نظریه مقادیر کرانگین و کاربردهای آن

جهانبخش حکیمی [1]

چکیده

در این مقاله، نظریه مقادیر کرانگین [2] معرفی شده و مدل‌های بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین آنها داده شده است. توزیع تقریبی برای بزرگ‌ترین مقدار کرانگین را به دست آورده و مقایسه‌های عددی بین توزیع‌های دقیق و تقریبی صورت گرفته است. روش‌های مختلف برآورد پارامترهای این توزیع‌ها بیان شده است. به لحاظ اهمیت و دقتی که روش برآورد گشتاورهای وزنی احتمال در برآورد پارامترهای توزیع مقادیر کرانگین دارد، این روش معرفی شده و برای برآورد پارامترهای توزیع کوچک‌ترین مقدار به کار رفته است.

واژه‌های کلیدی: مقادیر کرانگین، توزیع‌های دقیق و تقریبی، گشتاورهای وزنی احتمال.

۱. مقدمه

در این بررسی، نظریه مقادیر کرانگین معرفی می‌گردد. آنگاه مدل‌های حاصل برای توزیع‌های مقادیر ماکسیمم و مینیمم در حد مطالعه و معرفی می‌شود. توزیع تقریبی برای بزرگترین مقدار با توزیع‌های دقیق آن مقایسه می‌گردد.

برآورد پارامترهای توزیع مقادیر کرانگین به روش گشتاورهای وزنی احتمال به لحاظ اهمیت و دقت زیاد، معرفی شده و پارامترهای توزیع کوچکترین مقدار با این روش برآورد می‌گردد. آنگاه می‌توان با استفاده از تابع عکس حاصل از توزیع، حداقل رخداد در T سال آینده را پیش‌بینی نمود. فرض کنید $F_r(x)$ عبارت از cdf r امین آماره مرتب شده $X_{(r)}$ باشد. آنگاه cdf برای بزرگترین آماره مرتب شده $X_{(n)}$ به صورت زیر داده می‌شود.

$$F_n(x) = P[X_{(n)} \le x] \qquad (۱)$$
$$= P[\text{همه } X_i \le x] = F^n(x)$$

به همین نحو cdf کوچکترین آماره مرتب عبارت است از

$$F_۱(x) = P[X_{(۱)} \le x] = ۱ - P[X_{(۱)} > x]$$
$$= ۱ - P[\text{همه } X_i > x]$$
$$= ۱ - \left(۱ - F(x)\right)^n$$

می‌توان نشان داد [1]، اگر میانگین و پراش توزیع اولیه به ترتیب μ و σ^2 باشند، آنگاه

$$E\left[X_{(n)}\right] \le \mu + \sigma \frac{(n-1)}{(۲n-۱)^{۱/۲}} \qquad (۳)$$

$$E\left[X_{(n)}\right] \ge \mu + \sigma \frac{n}{(۲n-۱)^{۱/۲}} \qquad (۴)$$

متغیرهای $X_{(۱)}$ و $X_{(n)}$ را وقتی اندازه نمونه خیلی زیاد باشد، مقادیر کرانگین گویند. هدف بدست آوردن رفتار (مدل) توزیع بزرگترین مقدار (کوچکترین مقدار) وقتی n به سمت بینهایت میل می‌کند، است. چنین شکل حدی توزیع مجانبی نامیده می‌شود.

توزیع دقیق مقدار کرانگین به صورت تحلیلی شکل ساده‌ای

---

[1] دانشگاه بین‌المللی امام خمینی(ره)

[2] Extreme Value theory

[3] Asympttic distribution

دارد، اما از نظر محاسبه عددی ارزیابی آنها مشکل است. از طرف دیگر، توزیع مجانبی معمولاً به صورت تحلیلی مشکل است، ولی از نظر محاسبه عددی ساده می‌باشد. مطابق نظریه دقیق مقادیر کرانگین، پارامترهای اصلی باقی می‌مانند، در حالی که در نظریه مجانبی دو گانه سه پارامتر جدید وارد می‌شود.

