۲ تکیه‌گاه فرض فازی H_j به‌صورت $\Theta_j = \{\theta \in \Theta \mid \tilde{H}_j(\theta) > \circ\}$، $j = \circ, 1$ تعریف می‌گردد؛ دقت کنید که در آزمون فرض‌های فازی بر خلاف آزمون فرض‌های معمولی، لزوماً Θ_jها افرازهایی از Θ نیستند.

تعریف ۳.۲ تابع آزمون را به‌صورت احتمال رد $H_\circ$ وقتی که مقدار $\underline{x}$ مشاهده شده باشد، تعریف می‌کنیم و آن را با $\phi(\underline{x})$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۴.۲ تابع توان آزمون $\phi(\underline{X})$ به‌صورت $\beta_\phi(\theta) = E_\theta[\phi(\underline{X})]$ تعریف می‌شود.

تعریف ۵.۲ برای مسئله‌ی آزمون فرض‌های فازی با تابع آزمون $\phi(\underline{X})$، احتمال خطای نوع اول و خطای نوع دوم را به‌ترتیب به‌صورت $\alpha_\phi = \sup_\Theta \tilde{H}_\circ(\theta) E_\theta[\phi(\underline{X})]$ و $\beta_\phi = \sup_\Theta \tilde{H}_1(\theta)(1 - E_\theta[\phi(\underline{X})])$ تعریف می‌نماییم.

دقت کنید که اگر فرض‌ها دقیق باشند، تعریف احتمال خطای اول و دوم منطبق بر تعریف‌های حالت دقیق آن‌ها می‌شوند.

تعریف ۶.۲ آزمون ϕ یک آزمون در سطح α است اگر $\alpha_\phi \leq \alpha$. به α_ϕ اندازه‌ی آزمون ϕ می‌گوییم.

تعریف ۷.۲ فرض کنید که $\underline{X}$ یک نمونه تصادفی از جامعه‌ای با تابع چگالی احتمال $f(.;\theta)$، $\theta \in \Theta$ باشد. به تابع $f(\underline{x};\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$ به‌عنوان تابعی از θ، تابع درستنمایی می‌گوییم و آن را با $L(\theta)$ نشان می‌دهیم.

۳ آزمون نسبت درستنمایی برای آزمون فرض‌های فازی

روش آزمون نسبت درستنمایی (LRT) به‌عنوان یک روش پرکاربرد در آزمون فرض‌ها، در بسیاری از موارد نتایج قطعی و خوبی ارائه می‌دهد. می‌دانیم که اصل درستنمایی ماکسیمم، توجه خود را به مقداری از $\theta \in \Theta$ یعنی $\hat{\theta}$ معطوف می‌کند که تابع درستنمایی $L(\theta)$ را ماکسیمم کند. در حقیقت $\hat{\theta}$، بهترین تبیین کننده مشاهدات $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ است. پس در انتخاب بین H_0 و H_1، طبیعی به‌نظر می‌رسد که مقایسه‌ی بین بهترین تبیین کننده موجود در H_0 و بهترین تبیین کننده موجود در H_1 انجام پذیرد. با توجه به مطالب بیان شده، در دنباله تعمیمی از آزمون نسبت درستنمایی را برای آزمون فرض‌های فازی در دو حالت $\tilde{H}_1(\theta) = 1 - \tilde{H}_0(\theta)$ و $\tilde{H}_1(\theta) \neq 1 - \tilde{H}_0(\theta)$ معرفی می‌کنیم به‌طوری که آزمون نسبت درستنمایی در هر یک از دو حالت، با آزمون نسبت درستنمایی معمولی با فرض‌های دقیق هم‌ارز می‌گردد.

فرض کنید $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$ که در آن Θ_j تکیه‌گاه H_j است.

