سرویس تکمیلی به برخی از متقاضیان در صف M/G/1 با نوعی محدودیت

محمد حنیف اسدی خانوکی[۱]　　　غلامحسین شاهکار[۲]

چکیده

در بخش کنترل کیفیت کارخانه‌ها تولیدات معیوب برای رفع عیب به خط تولید ارجاع می‌شوند. در این مقاله با فرض اینکه فرآیند ساخت از یک مدل صف‌بندی $M/G/1$ متابعت می‌کند، فرض می‌کنیم که اقلام ساخته شده پس از ساخت(دریافت سرویس اول) با احتمال مثلاً p به سرویس دوم احتیاج پیدا می‌کنند و اقلام نیازمند سرویس دوم را در انباری ذخیره کرده و در زمانی مناسب، به آنها سرویس تکمیلی داده و پس از اخذ سرویس دوم از سیستم خارج می‌شوند.

صالحی‌راد[۳] در مراجع[۵]، [۶] و [۱] این مدل را تحت سه خط‌مشی مختلف مورد بررسی قرار داده است. در این مقاله خط‌مشی دیگری را در نظر می‌گیریم بدین طریق که وقتی سرویس‌دهنده مشغول سرویس‌دهی در صف دوم (صف متقاضیان سرویس دوم) است و تعداد متقاضیان صف اصلی به حدنصاب M برسد، سرویس دهنده ملزم به تعطیل کردن باجه سرویس صف دوم شده و به صف اصلی برمی‌گردد و پس از تکمیل سرویس تمام متقاضیان صف اصلی به صف دوم می‌رود. در این مقاله برای مدل تعریف شده بعد از مدل‌بندی ریاضی، تابع مولد احتمال اندازه سیستم و میانگین اندازه سیستم محاسبه شده است و در پایان روش انتخاب M بهینه ارائه شده است.

واژه‌های کلیدی: صف، زنجیر مارکوف، تابع مولد احتمال، دوره اشتغال و تبدیل لاپلاس- استیلتیس

۱. مقدمه

در کارخانه‌ها معمولاً واحدی برای نظارت بر تولید با نام کنترل کیفیت وجود دارد که اگر کیفیت کالاهای تولید شده در حد مطلوب نباشد، برای رساندن کیفیت تولیدات به حد مطلوب آنها را به واحد تولید برمی‌گرداند. در این مقاله برای نوعی محدودیت مفروض (محدودیت تعریف شده در بخش اول) مدل صف‌بندی ارائه می‌گردد و سپس پارامترهای مدل برآورد می‌شوند. دو مورد از مهمترین کاربردهای این مدل عبارتند از اینکه:

- از این مدل می‌توان متوسط حجم انبار مورد نیاز برای قطعات را بدست آورد و بر این اساس برنامه‌ریزی نمود.
- در این مدل می‌توان محدودیت‌های تعریف شده را به صورتی در نظر گرفت که در کارائی و هزینه، بهینه‌سازی صورت پذیرد.

۲. معرفی مدل

در این مقاله نوعی از یک مدل صف‌بندی M/G/1 مورد بررسی قرار می‌گیرد، که ورودی آن دارای توزیع پواسون با نرخ ورود λ است؛ در این مدل هر متقاضی بعد از دریافت سرویس اول در صف اول (صف اصلی) با احتمال p نیاز به سرویس دیگری پیدا می‌کند و وارد صف دوم (صف فرعی) می‌شود.

مدت زمان‌های سرویس‌دهی در صف اول و صف دوم برای هر متقاضی، متغیرهای تصادفی S و $\widetilde{S}$ با توزیع احتمال کلی $B_1(s)$ و $B_2(\widetilde{s})$، با واریانس و میانگین $\tau_1^2, \frac{1}{\mu_1}$ و $\tau_2^2, \frac{1}{\mu_2}$، می‌باشند. ضمناً $B_1^*(s)$ و $B_2^*(\widetilde{s})$ تبدیلات لاپلاس-استیلتیس $B_1(s)$ و $B_2(\widetilde{s})$ هستند. بنابراین زمان سرویس به هر متقاضی را که با S_t نمایش می‌دهیم، برابر با $S_t = S + \widetilde{S} I_F$ است.که در آن I_F تابع مشخصه زیر می‌باشد

$$I_F = \begin{cases} 0 & : \text{اگر متقاضی نیاز به سرویس مجدد نداشته باشد} \\ 1 & : \text{اگر متقاضی نیاز به سرویس مجدد داشته باشد} \end{cases} \tag{1}$$

در این مدل تعداد متقاضیان در صف اول در زمان سرویس nامین متقاضی، با X_n و تعداد متقاضیان در صف دوم در زمان سرویس nامین متقاضی، با Y_n نمایش داده شده‌اند. به این ترتیب یک زنجیر مارکوف دوبعدی به شکل $\{(X_n, Y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ حاصل می‌گردد.

۱- دانشگاه آزاد اسلامی واحد مشهد

۲- دانشگاه فردوسی مشهد

۳- Salehi rad

در این مدل هر متقاضی بعد از دریافت سرویس اول اگر نیاز به سرویس تکمیلی داشته باشد به صف دوم عزیمت می‌کند و سرویس دهنده پس از تکمیل سرویس تمام متقاضیان صف اول (خالی شدن صف اول)، به صف‌دوم می‌رود و سرویس‌دهی به متقاضیان صف دوم را شروع می‌کند. اگر سرویس‌دهنده در حال سرویس‌دهی به مشتریان در صف دوم باشد و طول صف اول، بعد از سرویس مثلاً i متقاضی در صف دوم، برابر یا بیشتر از M متقاضی شود سرویس دهنده در هر صورت سرویس‌دهی در صف دوم را تعطیل کرده، به صف اول می‌رود و سرویس‌دهی به متقاضیان صف اول را تا زمان خالی شدن این صف ادامه می‌دهد. در این مدل سرویس‌دهنده در زمان خالی شدن صف‌دوم به صف‌اول می‌رود و شروع به سرویس متقاضیان صف‌اصلی می‌کند ولی اگر صف اصلی خالی باشد تا زمان رسیدن اولین متقاضی به صف اصلی بیکار می‌ماند [۲].