۲. نظریه مقادیر کرانگین

در بررسی توزیع مجانبی آماره مرتب $X_{r:n}$، دو حالت حدی ممکن وجود دارد. اولین حالت، وقتی است که r و n به سمت بی‌نهایت بروند، در حالی که نسبت r/n مقدار ثابت λ باقی بماند. بنابه تعریف، همیشه داریم $\circ \le \lambda \le 1$ اگر λ مساوی ۰ یا ۱ نباشد، یعنی $\circ < \lambda < 1$. در این صورت $X_{r:n}$ یک چندک نمونه توزیع است که دارای یک فرم نرمال مجانبی است، در صورتی که اگر n به سمت بی‌نهایت میل کند r نیز به سمت بی‌نهایت برود.

دومین فرآیند وقتی است که اگر n به سمت بی‌نهایت میل کند، r ثابت بماند. بنابراین

$$\lim \lambda = \lim \frac{r}{n} = \begin{cases} \circ & \text{اگر } r<n \\ 1 & \text{اگر } r=n \end{cases}$$

در این حالت توزیع مجانبی $X_{r:n}$ کاملا متفاوت از حالت قبلی است و یک فرم نرمال برای آن به دست نمی‌آید. این شاخه از مبحث مورد نظر اغلب به عنوان نظریه مقدار کرانگین نامیده می‌شود. حالت‌های ویژه جالب توجه آنهایی هستند که در آن r مساوی ۱ یا n باشد (کندال و استوارت [۲] و دیوید [۳]).

۳. توزیع مجانبی بزرگترین مقدار

چون یک تبدیل خطی تغییری در فرم توزیع حدی به وجود نمی‌آورد، بنابراین احتمال اینکه بزرگترین مقدار کوچکتر از مقدار x باشد، مساوی است با احتمال یک تابع خطی از x، به طوری که

$$\lim \Pr\left[\frac{X_n - a_n}{b_n} \le x\right] \qquad (\text{۵})$$

$$= \lim F(b_n x + a_n) \to H(x)$$

که در آن $H(x)$ یک تابع غیر منفی است. به این ترتیب فرم‌های ممکن توزیع حدی مشخص می‌شود. دو پارامتر a_n و b_n ممکن است تابعی از n باشند. معادله (۵) اصل پایداری[۴] نامیده می‌شود. فیشر و تیپت [۴] مفصلا در مورد تابع فوق بحث کرده‌اند و سه فرم ممکن برای توزیع حدی بزرگترین مقدار به دست آورده‌اند. اگر $F(x)$ توزیع اولیه متغیر تصادفی طوری باشد که توزیع حدی برای بزرگترین مقدار وجود داشته باشد، آنگاه این فرم حدی دقیقا یکی از سه نوع زیر می‌باشد

$$H(x) = \exp\left\{-\exp\left[-\frac{x-\mu}{\sigma}\right]\right\} \qquad (\text{۶})$$
$$-\infty < x < \infty, \quad \sigma > \circ$$

این توزیع، نوع I نامیده می‌شود و به توزیع گامبل معروف است.

$$H(x) = \exp\left\{-\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^{-k}\right\} \qquad (\text{۷})$$
$$x \ge \mu, \quad \sigma, k > \circ$$

این توزیع نوع II نامیده می‌شود و به توزیع فرچت معروف است.

$$H(x) = \exp\left\{-\left[-\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^{k}\right\} \qquad (\text{۸})$$
$$x \le \mu, \quad \sigma, k > \circ$$

این توزیع نوع III نامیده می‌شود.

برای توضیح بیشتر و شرط انتخاب a_n و b_n و نیز چه توزیع‌های اولیه‌ای منجر به هر یک از توزیع‌های حدی فوق می‌شوند، می‌توان به منابع زیر مراجعه نمود.