تعریف ۱.۳ برای یک مسئله‌ی FHT، اگر $\tilde{H}_1(\theta) = 1 - \tilde{H}_0(\theta)$، آن‌گاه آزمون نسبت درستنمایی فرض H_0 را در برابر H_1 رد می‌کند هر گاه $\lambda(\underline{x}) < c$، $c \in (0, 1]$ که در آن $\lambda(\underline{x})$، آماره‌ی نسبت درستنمایی به‌صورت زیر تعریف می‌گردد

$$\lambda(\underline{x}) = \frac{\sup_{\theta\in\Theta} \tilde{H}_0(\theta) L(\theta)}{\sup_{\theta\in\Theta} L(\theta)}.$$

تعریف ۲.۳ برای یک مسئله‌ی FHT، اگر $\tilde{H}_1(\theta) \neq 1 - \tilde{H}_0(\theta)$، آن‌گاه آزمون نسبت درستنمایی فرض H_0 را در برابر H_1 رد می‌کند هر گاه $\lambda^*(\underline{x}) < c$، $c \in (0, 1]$ که در آن $\lambda^*(\underline{x})$ آماره نسبت درستنمایی است به‌صورت زیر تعریف می‌گردد

$$\lambda^*(\underline{x}) = \frac{\sup_{\theta\in\Theta} \tilde{H}_0(\theta) L(\theta)}{\max\{\sup_{\theta\in\Theta} \tilde{H}_0(\theta) L(\theta), \sup_{\theta\in\Theta} \tilde{H}_1(\theta) L(\theta)\}}.$$

توجه کنید که اگر $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$ آن‌گاه

$$\max\{\sup_{\theta\in\Theta} H_0(\theta) L(\theta), \sup_{\theta\in\Theta} H_1(\theta) L(\theta)\} = \sup_{\theta\in\Theta} L(\theta).$$

بنابراین برای فرض‌های غیر فازی هر دو تعریف بالا با تعریف کلاسیک آزمون نسبت درستنمایی هم‌ارز هستند.
به‌سادگی می‌توان نشان داد که برای هر $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$، $\lambda(\underline{x}) \leq \lambda^*(\underline{x})$؛ ترابی و بهبودیان (۲۰۰۷) را ملاحظه کنید.

۴ چند مثال

مثال ۱.۴ فرض کنید $\underline{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ یک نمونه‌ی تصادفی از یک جامعه‌ی نرمال با تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad \sigma > 0.$$

می‌خواهیم آزمون زیر را در دو حالت $\mu_1 < \mu_0$ و $\mu_1 > \mu_0$ انجام دهیم

$$\begin{cases} H_0: & \mu \simeq \mu_0 \\ H_1: & \mu \simeq \mu_1 \end{cases} \qquad (1.4)$$

که در آن توابع عضویت $\tilde{H}_0$ و $\tilde{H}_1$ به‌صورت $\tilde{H}_0(\mu)=e^{-a(\mu-\mu_0)^2}$ و $\tilde{H}_1(\mu)=e^{-a(\mu-\mu_1)^2}$ به‌شرط $\mu\in\mathbb{R}$ و $a>0$ تعریف شده‌اند. هم‌چنین می‌خواهیم آزمون

$$\begin{cases} H_0: \mu\simeq\mu_0 \\ H_1: \mu\not\simeq\mu_0 \end{cases} \tag{۲.۴}$$

را با توابع عضویت $\tilde{H}_0(\mu)=e^{-a(\mu-\mu_0)^2}$ و $\tilde{H}_1(\mu)=1-e^{-a(\mu-\mu_0)^2}$ به‌شرط $\mu\in\mathbb{R}$ و $a>0$ انجام دهیم.