۳. مدل‌بندی ریاضی صف

با فرض اینکه

$$\tilde{K}=\min\ (r,\ \sum_{1}^{r}\tilde{A}_i\ge M)$$

و

$$(a-1)+=\max\{0,a-1\}$$

است زنجیر مارکوف دو بعدی زیر را می‌توان به عنوان اندازه سیستم در زمان t_n (زمان سرویس nامین متقاضی)، در نظر گرفت:

$$\begin{pmatrix}X_{n+1}\\ Y_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{cases}\begin{pmatrix}X_n+A-1\\ Y_n+I_F\end{pmatrix}; X_n>0\ \ ,Y_n\ge 0\\[2ex] \begin{pmatrix}A+\left[\sum\limits_{1}^{Y_n}\tilde{A}_i-1\right]_+\\ I_F\end{pmatrix}; X_n=0, Y_n\ge 0\ \ ,\sum\limits_{1}^{Y_n}\tilde{A}_i<M\\[2ex] \begin{pmatrix}A+\sum\limits_{1}^{\tilde{K}}\tilde{A}_i-1\\ Y_n-\tilde{K}+I_F\end{pmatrix}; X_n=0, Y_n\ge 0\ \ ,\sum\limits_{1}^{Y_n}\tilde{A}_i\ge M\end{cases}$$

(۲)

در این خط‌مشی اگر صف اول خالی نباشد در زمان سرویس هر متقاضی، A متقاضی به صف اول اضافه شده و متقاضی در حال دریافت سرویس، از صف اول کم می‌شود و اگر این متقاضی نیاز به سرویس دوم داشته باشد یک متقاضی به صف‌دوم اضافه می‌شود. ولی اگر سرویس‌دهنده در حال سرویس‌دهی به متقاضیان در صف‌دوم باشد (صف اول خالی شود) و در زمان سرویس‌دهی به متقاضیان صف‌دوم تعداد مراجعین به صف اول از M متقاضی کمتر باشد ($X_n=0\ ,Y_n\ge 0\ ,\sum_{1}^{Y_n}\tilde{A}_i<M$)، آنگاه بعد از اتمام سرویس تمام متقاضیان صف دوم، سرویس دهنده به صف اول می‌رود و متقاضیان صف اول را سرویس‌دهی می‌کند و اگر صف دوم خالی باشد و در زمان سرویس در صف دوم بیشتر از M متقاضی به صف اصلی وارد شوند ($X_n=0, Y_n\ge 0, \sum_{1}^{Y_n}\tilde{A}_i\ge M$)آنگاه سرویس‌دهنده زمانی که حجم صف اول برابر یا متجاوز بر M متقاضی شود، سرویس‌دهی به متقاضیان صف دوم را رها می‌کند و به صف اول می‌رود و در این زمان تعداد $\sum_{1}^{\tilde{K}}\tilde{A}_i$ متقاضی به صف‌اول اضافه می‌شوند و در زمان سرویس‌دهی به nامین متقاضی نیز تعداد A متقاضی دیگر به این صف اضافه می‌شوند و nامین متقاضی از صف‌اول خارج می‌شود و اگر نیازمند دریافت سرویس دوم باشد به صف‌دوم عزیمت می‌کند و همچنین از صف‌دوم نیز تعداد $\tilde{K}$متقاضی کم می‌شوند.

لم۱. در مدل صف‌بندی M/G/1، احتمال اینکه بعد از سرویس i متقاضی، تعداد متقاضیان وارد شده به صف در این زمان برای اولین بار برابر یا بیشتر از M متقاضی شود، برابر است با:

$$\Pr(K=i)=\int_{0}^{\infty}\sum_{l=0}^{M-1}\left[\frac{e^{-\lambda is}\left(\lambda(i-1)s\right)^l}{l!}\sum_{r=M-l}^{\infty}\frac{(\lambda s)^r}{r!}\right]dB(s)$$

(۳)

برهان: احتمال اینکه تعداد ورودی‌ها به صف‌در زمان سرویس i متقاضی برای اولین بار برابر یا بیشتر از M متقاضی شود، برابر با احتمال این است که در زمان سرویس $i-1$ متقاضی تعداد l متقاضی ($l<M$) به صف اضافه شوند و در زمان سرویس iامین متقاضی تعداد بیش از $M-l$ متقاضی به صف مراجعت کنند، لذا خواهیم داشت:

$$\Pr\left(K=i\right)=\sum_{l=0}^{M-1}\left(\Pr\left(\sum_{j=1}^{i-1}A_j=l\right)\Pr\left(A\ge M-l\right)\right)$$

$$=\sum_{l=0}^{M-1}\left[\Pr\left(\sum_{j=1}^{i-1}A_j=l\right)\sum_{r=M-l}^{\infty}\frac{e^{-\lambda S}(\lambda S)^r}{r!}\right]$$

$$=\sum_{l=0}^{M-1}\left[\frac{e^{-\lambda(i-1)S}\left(\lambda(i-1)S\right)^l}{l!}\sum_{r=M-l}^{\infty}\frac{e^{-\lambda S}(\lambda S)^r}{r!}\right]$$

$$=\sum_{l=0}^{M-1}\left[\frac{e^{-\lambda iS}\left(\lambda(i-1)S\right)^l}{l!}\sum_{r=M-l}^{\infty}\frac{(\lambda S)^r}{r!}\right]$$

حال با شرطی کردن رابطه خواهیم داشت:

$$\Pr(K=i)=E\left[\Pr(K=i\mid S=s)\right]$$
$$=E\left[\sum_{l=0}^{M-1}\left[\frac{e^{-\lambda iS}\left(\lambda(i-1)S\right)^{l}}{l!}\sum_{r=M-l}^{\infty}\frac{(\lambda S)^{r}}{r!}\right]\right]$$
$$\Pr(K=i)=\int_{0}^{\infty}\sum_{l=0}^{M-1}\left[\frac{e^{-\lambda is}\left(\lambda(i-1)s\right)^{l}}{l!}\sum_{r=M-l}^{\infty}\frac{(\lambda s)^{r}}{r!}\right]dB(s)$$

و اثبات کامل است.

۴. تابع مولد احتمال اندازه سیستم

قضیه۱. تحت شرایط مدل، تابع مولد احتمال توام اندازه سیستم در حالت پایا برابر است با:

$$P(u,v)=\frac{(1-p+pv)B_1^{*}[\lambda(1-u)]}{(1-p+pv)B_1^{*}[\lambda(1-u)]-u}\Big[\psi(1-p+pv)$$
$$-G_M^{\ *}(u,p,\lambda)+(1-u)G_M^{\ *}(0,p,\lambda)+Q_M(u,v,p,\lambda)\Big]\pi_{0\bullet}^{IV}$$
(۴)

که در آن:

$$\psi(1-p+pv)=E\left[v^{Y_n}I_{\{Y_n\geq 0\}}\mid X_n=0\right] \qquad (5)$$

$$R_M(v)=E\left[v^{Y_n}I_{\{Y_n\geq 0,\sum_{0}^{Y_n}\tilde{A}_i<M\}}\mid X_n=0\right]$$
(۶)

$$G_M^{*}(u,p,\lambda)=R_M\left(B_2^{*}[\lambda(1-u)]\right) \qquad (7)$$

$$Q_M(u,v,p,\lambda)=$$
$$E\left(v^{Y_n}\left[\sum_{i=1}^{Y_n}\left(\frac{B_2^{*}(\lambda(1-u))}{v}\right)^{i}\Pr(\tilde{K}=i)\right]I_{\{Y_n\geq 0,\sum_{0}^{Y_n}\tilde{A}_i\geq M\}}\mid X_n=0\right)$$
(۸)

$$\pi_{0\bullet}^{IV}=\Pr(X_n=0) \qquad (9)$$

$$\Pr(K=i)=\int_{\bullet}^{\infty}\sum_{l=0}^{M-1}\left[\frac{e^{-\lambda i\tilde{s}}\left(\lambda(i-1)\tilde{s}\right)^{l}}{l!}\sum_{r=M-l}^{\infty}\frac{(\lambda\tilde{s})^{r}}{r!}\right]dB_2(\tilde{s})$$
(۱۰)