گامبل [۵]، هولدن و جاهیر [۶]، گالامبوس [۷]، هال [۸ و ۹]، کوهن [۱۰]، آندرسن [۱۱]، گومس [۱۲]، مخصوصا در رابطه با مطالعه سرعت نرخ همگرایی می‌توان به گالامبوس [۱۳] مراجعه کرد.

---

[۴] The stability postulate

جنکینس [۱۴] یک توزیع کلی حدی مقدار کرانگین[۵] برای سه نـوع توزیع حدی را به دست آورد که دارای سه پارامتر می‌باشد و عبـارت است از

$$G(x,k,\mu,\sigma)=\exp\left[-\left\{1-k\sigma(x-\mu)^{1/k}\right\}\right] \qquad (۹)$$

که در آن μ و σ بـه ترتیـب پـارامتر مکـان و مقیـاس بـرای مقـدار کرانگین بوده و به سادگی نشان داده می‌شود که

$$\lim_{k\to 0} G(x,k,\mu,\sigma)=typeI$$
$$\lim_{k\to -\infty} G(x,k,\mu,\sigma)=typeII$$
$$\lim_{k\to \infty} G(x,k,\mu,\sigma)=typeIII$$

و در حالت کلی فرم تبدیل شده x برابر است با

$$x(G)=\mu+\sigma\frac{1-[-\log G]^k}{k}$$

و با فرض $y=-\log[-\log G]$ داریم

$$x=\mu+\sigma\frac{(1-e^{-yk})}{k} \qquad (۱۰)$$

۴. توزیع مجانبی کوچکترین مقدار

اگر علامت متغیرها معکوس شـود،آنـگاه $-X_{(1)}$، بـزرگتریـن مقدار می‌شود و $H(x)$ عبارت است از $1-H(x)$. بنـابراین، کوچکتـرین مقـدار $X_{(1)}$ به سادگی به صورت زیر داده می‌شود

$$\Pi(x)=1-H(-x)$$

بنابراین، با استفاده از نـتایج برای $X_{(n)}$، توزیع کرانگین کوچکـترین مقدار به دست می‌آید. برای نوع I توزیع عبارت است از

$$\Pi(x)=1-H(-x)=1-\exp\left[-\exp\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right] \qquad (۱۱)$$
$$-\infty<x<\infty$$

این توزیع را توزیع گامبل یا گامپرتز[۶] گویند.

و برای نوع III، توزیع کرانگین کوچکترین مقدار برابر است با

$$\Pi(x)=1-H(-x)=1-\exp\left[-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^k\right] \qquad (۱۲)$$
$$x\ge\mu$$

این توزیع همان توزیع معروف وابیل است کـه گاهـی بـا پارامترهـای زیر نشان داده می‌شود

$$F(x)=1-\exp\left[-\left(\frac{x-x_0}{\alpha}\right)^\beta\right] \qquad x\ge x_0$$

کـه در آن α و β پارامترهـای مقیـاس و شـکل و x_0 پـارامتر مکـان (کوچکترین مقـدار) اسـت. در بررسـی‌های طـول عمـر[۷] آن را زمـان ضمـانت گوینـد. توزیـع وابیــل دارای کاربردهــای زیــادی اســت، مخصوصا در مطالعه قابلیت اعتمـاد و یـا توصیـف مقـاومت بعضـی از مواد، قبل از اینکه این توزیع در مطالعات قابلیت اعتماد به کـار بـرود، برای آماردان‌ها به عنوان توزیع نوع III فیشر و تیپت شناخته می‌شد.