حل: می‌توان نشان داد که برای هر $a>0$ و $b\in\mathbb{R}$، $\sup_{\mu\in\mathbb{R}} e^{-a(\mu-b)^2}=1$. بنابراین برای آزمون (۱.۴) (که در آن $\tilde{H}_0(\theta)\neq 1-\tilde{H}_1(\theta)$) خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\sup_{\mu\in\Theta} L(\mu) &= L(\bar{x})\\ &= (2\pi\sigma^2)^{-n/2}\\ &\quad\times\exp\{-\textstyle\sum(x_i-\bar{x})^2/(2\sigma^2)\},\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}\sup_{\mu\in\Theta} H_0(\mu)L(\mu) &= (2\pi\sigma^2)^{-n/2}\\ &\quad\times\exp\{-\textstyle\sum(x_i-\bar{x})^2/2\sigma^2\}\\ &\quad\times\exp\{(n\bar{x}+2a\mu_0\sigma^2)^2/\\ &\quad[(2\sigma^2)(n+2a\sigma^2)]\\ &\quad-(n\bar{x}^2+2a\mu_0^2\sigma^2)/(2\sigma^2)\},\end{aligned}$$

زیرا

$$\begin{aligned}H_0(\mu)L(\mu) &= (2\pi\sigma^2)^{-n/2}\\ &\quad\times\exp\{-\textstyle\sum(x_i-\mu)^2/(2\sigma^2)\}\\ &\quad\times\exp\{-a(\mu-\mu_0)^2\}\\ &= (2\pi\sigma^2)^{-n/2}\\ &\quad\times\exp\{-\textstyle\sum(x_i-\bar{x})^2/(2\sigma^2)\\ &\quad-(n\bar{x}^2+2a\mu_0^2\sigma^2)/(2\sigma^2)\}\\ &\quad\times\exp\{-[\mu^2(n+2a\sigma^2)\\ &\quad-2\mu(n\bar{x}+2a\mu_0\sigma^2)]/(2\sigma^2)\}\\ &= (2\pi\sigma^2)^{-n/2}\\ &\quad\times\exp\{-\textstyle\sum(x_i-\bar{x})^2/(2\sigma^2)\}\\ &\quad\times\exp\{(n\bar{x}+2a\mu_0\sigma^2)^2/\\ &\quad[(2\sigma^2)(n+2a\sigma^2)]\\ &\quad-(n\bar{x}^2+2a\mu_0^2\sigma^2)/(2\sigma^2)\}\\ &\quad\times\exp\{-[(n+2a\sigma^2)/(2\sigma^2)]\\ &\quad\times[\mu-(n\bar{x}+2a\mu_0\sigma^2)/(n+2a\sigma^2)]^2\}.\end{aligned}$$

فرض کنید $L_0(\underline{x})=\sup_{\mu\in\mathbb{R}}\tilde{H}_0(\mu)L(\mu)$ و $L_1(\underline{x})=\sup_{\mu\in\mathbb{R}}\tilde{H}_1(\mu)L(\mu)$. بنا بر این آماره‌ی آزمون نسبت درستنمایی برای آزمون (۱.۴) به‌صورت زیر به‌دست می آید

$$\begin{aligned}\lambda^*(\underline{x}) &= \begin{cases} 1 & L_0(\underline{x})\geq L_1(\underline{x})\\ L_0(\underline{x})/L_1(\underline{x}) & L_0(\underline{x})<L_1(\underline{x})\end{cases}\\ &= \begin{cases} 1 & L_0(\underline{x})\geq L_1(\underline{x})\\ m\bar{x}(\mu_0-\mu_1) & L_0(\underline{x})<L_1(\underline{x}).\end{cases}\end{aligned}$$

در نتیجه در حالت $\mu_1>\mu_0$، فرض H_0 را رد خواهیم کرد اگر $\overline{x}>k$، هم‌چنین در حالت $\mu_1<\mu_0$، فرض H_0 را رد خواهیم کرد اگر $\overline{x}<k$ به‌طوری که $k=[c/m(\mu_0-\mu_1)]$.