برهان: بنا به تعریف تابع مولد احتمال و با استفاده از رابطه (۱) داریم:

$$P(u,v)=(1-p)E\left(u^{X_n+A-1}v^{Y_n}I_{\{X_n>0,Y_n\geq 0\}}\right)$$
$$+pE\left(u^{X_n+A-1}v^{Y_n+1}I_{\{X_n>0,Y_n\geq 0\}}\right)$$
$$+(1-p)E\left(u^{\left[\sum_{1}^{Y_n}\tilde{A}_i-1\right]_{+}+A}I_{C_1}\right)+pE\left(u^{\left[\sum_{1}^{Y_n}\tilde{A}_i-1\right]_{+}+A}vI_{C_1}\right)$$
$$+(1-p)E\left(u^{\sum_{1}^{K}\tilde{A}_i+A-1}v^{Y_n-K}I_{C_2}\right)+pE\left(u^{\sum_{1}^{K}\tilde{A}_i+A-1}v^{Y_n-\tilde{K}+1}I_{C_2}\right)$$

که در آن

$$C_1=\{X_n=0,Y_n\geq 0,\sum_{1}^{Y_n}\tilde{A}_i<M\}$$

و

$$C_2=\{X_n=0,Y_n\geq 0,\sum_{1}^{Y_n}\tilde{A}_i\geq M\}$$

است.

از آنجا که توزیع ورود متقاضیان به صف اصلی، از توزیع‌های سرویس و تعداد متقاضیان در سیستم مستقل است، می‌توانیم از عبارت $E\left[u^{A}\right]$ فاکتورگیری کنیم و با استفاده از اینکه $E\left[u^{A}\right]=B_1^{*}[\lambda(1-u)]$ است، ([۳]، [۴] را ببینید) داریم:

$$P(u,v)=\frac{B_1^{*}[\lambda(1-u)]}{u}\Big[(1-p)E\left(u^{X_n}v^{Y_n}I_{\{X_n\geq 0,Y_n\geq 0\}}\right)$$
$$-(1-p)E\left(u^{X_n}v^{Y_n}I_{\{X_n=0,Y_n\geq 0\}}\right)$$
$$+pvE\left(u^{X_n}v^{Y_n}I_{\{X_n\geq 0,Y_n\geq 0\}}\right)-pvE\left(u^{X_n}v^{Y_n}I_{\{X_n=0,Y_n\geq 0\}}\right)\Big]$$
$$+(1-p)E\left(u^{\left[\sum_{1}^{Y_n}\tilde{A}_i-1\right]_{+}+A}I_{C_1}\right)+pvE\left(u^{\left[\sum_{1}^{Y_n}\tilde{A}_i-1\right]_{+}+A}I_{C_1}\right)$$
$$+(1-p)E\left(u^{\sum_{1}^{K}\tilde{A}_i+A-1}v^{Y_n-K}I_{C_2}\right)+pvE\left(u^{\sum_{1}^{N}\tilde{A}_i+A-1}v^{Y_n-\tilde{K}}I_{C_2}\right)$$

و چون در حالت پایا هستیم، امیدهای ریاضی در جملات اول و سوم همان $P(u,v)$ هستند.

$$P(u,v)=B_1^*[\lambda(1-u)]\Bigg\{\frac{1}{u}\Big[(1-p+pv)P(u,v)$$
$$-(1-p+pv)\,E\left(u^{X_n}v^{Y_n}I_{\{X_n=0,Y_n\ge 0\}}\right)$$
$$+(1-p+pv)\,E\left(u^{\sum_{1}^{K}\tilde{A}_i}\,v^{Y_n-\tilde{K}}I_{C_2}\right)\Big]$$
$$+(1-p+pv)\,E\left[u^{\left[\sum_{1}^{Y_n}\tilde{A}_i-1\right]_+}I_{C_1}\right]\Bigg\} \qquad (۱۱)$$

برای محاسبه رابطه (۱۱) نیاز به محاسبه امید ریاضی‌های زیر می‌باشد :

i– محاسبه $E\left(u^{X_n}v^{Y_n}I_{\{X_n=0,Y_n\ge 0\}}\right)$ **:**

با شرطی کردن امید ریاضی بر روی $X_n=0$ و با استفاده از رابطه (۵) خواهیم داشت:

$$E\left(u^{X_n}v^{Y_n}I_{\{X_n=0,Y_n\ge 0\}}\right)=E\left(v^{Y_n}I_{\{Y_n\ge 0\}}\mid X_n=0\right)\pi_{0\bullet}^{IV}$$
$$=\psi(1-p+pv)\pi_{0\bullet}^{IV} \qquad (۱۲)$$

ii– محاسبه $E\left(u^{\sum_{1}^{K}\tilde{A}_i}\,v^{Y_n-\tilde{K}}I_{C_2}\right)$**:**

با استفاده از این که $\tilde{A}_i$ها $i.i.d$ بوده و دارای توزیع پواسون با پارامتر $\lambda\tilde{S}$ می‌باشند و با شرطی کردن امید ریاضی روی $\tilde{K}$ و $X_n=0$ داریم:

$$E\left(u^{\sum_{1}^{\tilde{K}}\tilde{A}_i}\,v^{Y_n-K}I_{C_2}\right)$$
$$=E\left(u^{\sum_{1}^{\tilde{K}}\tilde{A}_i}\,v^{Y_n-\tilde{K}}I_{\{X_n=0,Y_n\ge 0,\sum_{0}^{Y_n}\tilde{A}_i\ge M\}}\right)$$
$$=E\left(u^{\sum_{1}^{K}\tilde{A}_i}\,v^{Y_n-\tilde{K}}I_{\{Y_n\ge 0,\sum_{0}^{Y_n}\tilde{A}_i\ge M\}}\mid X_n=0\right)\pi_{0\bullet}^{IV}$$
$$=E\left(E\left(u^{\sum_{1}^{K}\tilde{A}_i}\,v^{Y_n-\tilde{K}}I_{\{Y_n\ge 0,\sum_{0}^{Y_n}\tilde{A}_i\ge M\}}\mid X_n=0,\tilde{K}\right)\right)\pi_{0\bullet}^{IV}$$
$$=E\left(\left(E(u^{\tilde{A}_i})\right)^{\tilde{K}}v^{Y_n-\tilde{K}}I_{\{Y_n\ge 0,\sum_{0}^{Y_n}\tilde{A}_i\ge M\}}\mid X_n=0\right)\pi_{0\bullet}^{IV}$$

و با استفاده از $E[u^{\tilde{A}}]=B_2^*[\lambda(1-u)]$ و شرطی کردن رابطه روی Y_n داریم:

$$=E\left(E\left[\left(\frac{B_2^*(\lambda(1-u))}{v}\right)^{\tilde{K}}v^{Y_n}I_{\{Y_n\ge 0,\sum_{0}^{Y_n}\tilde{A}_i\ge M\}}\mid X_n=0,Y_n\right]\right)\pi_{0\bullet}^{IV}$$