به لحاظ اهمیتی که ارتباط توزیـع وابیـل و توزیـع گامبـل دارنـد، مخصوصا از نظر برآورد پارامترها، چگونگی تبدیل‌های دو توزیـع را بیان می‌کنیم. اگر در توزیع وابیل پارامتر مکان $x_0=0$ باشد، داریم

$$F(z)=1-\exp\left[-\left(\frac{z}{\alpha}\right)^\beta\right]$$

با تغییر متغیرهای زیر

$$z=e^{-x}\ ,\ \alpha=e^{-\mu}\ ,\ \beta=\frac{1}{\sigma}$$

به دست خواهیم آورد

$$F(x)=1-\exp\left[-\exp\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right]$$

که همان توزیع کرانگین کوچکترین مقدار نوع I است.

---

۵ Generalized Extreme value (GEV)

۶ Asymptotic distribution of smallest value

۷ Life testing

۵. توزیع‌های تقریبی بزرگترین مقدار برای نمونه‌های متناهی

کوشش‌های زیادی توسط محققین برای به دست آوردن یک توزیع تقریبی برای بزرگترین مقدار با نمونه‌های متناهی انجام گرفته است. به عنوان مثال، حکیمی [۱۵] توزیع تقریبی زیر را برای بزرگترین مقدار به دست آورده است.

قضیه: فرض کنید $x_۱, x_۲, \ldots, x_n$ مشاهدات (iid) با تابع توزیع پیوسته باشند، اگر ثابت $x_۰$ طوری باشد که

$$e^{-H(x_۰)} = \frac{۱}{n} \qquad (۱۳)$$

که در آن $H(x)$ تابع خطر است. آنگاه یک توزیع تقریبی برای بزرگترین مقدار

$$Z_n = \max(x_i) \quad i = ۱,۲,\ldots,n$$

به صورت زیر داده می‌شود

$$G(x) = e^{-e^{[-h(x_۰)(x-x_۰)]}} \qquad (۱۴)$$

که در آن $h(x) = H'(x)$ نرخ خطر است که عبارت است از $h(x_۰) = f(x)/(۱-F(x))$ و پارامتر مقیاس است. $x_۰$ پارامتر مکان می‌باشد.

اثبات: از رابطه (۱)، توزیع دقیق بزرگترین مقدار داده شده است و داریم

$$G(x) = P[Z_n > x] = [F(x)]^n = [۱-R(x)]^n \qquad (۱۵)$$

که در آن $R(x)$ تابع قابلیت اعتماد است. می‌توان رابطه (۱۵) را به صورت زیر نوشت

$$G(x) = \left[۱ - \frac{nR(x)}{n}\right]^n$$

با استفاده از حد $\lim_{n\to\infty}\left(۱-\frac{ax}{n}\right)^n = e^{-ax}$ برای nهای به اندازه کافی بزرگ داریم

$$G(x) \cong e^{-nR(x)} \qquad (۱۶)$$

اما،

$$R(x) = e^{-H(x)}$$

زیرا

$$H(x) = \int_۰^t h(t)dt$$

که در آن $h(t)$ نرخ خطر است و برابر است با $\frac{f(t)}{R(t)}$.

پس

$$H(t) = \int_۰^t \frac{f(t)}{R(t)}dt = -LnR(t)$$

و

$$e^{-H(x)} = e^{LnR(t)} = R(t)$$

بنابراین از رابطه (۱۶) به دست می‌آید.

$$G(x) \cong e^{-ne^{-H(x)}} \qquad (۱۷)$$

این توزیع اولین تقریب نامیده می‌شود. اگر $H(x)$ را بر حسب سری تیلر بسط دهیم، داریم

$$H(x) = H(x_۰) + h(x_۰)(x-x_۰)$$

بنابراین، رابطه (۱۷) به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$G(x) \cong e^{-ne^{-H(x_۰)-h(x_۰)(x-x_۰)}}$$