برای آزمون (۲.۴) چون $\tilde{H}_1(\theta)=1-\tilde{H}_0(\theta)$، فرض H_0 را در برابر H_1 رد خواهیم کرد اگر

$$\begin{aligned}\lambda(\underline{x}) &= \exp\{(n\bar{x}+2a\mu_0\sigma^2)^2/[(2\sigma^2)(n+2a\sigma^2)]\\ &\quad-(n\bar{x}^2+2a\mu_0^2\sigma^2)/(2\sigma^2)\}<c,\end{aligned}$$

که با $|\bar{x}-\mu_0|>c'$ معادل می‌گردد.

مثال ۲.۴ فرض کنید $\underline{X}=(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ یک نمونه‌ی تصادفی از توزیع برنولی با پارامتر θ، $\theta\in(0,1)$ باشد. می‌خواهیم آزمون فرض

H_0: θ تقریبا $1/2$ است.

H_1: θ تقریبا $1/2$ نیست.

را با تابع عضویت

$$H_0(\theta)=\begin{cases} 2\theta & 0<\theta<\frac{1}{2}\\ 2-2\theta & \frac{1}{2}\leq\theta<1\end{cases}$$

و $\tilde{H}_1(\theta)=1-\tilde{H}_0(\theta)$ انجام دهیم.

حل: برای هر عدد حقیقی مثبت a و b می‌توان نشان داد که

$$\sup_{\theta\in[0,1]}\theta^a(1-\theta)^b=\left(\frac{a}{a+b}\right)^a\left(1-\frac{a}{a+b}\right)^b.$$

بنابراین

$$\sup_{\theta\in\Theta} L(\theta)=L(\bar{x}).$$

از طرفی

$$\sup_{\theta\in\Theta} \tilde{H}_0(\theta)L(\theta) = \max\{\sup_{\theta\in(0,0.5)} \tilde{H}_0(\theta)L(\theta), \sup_{\theta\in[0.5,1)} \tilde{H}_0(\theta)L(\theta)\}.$$

اما

$$\sup_{\theta\in(0,0.5)} \tilde{H}_0(\theta)L(\theta) = \begin{cases} 2(\frac{y+1}{n+1})^{y+1}(\frac{n-y}{n+1})^{n-y} & y < \frac{n-1}{2} \\ 1/2^n & y \geq \frac{n-1}{2}, \end{cases}$$

و

$$\sup_{\theta\in[0.5,1)} \tilde{H}_0(\theta)L(\theta) = \begin{cases} 1/2^n & y < \frac{n+1}{2} \\ 2(\frac{y}{n+1})^{y}(\frac{n+1-y}{n+1})^{n+1-y} & y \geq \frac{n+1}{2}. \end{cases}$$

با بررسی سه حالت زیر، می‌توان نشان داد که ناحیه‌ی بحرانی برای حالت‌های (۱) و (۳) به‌ترتیب به‌صورت $y \leq k_1$ و $y \geq k_2$ به‌دست می‌آید که در آن $y = \Sigma_{i=1}^n x_i$ و در حالت (۲)، ناحیه‌ی بحرانی وجود نخواهد داشت.

$(1) : 0 \leq y < \frac{n-1}{2}$

$(2) : \frac{n-1}{2} \leq y < \frac{n+1}{2}$

$(3) : \frac{n+1}{2} \leq y \leq n.$

برای kهای مختلف احتمال‌های خطای نوع اول و نوع دوم در جدول زیر درج شده است

k_1	k_2	α	β
0	10	0.0701	0.5622
1	9	0.1633	0.3823
2	8	0.2720	0.2474

مراجع

[1] Arnold,B.F.(1995) Statistical tests optimally meeting certain fuzzy requirements on the power function and on the sample size. Fuzzy Sets and Systems 75(2), 365-372.

[2] Arnold, B.F.(1996) An approach to fuzzy hypotheses testing. Metrika 44, 119-126.

[3] Arnold, B.F. (1998) Testing fuzzy hypotheses with crisp data. Fuzzy Sets and Systems 94(2), 323-333.

[4] Casals, M.R. (1993) Bayesian testing of fuzzy parametric hypothesis from fuzzy information. Operations Research 27, 189-199.