با توجه به اینکه $\tilde{K}$ یک متغیر تصادفی است امید ریاضی آن را می‌توان به این صورت می‌باشد:

$$=E\left(v^{Y_n}\left[\sum_{i=1}^{Y_n}\left(\frac{B_2^*(\lambda(1-u))}{v}\right)^{i}\Pr(\tilde{K}=i)\right]I_{\{Y_n\ge 0,\sum_{0}^{Y_n}\tilde{A}_i\ge M\}}\mid X_n=0\right)\pi_{0\bullet}^{IV}$$

که $P(\tilde{K}=i)$ بر اساس لم۱ اثبات می‌شود و با استفاده از رابطه (۸)، داریم:

$$E\left(u^{\sum_{1}^{\tilde{K}}\tilde{A}_i}\,v^{Y_n-\tilde{K}}I_{C_2}\right)=Q_M(u,v,p,\lambda)\pi_{0\bullet}^{IV} \qquad (۱۳)$$

iii– محاسبه $E\left[u^{\left[\sum_{1}^{Y_n}\tilde{A}_i-1\right]_+}I_{C_1}\right]$**:**

با استفاده از $i.i.d$ بودن $\tilde{A}_i$ها و با شرطی کردن رابطه بر روی Y_n و $X_n=0$ داریم:

$$E\left[u^{\left[\sum_{1}^{Y_n}\tilde{A}_i-1\right]_+}I_{\{X_n=0,Y_n\ge 0,\sum_{0}^{Y_n}\tilde{A}_i<M\}}\right]=$$
$$E\left[u^{\left[\sum_{1}^{Y_n}\tilde{A}_i-1\right]_+}I_{\left\{Y_n\ge 0,\sum_{0}^{Y_n}\tilde{A}_i<M\right\}}\mid X_n=0\right]\pi_{0\bullet}^{IV}$$

$$= E\left\{E\left[u^{\left[\sum_{1}^{Y_n}\widetilde{A}_i-1\right]_+} I_{\left\{Y_n\geq 0,\sum_{0}^{Y_n}\widetilde{A}_i<M\right\}} \mid X_n=0, Y_n\right]\right\}\pi_{0\bullet}^{IV}$$

$$= \frac{1}{u}E\left\{E\left[u^{\sum_{1}^{Y_n}\widetilde{A}_i} I_{\left\{Y_n\geq 0,\sum_{0}^{Y_n}\widetilde{A}_i<M\right\}} \mid X_n=0, Y_n\right]\right.$$

$$\left. -(1-u)E\left[\Pr\left(\sum_{1}^{Y_n}\widetilde{A}_i=0\right) I_{\left\{Y_n\geq 0,\sum_{0}^{Y_n}\widetilde{A}_i<M\right\}} \mid X_n=0, Y_n\right]\right\}\pi_{0\bullet}^{IV}$$

$$= \frac{1}{u}E\left\{E\left[\left[u^{\widetilde{A}}\right]^{Y_n} I_{\left\{Y_n\geq 0,\sum_{0}^{Y_n}\widetilde{A}_i<M\right\}} \mid X_n=0, Y_n\right]\right\}$$

$$-\frac{(1-u)}{u}E\left\{E\left[\Pr\left(\bigcap_{1}^{Y_n}(\widetilde{A}_i=0)\right) I_{\left\{Y_n\geq 0,\sum_{0}^{Y_n}\widetilde{A}_i<M\right\}} \mid X_n=0, Y_n\right]\right\}\pi_{0\bullet}^{IV}$$

و با انجام محاسبات ساده داریم:

$$= \frac{1}{u}E\left[\left[B_2^*[\lambda(1-u)]\right]^{Y_n} I_{\left\{Y_n\geq 0,\sum_{0}^{Y_n}\widetilde{A}_i<M\right\}} \mid X_n=0\right]\pi_{0\bullet}^{IV}$$

$$-\frac{(1-u)}{u}E\left\{E\left[\prod_{1}^{Y_n}\Pr\left(\widetilde{A}_i=0\right) I_{\left\{Y_n\geq 0,\sum_{0}^{Y_n}\widetilde{A}_i<M\right\}} \mid X_n=0, Y_n\right]\right\}\pi_{0\bullet}^{IV}$$

و چون $P(\widetilde{A}=0)=e^{-\lambda\widetilde{S}}$ و $E(e^{-\lambda\widetilde{S}})=B_2^*(\lambda)$ و با استفاده از رابطه(۶) داریم:

$$= \frac{1}{u}R_M\left[B_2^*[\lambda(1-u)]\right]\pi_{0\bullet}^{IV}$$

$$-\frac{(1-u)}{u}E\left\{\left[E\left(e^{-\lambda\widetilde{S}}\right)\right]^{Y_n} I_{\left\{Y_n\geq 0,\sum_{0}^{Y_n}\widetilde{A}_i<M\right\}} \mid X_n=0, Y_n\right\}\pi_{0\bullet}^{IV}$$

$$= \frac{1}{u}\left\{R_M\left[B_2^*[\lambda(1-u)]\right]-(1-u)R_M\left[B_2^*(\lambda)\right]\right\}\pi_{0\bullet}^{IV}$$

با فرض $G_M^*(u,p,\lambda)=R_M\left(B_2^*[\lambda(1-u)]\right)$ داریم:

$$E\left[u^{\left[\sum_{1}^{Y_n}\widetilde{A}_i-1\right]_+} I_{\left\{X_n=0,Y_n\geq 0,\sum_{0}^{Y_n}\widetilde{A}_i<M\right\}}\right]$$

$$= \frac{1}{u}\left\{G_M^*(u,p,\lambda)-(1-u)G_M^*(0,p,\lambda)\right\}\pi_{0\bullet}^{IV} \qquad (۱۴)$$

حال با جایگذاری روابط (۱۲) و (۱۳) و(۱۴) در رابطه (۱۱) خواهیم داشت:

$$P(u,v)=\frac{(1-p+pv)B_1^*[\lambda(1-u)]}{u}\left\{P(u,v)-\psi(1-p+pv)\pi_{0\bullet}^{IV}\right.$$
$$\left.+\left\{G_M^*(u,p,\lambda)-(1-u)G_M^*(0,p,\lambda)\right\}\pi_{0\bullet}^{IV}+Q_M(u,v,p,\lambda)\pi_{0\bullet}^{IV}\right\}$$

با جابجا کردن $P(u,v)$ از سمت راست تساوی به سمت چپ و کمی محاسبه اثبات کامل است.

حالت خاص۱. اگر $p=0$ باشد آنگاه تابع مولد احتمال اندازه سیستم همان تابع مولد احتمال اندازه سیستم مدل M/G/1 معمولی می‌باشد.