بنابراین، با استفاده از رابطه (۱۳) داریم

$$G(x) \cong e^{-h(x_۰)(x-x_۰)} \qquad (۱۸)$$

این توزیع، دومین توزیع تقریبی بزرگترین مقدار نامیده می‌شود. تقریب فوق برای چهار توزیع اولیه: ۱- نرمال استاندارد، ۲- وایبل، ۳- گاما و ۴- لجستیک به دست آمده است [۱۶]. در اینجا برای وقتی که توزیع اولیه وایبل باشد، توزیع تقریبی داده شده است. در این حالت داریم، $H(x_۰) = x_۰^b$ با پارامتر مقیاس مساوی ۱، آنگاه با استفاده از رابطه (۱۳) خواهیم داشت،

$$x_۰ = [\ln n]^{۱/\beta} \qquad (۱۹)$$

و

$$h(x) = \beta(\ln n)^{\beta-۱} \qquad (۲۰)$$

به ازای $\beta =$ ۱,۱٫۵,۲ ، $x =$ ۱,۴,۷ و $N =$ ۱۰,۳۰,۵۰ توزیع دقیق و تقریبی بزرگترین مقدار با استفاده از توزیع اولیه وایبل بـا پـارامتر β و پارامتر مقیاس واحد حساب شده و در جدول ۱ آمده اسـت. ملاحظـه می‌شود که توزیع تقریبی کاملاً نزدیک به توزیع دقیق است.

٦. برآورد پارامترها

منابع زیادی در مورد پارامترهای توزیع‌های مهم فوق وجود دارد. همچنین، روش‌های مختلفی مخصوصاً برای برآورد پارامترهای توزیع وایبل و گامبل به کار گرفته شده است. از جمله

- □ روش نموداری
- □ با استفاده از گشتاورها
- □ روش حداقل مربعات با استفاده از آمار مرتب
- □ با استفاده از روش حداکثر درستنمایی
- □ با استفاده از کوچکترین مشاهده شده
- □ با استفاده از روش احتمال وزنی گشتاورها[۸]

در این قسمت ابتـدا روش بـرآورد PWM را بـه طـور مختصـر شـرح می‌دهیم و آنگاه پارامترهای توزیع کوچکترین مقدار نوع II را با ایـن روش بررسی می‌کنیم.

- برآورد توسط گشتاورهای وزنی احتمال

برآورد پارامترها به روش گشتاورهای وزنی احتمال برای توزیع‌هـایی به کار می‌رود مثل $F(x)$ کـه تـابع عکـس آن وجـود داشـته باشـد، یعنی بتوان $x(F)$ را به صورت نظری به دست آورد [۱۷].

گشتاور وزنی احتمال به صورت زیر تعریف می‌شود

$$M_{l,j,k} = E\left[x^l(F)\, F^j (1-F)^k\right] \qquad (۲۱)$$

$$= \int_0^1 \left[x(F)\right]^l F^j (1-F)^k\, dF$$

اگر $j = k = 0$ و l عدد نامنفی باشند، آنگاه $M_{l,0,0}$ را گشـتاور lام حول مرکز گویند.

می‌توان نشان داد که اگر $M_{l,0,0}$ وجود داشته بـاشد و $x(F)$ تـابع پیوسته‌ای از F باشد، آنگاه $M_{l,j,k}$ برای تمام اعداد حقیقی نامنفی j و k وجود دارد [۱۸].

برای توزیع کوچکترین مقدار کرانگین نـوع سـوم، بـا پارامترهـای بـه کار رفته، داریم

$$F(x) = 1 - \exp\left[\left(\frac{x-\varepsilon}{\theta-\varepsilon}\right)^k\right]$$

$$x(F) = \varepsilon + (\theta-\varepsilon)\left[-\ln(1-F)\right]^{\frac{1}{k}} . \qquad (۲۲)$$