[5] Casals, M.R., Gil, M.R.and Gil, P. (1986) On the use of Zadeh's probabilistic definition for testing statistical hypotheses from fuzzy information. Fuzzy Sets and Systems 20, 175-190.

[6] Casella, G., Berger, R.L. (2002) *Statistical Inference.* 2nd Edition, Duxbury Press, Belmont, CA.

[7] Delgado, M., Verdegay, M.A. and Vila, M.A. (1985) Testing fuzzy hypotheses: A bayesian approach. In: Gupta MM et al.(Eds.), Approximate Reasoning in Expert Systems, North-Holland Publishing Co, Amsterdam pp. 307-316.

[8] Filzmoser, P., Viertl, R. (2004) Testing hypotheses with fuzzy data: The fuzzy p-value. Metrika 59:21-29.

[9] Grzegorzewski, P. (2000) Testing statistical hypotheses with vague data. Fuzzy Sets and Systems 112, 501-510.

[10] Grzegorzewski, P. (2002) Testing fuzzy hypotheses with vague data. In Bertoluzzi C, editor, Statistical Modeling, Analysis and Management of Fuzzy Data, Physica-Verlag, Heidelberg pp. 213-225.

[11] Kruse, R. and Meyer, K.D. (1987) *Statistics with Vague Data.* Reidel Pub. Comp., Dordrecht, Netherlands.

[12] Lehmann, E.L.(1994) *Testing Statistical Hypotheses.* Chapman-Hall, New York.

[13] Lehmann, E.L., Casella, G. (1998) *Theory of Point Estimation.* Springer-Verlag, New York.

[14] Paris, M.G.A. (2001) Nearly ideal binary communication in squeezed channels. Physical Review A, Vol. 64, 14304-14308.

[15] Saade, J. (1994) Extension of fuzzy hypotheses testing with hybrid data. Fuzzy Sets and Systems 63, 57-71.

[16] Saade, J., Schwarzlander H (1990) Fuzzy hypotheses testing with hybrid data. Fuzzy Sets and Systems 35, 192-212.

[17] Shao, J. (2003) *Mathematical Statistics.* Second Edition, Springer-Verlag, New York.

[18] Son, J.C., Song, I. and Kim, H.Y. (1992) A fuzzy decision problem based on the generalized Neyman-Pearson criteria. Fuzzy Sets and Systems 47, 65-75.

[19] Taheri, S.M. (2003) Trends in fuzzy statistics. Austrian Journal of Statistics 32, 239-257.

[20] Taheri, S.M., Behboodian, J. (1999) Neyman-Pearson lemma for fuzzy hypotheses testing. Metrika 49, 3-17.

[21] Taheri, S.M., Behboodian, J. (2001) A Bayesian approach to fuzzy hypotheses testing. Fuzzy Sets and Systems 123, 39-48.

[22] Taheri, S.M., Behboodian J (2002) Fuzzy hypotheses testing with fuzzy data: A Bayesian approach. In Pal NR and Sugeno M (Eds.): AFSS 2002, Physica-Verlag, Heidelberg, pp. 527-533.

[23] Torabi, H. and Behboodian, J. (2005), Sequential probability ratio test for fuzzy hypotheses testing with vague data. Austrain Journal of Statistics, Vol. 34, No. 1, 25-38.

[24] Torabi, H., Behboodian, J. and Taheri, S.M. (2006), Neyman-Pearson lemma for fuzzy hypotheses testing with vague data. Metrika 64, 289-304.

[25] Torabi, H. and Behboodian, J. (2007), Likelihood ratio test for fuzzy hypotheses testing. Statistical Papers, Vol. 64, 289-304.

[26] Watanabe, N., Imaizumi, T. (1993) A fuzzy statistical test of fuzzy hypotheses. Fuzzy Sets and Systems 53, 167-178.

[27] Zadeh, L.A. (1965) Fuzzy sets. Information and Control 8, 338-353.