برهان: به سادگی دیده می‌شود:

$$\psi(1-p+pv)_{|p=0}=1$$
$$G_M^*(u,p,\lambda)_{|p=0}=0$$
$$Q_M(u,v,p,\lambda)_{|p=0}=0$$

و با قرار دادن روابط فوق در رابطه (۴) به سادگی نتیجه حاصل می‌گردد.

حالت خاص۲. اگر $M\to\infty$ باشد آنگاه:

$$P(u,v)=\frac{(1-p+pv)B_1^*[\lambda(1-u)]}{(1-p+pv)B_1^*[\lambda(1-u)]-u}\left[\psi(1-p+pv)\right.$$
$$\left.-G^*(u,p,\lambda)+(1-u)G^*(0,p,\lambda)\right]\pi_{0\bullet}$$

که همان تابع مولد احتمال خط مشی دوم بدست آمده در صالحی‌راد [1] می‌باشد.

برهان: به سادگی دیده می‌شود:

$$G_M^*(u,p,\lambda)_{|M\to\infty}=G^*(u,p,\lambda)$$
$$Q_M(u,v,p,\lambda)_{|M\to\infty}=0$$

با قرار دادن این روابط در رابطه (۴) به سادگی نتیجه حاصل می‌گردد.

نتیجه۱. تابع مولد احتمال حاشیه ای X_n و Y_n به شکل زیر می‌باشند:

$$\text{(الف)}\; P(u)=\frac{B_1^*[\lambda(1-u)]}{B_1^*[\lambda(1-u)]-u}\left[1-G_M^{\ *}(u,p,\lambda)\right.$$
$$\left.+(1-u)G_M^{\ *}(0,p,\lambda)-Q_M(u,1,p,\lambda)\right]\pi_{0\bullet}^{IV}$$

(۱۵)

ب) $$P(v)=\frac{(1-p+pv)}{(1-p+pv)-1}\Big[\psi(1-p+pv)-G_M^{\ *}(1,p,\lambda)-Q_M(1,v,p,\lambda)\Big]\pi_{0\bullet}^{IV} \qquad (16)$$

اثبات: با قرار دادن $u=1$ و $v=1$ در تابع مولد احتمال توام اندازه سیستم به آسانی توابع مولد حاشیه‌ای حاصل می‌گردند.

لم۲. اگر $g(x)=\dfrac{U(x)}{L(x)}$ و مشتق‌های اول و دوم $U(x)$ و $L(x)$ در $x=a$ وجود داشته باشد

$$U(x)_{|x=a}=0$$

و

$$L(x)_{|x=a}=0$$

آنگاه:

$$g'(x)_{|x=a}=\frac{U''(x)_{|x=a}L'(x)_{|x=a}-U'(x)_{|x=a}L''(x)_{|x=a}}{2\left(L'(x)_{|x=a}\right)^2}=\frac{U''(x)_{|x=a}}{2L'(x)_{|x=a}}-\frac{U'(x)_{|x=a}L''(x)_{|x=a}}{2\left(L'(x)_{|x=a}\right)^2} \qquad (17)$$

که در آن $g'(x)$ و $U'(x)$ و $L'(x)$ مشتق‌های مرتبه اول $g(x)$ و $U(x)$ و $L(x)$ نسبت به x و $U''(x)$ و $L''(x)$ مشتق‌های مرتبه دوم $U(x)$ و $L(x)$ نسبت به x هستند.

برهان. با مشتق‌گیری از رابطه و دو بار استفاده از قاعده هوپیتال به سادگی نتیجه حاصل می‌گردد.

لم۳.

الف) $$\frac{d}{du}\Big(B_1^*[\lambda(1-u)]-u\Big)_{|u=1}=-(1-\rho_1) \qquad (18)$$

ب) $$\frac{d}{du^2}\Big(B_1^*[\lambda(1-u)]-u\Big)_{|u=1}=\lambda^2\tau_1^2+\rho_1^2 \qquad (19)$$

ج) $$\frac{d}{du}\Big[B_1^*[\lambda(1-u)]\Big[1-G^*_M(u,p,\lambda)+(1-u)G^*_M(0,p,\lambda)-Q_M(u,1,p,\lambda)\Big]\Big]_{|u=1}=-\rho_2(R_M^{\ \prime}(1)+T_1^{\ \prime}(1))-G^*_M(0,p,\lambda) \qquad (20)$$

د) $$\frac{d}{du^2}\Big[B_1^*[\lambda(1-u)]\Big[1-G_M^{\ *}(u,p,\lambda)+(1-u)\,G^*_M(0,p,\lambda)-Q_M(u,1,p,\lambda)\Big]\Big]_{|u=1}$$

$$=-2[\rho_1\rho_2(R_M^{\ \prime}(1)+T_1^{\ \prime}(1))+\rho_1G^*_M(0,p,\lambda)]-[(\lambda^2\tau_2^2+\rho_2^2)(R'_m(1)+T'_1(1))+p_2^2(R''_M(1)+T''_1(1))] \qquad (21)$$

که در آن

$$T_1(v)=E\left(\left[\sum_{i=1}^{Y_n}v^i\Pr(\widetilde{K}=i)\right]I_{\{Y_n\ge 0,\sum_0^{Y_n}\widetilde{A}_i\ge M\}}\mid X_n=0\right)$$

است.

برهان: الف) با استفاده از مشتق معمولی داریم:

$$\frac{d}{du}\Big(B_1^*[\lambda(1-u)]-u\Big)=\frac{d}{du}\Big(B_1^*[\lambda(1-u)]\Big)-1$$

و از آنجا که $B_1^*[\lambda(1-u)]=\int_0^\infty e^{-\lambda(1-u)s}dB_1(s)$ خواهیم داشت:

$$\frac{d}{du}\Big(B_1^*[\lambda(1-u)]\Big)-1=\int_0^\infty\frac{d}{du}\Big(e^{-\lambda(1-u)s}\Big)dB_1(s)-1=\int_0^\infty\lambda se^{-\lambda(1-u)s}dB_1(s)-1$$

و با فرض $u=1$ داریم:

$$\left[\frac{d}{du}\Big(B^*[\lambda(1-u)]-u\Big)\right]_{|u=1}=\int_0^\infty\lambda sdB_1(s)-1=\lambda\int_0^\infty sdB_1(s)-1=\lambda E(s)-1=\rho_1-1$$

ب) با دو بار مشتق‌گیری داریم:

$$\frac{d}{du^2}\Big(B_1^*[\lambda(1-u)]-u\Big)=\int_0^\infty\frac{d}{du^2}\Big(e^{-\lambda(1-u)s}\Big)dB_1(s)=\int_0^\infty(\lambda s)^2e^{-\lambda(1-u)s}dB_1(s)=\lambda^2\int_0^\infty s^2e^{-\lambda(1-u)s}dB_1(s)$$

و با قرار دادن $u=1$ داریم:

$$\left[\frac{d}{du^2}\Big(B_1^*[\lambda(1-u)]-u\Big)\right]_{|u=1}=\lambda^2\int_0^\infty s^2dB_1(s)=\lambda^2E(s^2)=\lambda^2\Big(Var(s)+E^2(s)\Big)=\lambda^2\tau_1^{\ 2}+\rho_1^{\ 2}$$

ج) با مشتق گیری معمولی داریم:

$$\frac{d}{du}\left[B_1^*[\lambda(1-u)]\Big[1-G^*_M(u,p,\lambda)+(1-u)G^*_M(0,p,\lambda)-Q_M(u,1,p,\lambda)\Big]\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{d}{du}\left(B_1^*[\lambda(1-u)]\right)\Big[1-G^{*}_{M}(u,p,\lambda)\\
&+(1-u)G^{*}_{M}(0,p,\lambda)-Q_M(u,1,p,\lambda)\Big]\\
&+B_1^*[\lambda(1-u)]\Big[-G'^{*}_{M}(u,p,\lambda)-G^{*}_{M}(0,p,\lambda)-Q'_M(u,1,p,\lambda)\Big]
\end{aligned}
$$

و اگردر رابطه $u=1$ باشد خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{du}\Big[B_1^*[\lambda(1-u)]\Big[1-G^{*}_{M}(u,p,\lambda)\\
&+(1-u)G^{*}_{M}(0,p,\lambda)-Q_M(u,1,p,\lambda)\Big]\Big]_{|u=1}\\
&=-G'^{*}_{M}(u,p,\lambda)_{|u=1}-G^{*}_{M}(0,p,\lambda)-Q'_M(u,1,p,\lambda)_{|u=1}
\end{aligned}
$$

کافیست مقادیر $G'^{*}_{M}(u,p,\lambda)_{|u=1}$ و $Q'_M(u,1,p,\lambda)_{|u=1}$ را محاسبه نماییم.

ابتدا $G'^{*}_{M}(u,p,\lambda)$ را بدست می‌آوریم:

$$
\begin{aligned}
G'^{*}_{M}(u,p,\lambda)&=\frac{d}{du}\left(E\left(\left[B_2^*[\lambda(1-u)]\right]^{Y_n} I_{\{Y_n\ge 0,\sum_{0}^{Y_n}\tilde{A}_i<M\}}\mid X_n=0\right)\right)\\
&=\frac{d}{du}\left(B_2^*[\lambda(1-u)]\right)E\left(Y_n\left[B_2^*[\lambda(1-u)]\right]^{Y_n-1} I_{\{Y_n\ge 0,\sum_{0}^{Y_n}\tilde{A}_i<M\}}\mid X_n=0\right)
\end{aligned}
$$

و اگر $u=1$ باشد داریم:

$$
\begin{aligned}
G'^{*}_{M}(u,p,\lambda)_{|u=1}&=\left(\frac{d}{du}\left(B_2^*[\lambda(1-u)]\right)\right)_{u=1}\\
&\times E\left(Y_n\left[\left(B_2^*[\lambda(1-u)]\right)_{u=1}\right]^{Y_n-1} I_{\{Y_n\ge 0,\sum_{0}^{Y_n}\tilde{A}_i<M\}}\mid X_n=0\right)\\
&=\rho_2 E\left(Y_n I_{\{Y_n\ge 0,\sum_{0}^{Y_n}\tilde{A}_i<M\}}\mid X_n=0\right)=\rho_2 R'_M(1)
\end{aligned}
$$

و برای محاسبه $Q'_M(u,1,p,\lambda)$ داریم:

$$
\begin{aligned}
&Q'_M(u,1,p,\lambda)\\
&=\frac{d}{du}\left(E\left(\left[\sum_{i=1}^{Y_n}\left(B_2^*[\lambda(1-u)]\right)^i \Pr(\tilde{K}=i)\right]I_{\{Y_n\ge 0,\sum_{0}^{Y_n}\tilde{A}_i\ge M\}}\mid X_n=0\right)\right)\\
&=\frac{d}{du}\left(B_2^*[\lambda(1-u)]\right)\\
&\times\left(E\left(\left[\sum_{i=1}^{Y_n} i\left(B_2^*[\lambda(1-u)]\right)^{i-1}\Pr(\tilde{K}=i)\right]I_{\{Y_n\ge 0,\sum_{0}^{Y_n}\tilde{A}_i\ge M\}}\mid X_n=0\right)\right)
\end{aligned}
$$

و اگر $u=1$ باشد، داریم:

$$
\begin{aligned}
&Q'_M(u,1,p,\lambda)_{|u=1}\\
&=\rho_2\left(E\left(\left[\sum_{i=1}^{Y_n} i\Pr(\tilde{K}=i)\right]I_{\{Y_n\ge 0,\sum_{0}^{Y_n}\tilde{A}_i\ge M\}}\mid X_n=0\right)\right)=\rho_2 T'_1(1)
\end{aligned}
$$

و با جایگذاری مقادیر محاسبه شده در رابطه دیده می‌شود:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{du}\Big[B_1^*[\lambda(1-u)]\Big[1-G^{*}_{M}(u,p,\lambda)\\
&+(1-u)G^{*}_{M}(0,p,\lambda)-Q_M(u,1,p,\lambda)\Big]\Big]_{|u=1}\\
&=-\rho_2\left(R'_M(1)+T'_1(1)\right)-G^{*}_{M}(0,p,\lambda)
\end{aligned}
$$

د) با دو بار مشتق گیری داریم:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{du^2}\Big[B_1^*[\lambda(1-u)]\Big[1-G_M^{*}(u,p,\lambda)\\
&+(1-u)G^{*}_{M}(0,p,\lambda)-Q_M(u,1,p,\lambda)\Big]\Big]\\
&=\frac{d}{du^2}\left(B_1^*[\lambda(1-u)]\right)\Big[1-G^{*}_{M}(u,p,\lambda)\\
&+(1-u)G^{*}_{M}(0,p,\lambda)-Q_M(u,1,p,\lambda)\Big]\\
&+\Big[\left(B_1^*[\lambda(1-u)]\right)\Big[-G''^{*}_{M}(u,p,\lambda)-Q''_M(u,1,p,\lambda)\Big]\Big]
\end{aligned}
$$

و اگر $u=1$ باشد داریم:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{du^2}\Big[B_1^*[\lambda(1-u)]\Big[1-G^{*}_{M}(u,p,\lambda)\\
&+(1-u)G^{*}_{M}(0,p,\lambda)-Q_M(u,1,p,\lambda)\Big]\Big]_{|u=1}\\
&=\frac{d}{du^2}\left(B_1^*[\lambda(1-u)]\right)_{|u=1}\Big[1-G_M^{*}(u,p,\lambda)\\
&+(1-u)G^{*}_{M}(0,p,\lambda)-Q_M(u,1,p,\lambda)\Big]_{|u=1}
\end{aligned}
$$

$$+2\frac{d}{du}\left(B_1^*[\lambda(1-u)]\right)_{|u=1}\Big[-G^{*'}_M(u,p,\lambda)_{|u=1} - G^*_M(0,p,\lambda) - Q'_M(u,1,p,\lambda)_{|u=1}\Big]$$

$$+\left(B_1^*[\lambda(1-u)]\right)_{|u=1}\Big[-G''^*_M(u,p,\lambda)_{|u=1} - Q''_M(u,1,p,\lambda)_{|u=1}\Big]$$

مشابه قسمت قبل باید مقادیر $G''^*_M(u,p,\lambda)_{|u=1}$ و $Q''_M(u,1,p,\lambda)_{|u=1}$ را محاسبه نماییم:

$$G''^*_M(u,p,\lambda)=$$

$$\frac{d}{du^2}\left[E\left[\left[B_2^*[\lambda(1-u)]\right]^{Y_n} I_{\{Y_n\geq 0,\sum_0^{Y_n}\tilde{A}_i<M\}} \mid X_n=0\right]\right]$$

$$=\frac{d}{du^2}\left(B_2^*[\lambda(1-u)]\right)$$

$$\times E\left[Y_n\left[B_2^*[\lambda(1-u)]\right]^{Y_n-1} I_{\{Y_n\geq 0,\sum_0^{Y_n}\tilde{A}_i<M\}} \mid X_n=0\right]$$

$$+\left[\frac{d}{du}\left(B_2^*[\lambda(1-u)]\right)\right]^2$$

$$\times E\left[Y_n(Y_n-1)\left[B_2^*[\lambda(1-u)]\right]^{Y_n-2} I_{\{Y_n\geq 0,\sum_0^{Y_n}\tilde{A}_i<M\}} \mid X_n=0\right]$$

و با قرار دادن $u=1$ داریم:

$$G''^*_M(u,p,\lambda)_{|u=1}$$

$$=(\lambda^2\tau_2^2+\rho_2^2)E\left[Y_n I_{\{Y_n\geq 0,\sum_0^{Y_n}\tilde{A}_i<M\}} \mid X_n=0\right]$$

$$+\rho_2^2 E\left[Y_n(Y_n-1) I_{\{Y_n\geq 0,\sum_0^{Y_n}\tilde{A}_i<M\}} \mid X_n=0\right]$$

$$=(\lambda^2\tau_2^2+\rho_2^2)R'_M(1)+\rho_2^2 R''_M(1)$$

و برای $Q''_M(u,1,p,\lambda)_{|u=1}$ به شیوه‌ای مشابه داریم:

$$Q''_M(u,1,p,\lambda)_{|u=1}=(\lambda^2\tau_2^2+\rho_2^2)T_1'(1)+\rho_2^2 T_1''(1)$$

حال با جایگذاری و ساده کردن داریم:

$$\frac{d}{du^2}\Big[B_1^*[\lambda(1-u)]\Big[1-G^*_M(u,p,\lambda)+(1-u)G^*_M(0,p,\lambda)-Q_M(u,1,p,\lambda)\Big]\Big]_{|u=1}$$

$$=2\Big[\rho_1\big[-\rho_2\big(R'_M(1)+T_1'(1)\big)-G^*_M(0,p,\lambda)\big]\Big]$$

$$+\Big[-(\lambda^2\tau_2^2+\rho_2^2)(R'_M(1)+T_1'(1))-\rho_2^2(G''_M(1)+T_1''(1))\Big]$$

و لم ثابت می‌شود.

نتیجه۲. با توجه به شرایط قضیه قبل داریم:

$$\pi_{0\bullet}^{IV}=\frac{1-\rho_1}{\rho_2(R'_M(1)+T_1'(1))+G^*_M(0,p,\lambda)} \qquad (22)$$

اثبات: با توجه به ویژگی تابع مولد احتمال($P(1)=1$)، در صورت محاسبه $P(1)$ می‌توان رابطه فوق را اثبات نمود، اما بعد از محاسبه دیده می‌شود که $P(1)$ به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ تبدیل می‌شود؛ لذا با استفاده از قاعده هوپیتال و بر اساس لم ۳ داریم:

$$\lim_{u\to 1}P(u)=\frac{-\rho_2(R'_M(1)+T_1'(1))-G^*_M(0,p,\lambda)}{-\rho_1+1}\pi_{0\bullet}^{IV}=1$$

و با ساده کردن به راحتی اثبات کامل می‌شود.

۵. میانگین اندازه سیستم

قضیه۲. امید ریاضی اندازه سیستم برای صف‌اول در حالت پایا برابر است با:

$$L_X^{IV}=\rho_1+\frac{(\lambda^2\tau_1^2+\rho_1^2)}{2(1-\rho_1)}+\frac{1}{2(1-\rho_1)}\Big[(\lambda^2\tau_2^2+\rho_2^2)\big(R'_M(1)+T_1'(1)\big)+\rho_2^2\big(R''_M(1)+T_1''(1)\big)\Big]\pi_{0\bullet}^{IV} \qquad (23)$$

برهان: با مشتق گیری از تابع مولد احتمال حاشیه‌ای اندازه سیستم می‌توان اندازه سیستم را بدست آورد.

با استفاده از لم ۲ داریم:

$$E(X)=\frac{U''(u)_{|u=1}}{2L'(u)_{|u=1}}-\frac{U'(u)_{|u=1}L''(u)_{|u=1}}{2\big(L'(u)_{|u=1}\big)^2}$$

که $U(u)$ صورت و $L(u)$ مخرج کسر تابع مولد احتمال حاشیه‌ای می‌باشند با استفاده از لم ۳ داریم:

$$L_X^{IV}=\frac{-2\rho_1[\rho_2(R'_M(1)+T_1'(1))+G^*_M(0,p,\lambda)]}{2(\rho_1-1)}\pi_{0\bullet}^{IV}$$

$$+\frac{-\big(\lambda^2\tau_2^2+\rho_2^2\big)\big(R'_M(1)+T_1'(1)\big)-\rho_2^2(R''_M(1)+T_1''(1))}{2(\rho_1-1)}\pi_{0\bullet}^{IV}$$

$$-\frac{\left(-\rho_2(R'_M(1)+T'_1(1))-G^*_M(0,p,\lambda)\right)\left(\lambda^2\tau_1^2+\rho_1^2\right)}{2(1-\rho_1)^2}\pi_{0\bullet}^{IV}$$

بعد از ساده کردن داریم:

$$L_X^{IV}=\frac{-2\left[\rho_1\left(\frac{1-\rho_1}{\pi_{0\bullet}^{IV}}\right)\right]}{2(\rho_1-1)}\pi_{0\bullet}^{IV}$$
$$+\frac{-\left(\lambda^2\tau_2^2+\rho_2^2\right)\left(R'_M(1)+T'_1(1)\right)-\rho_2^2\left(R''_M(1)+T''_1(1)\right)}{2(\rho_1-1)}\pi_{0\bullet}^{IV}$$
$$+\left[\frac{\left(\frac{1-\rho_1}{\pi_{0\bullet}^{IV}}\right)\left(\lambda^2\tau_1^2+\rho_1^2\right)}{2(1-\rho_1)^2}\right]\pi_{0\bullet}^{IV}$$

و با کمی محاسبه برهان کامل است.

حالت خاص۳. اگر $p=0$ آنگاه اندازه صف همان، اندازه صف $M/G/1$ معمولی است.

برهان: چون $T_1(v)_{|p=0}=0$ و $R_M(v)_{|p=0}=0$ است براحتی اثبات می‌شود.

قضیه ۳. امید ریاضی اندازه سیستم برای صف دوم در حالت پایا برابر است با:

$$L_Y^{IV}=\left(\frac{p}{1-\rho_1}-T_2'(1)\right)+\left(\frac{p}{2}\left[\frac{\lambda^2\tau_1^2+\rho_1(2-\rho_1)}{(1-\rho_1)^3}\right]-T_2''(1)\right) \qquad (۲۴)$$

که در آن

$$T_2(v)=E\left(\left[\sum_{i=1}^{Y_n}v^{Y_n-i}\Pr(\widetilde{K}=i)\right]I_{\{Y_n\geq 0,\sum_{0}^{Y_n}\widetilde{A}_i\geq M\}}\mid X_n=0\right)$$

می‌باشد.

برهان: با استفاده از خواص تابع مولد احتمال، $E(Y)=P'(v)_{|v=1}$ است.

با فرض اینکه:

$$U(v)=(1-p+pv)\left(\psi(1-p+pv)-G_M^*(1,p,\lambda)-Q_M(1,v,p,\lambda)\right)\pi_{0\bullet}^{IV}$$
$$L(v)=-p+pv$$

باشد و با توجه به اینکه $L(1)=0$ و $U(1)=0$ هستند، با استفاده از لم۲ و اینکه $L'(v)=p$ و $L''(v)=0$ هستند داریم:

$$E(Y)=\frac{U''(v)_{|v=1}}{2L'(v)_{|v=1}}-\frac{U'(v)_{|v=1}L''(v)_{|v=1}}{2\left(L'(v)_{|v=1}\right)^2}=\frac{U''(v)_{|v=1}}{2p} \qquad (۲۵)$$

کافیست که مقدار $U''(v)$ را محاسبه کنیم:

$$U''(v)=2p\left(\frac{d}{dv}\left(\psi(1-p+pv)\right)-Q_M'(1,v,p,\lambda)\right)$$
$$+(1-p+pv)\left(\frac{d}{dv^2}\left(\psi(1-p+pv)\right)-Q_M''(1,v,p,\lambda)\right)$$

وبا فرض $u=1$ و با توجه به اینکه:

$$\frac{d}{dv}\left(\psi(1-p+pv)\right)_{|v=1}=\frac{p}{1-\rho_1}$$
$$\frac{d}{dv^2}\left(\psi(1-p+pv)\right)_{v=1}=p^2\left[\frac{\lambda^2\tau_1^2+\rho_1(2-\rho_1)}{(1-\rho_1)^3}\right]$$
$$T_2'(1)=Q'(1,v,p,\lambda)_{|v=1}$$
$$T_2''(1)=Q''(1,v,p,\lambda)_{|v=1}$$

است (اثبات روابط اول و دوم را در مراجع [۵]، [۶]و [۱] ببینید و روابط سوم و چهارم با توجه به تعریف $T_2(v)$ واضح می‌باشند)، داریم:

$$\frac{d}{dv^2}\left[(1-p+pv)\left(\psi(1-p+pv)-G^*_M(1,p,\lambda)-Q_M(1,v,p,\lambda)\right)\pi_{0\bullet}^{IV}\right]_{|v=1}$$
$$=2p\left(\frac{p}{1-\rho_1}-T_2'(1)\right)+\left(p^2\left[\frac{\lambda^2\tau_1^2+\rho_1(2-\rho_1)}{(1-\rho_1)^3}\right]-T_2''(1)\right)$$

و با جایگذاری این مشتق در رابطه(۲۵) به آسانی اثبات کامل است.

۶. مقداربهینه برای M

در این قسمت ابتدا یک تابع هزینه مناسب به عنوان تابع هدف که تابعی از M است تحت شرایط خطمشی تعریف می‌کنیم و با مینیمم کردن تابع بر حسب M می‌توانیم حدنصاب مینیمم کننده هزینه (بهترین حدنصاب) را برای مدل پیدا کنیم.

فرض کنید Z_n اندازه سیستم در زمان خروج متقاضی nام از صف اول در حالت پایا باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Z_n=X_n+Y_n+I_F \qquad (۲۶)$$

بنابراین میانگین اندازه کل سیستم برابر است با:

$$L(M)=L_X^{IV}+L_Y^{IV}+p \qquad (۲۷)$$

حال اگر c_1 هزینه ارائه سرویس اول و c_2 هزینه ارائه سرویس تکمیلی و c_3 هزینه تنظیم امکانات سرویس‌دهی و فراهم نمودن زمینه‌های لازم برای سرویس تکمیلی باشد، متوسط هزینه سرویس‌دهی متقاضیان در سیستم در حالت پایا، برابر است با:

$$C(M)=c_1L_X^{IV}+c_2L_Y^{IV}+c_3p \qquad (۲۸)$$

با توجه به روابط (۲۲) و (۲۳)، تابع $C(M)$ علاوه بر M به μ_1 ، μ_2 ، τ_1^2 ، τ_2^2 و λ بستگی دارد. لذا کافیست M بهینه را برحسب μ_1 ، μ_2 ، τ_1^2 ، τ_2^2 و λ با شرط $\rho < 1$ بدست آوریم (M را به صورتی پیدا کنیم که $C(M)$ مینیمم شود).

به دلیل پیچیده بودن فرمولهای L_X^{IV} و L_Y^{IV}، یافتن مقدار بهینه M فقط با روشهای آنالیزعددی و محاسبات کامپیوتری امکان‌پذیر است.

۷. نتیجه گیری

با استفاده از فرمولهای ارائه شده در این مقاله می‌توان M بهینه را بر اساس هزینه بدست آورد و این حالت را با خط‌مشی‌های دیگری که توسط [۱] ارائه شده‌اند مقایسه کرد و در نهایت بهترین خط‌مشی را جهت استفاده انتخاب نمود و بر اساس آن خط‌مشی می‌توان اندازه‌های صف اول و صف دوم را بدست آورد و ظرفیت‌های مناسب جهت متقاضیان سرویس اول و دوم در نظر گرفت.

مراجع

[۱]- صالحی راد، ۲۰۰۴، سرویس تکمیلی به برخی اقلام در صف M/G/1 ، پایان نامه دکتری دانشگاه فردوسی مشهد

[2]- Gross, D. and Harris, C. M., 1985, *Fundamentals of Queueing Theory*, John Wiley, New York.

[3]- Saaty, T. L., 1961, *Element of Queueing Theory*, McGraw-Hill, New York.

[4]- Takacs, L.(1955). Investigation of waiting time problems by reduction to Markov Processes, *Acta. Math.Acad.Sci. Hung*, 6, 101-129.

[5]- Salehi Rad, M.R., Mengersen K. and Shahkar, G. H., 2004, Reservicing some customers in M/G/1 queues under three disciplines, IJMMS, 32, 1715-1723.

[6]- Salehi Rad, M.R. and Shahkar, G. H., 2004, The completion of the process of the M/G/1 queueing service, Submitted to the *Journal of the Operations Research Letters*.