اگر تعریف کنیم

$$\beta_r = M_{1,r,0}$$

با توجه به رابطه (۲۲) خواهیم داشت

$$\beta_r = \int_0^1 \left(\varepsilon + (\theta-\varepsilon)\left[-\ln(1-F)\right]^{\frac{1}{k}} F^r\right) dF$$

$$= \int_0^\infty \varepsilon + (\theta-\varepsilon)[z^{\frac{1}{k}}](1-e^{-z})^r e^{-z}\, dz \qquad (۲۳)$$

$$, \ \ln(1-F) = z$$

$$2\beta_1 = \varepsilon + (\theta-\varepsilon)\Gamma\left(\frac{1}{k}+1\right)\left[2-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{k}}\right] \qquad (۲٤)$$

$$3\beta_2 = \varepsilon + (\theta-\varepsilon)\Gamma\left(\frac{1}{k}+1\right)\left[3-3\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{k}}+\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{k}}\right.$$

نتیجه می‌دهد

$$\frac{3\beta_2-\beta_0}{2\beta_1-\beta_0} = \frac{2-3\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{k}}+\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{k}}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{k}}} \qquad (۲۵)$$

در رابطه (۲۵) به جـای β_r از بـرآورد آن b_r کـه بـه صـورت زیـر تعریف می‌شود، استفاده می‌گردد.

$$b_r = \hat{\beta}_r\left[P_{j,n}\right] = n^{-1}\sum P_{jn}^r x_{(j)} \qquad (۲٦)$$

---

[۸] Probability weighted moments

که در آن $x_{(j)}$ مقدار آماره مرتب jام است و $P_{j,n}$ مکان رسم[۹] نامیده می‌شود. نقطه $x_{(j)}$ مربوط به توزیع آزاد $F_{(x_j)}$ می‌باشد. انتخاب‌های متفاوتی برای $P_{j,n}$ در نظر گرفته می‌شود. توزیع تجمعی نمونه آماره مرتب jام یعنی $S_{(X_j,n)} = j/n$ یا $S_{(X_j,n)} = j/(n+۱)$ را می‌توان به عنوان برآورد $F_{(X_j,n)}$ در نظر گرفت. این انتخاب معقول است، زیرا می‌توان نشان داد که $E[F_{(X_j,n)}] = j/(n+۱)$ بین [۱۹]. برای توزیع‌های مقادیر کرانگین بهتر است $P_{j,n} = (j-۰/۴۴)/(n+۰/۱۲)$ در نظر گرفته شود گرینگورتن [۲۰]. برای برآورد k بایستی معادله

$$\frac{۳b_۲ - b_۰}{۲b_۱ - b_۰} = \frac{۲ - ۳\left(\frac{۱}{۲}\right)^{\frac{۱}{k}} + \left(\frac{۱}{۳}\right)^{\frac{۱}{k}}}{۱ - \left(\frac{۱}{۲}\right)^{\frac{۱}{k}}}$$

را حل نمود. آنگاه برآورد پارامترهای θو ε با استفاده از روابط اولی و دومی (۲۵) عبارتند از

$$\hat{\varepsilon} = b_۰ + \frac{۲b_۱ - b_۰}{۱ - (\frac{۱}{۲})^{\frac{۱}{\hat{b}}}} \qquad (۲۸)$$

$$\hat{\theta} = \hat{\varepsilon} + \frac{b_۰ - \hat{\varepsilon}}{\Gamma(1 + \frac{1}{\hat{k}})} \qquad (۲۹)$$

با در دست داشتن برآورد پارامترها و با استفاده از تابع عکس توزیع خواهیم داشت

$$\hat{x}(F) = \hat{\varepsilon} + (\hat{\theta} - \hat{\varepsilon})[-\ln(۱-F)]^{\frac{۱}{\hat{k}}} \qquad (۳۰)$$

با توجه به دوره بازگشت T ، به صورت $T(x) = \frac{1}{1-F(x)}$ که عبارت است از متوسط زمان انتظار تا وقوع پیشامد x. می‌توان با استفاده از رابطه (۳۰) کوچکترین مقدار رخ داد x را در زمان T برآورد نمود. مثل پیش‌بینی خشکسالی رودخانه در T سال آینده.

۷. نتیجه

نظریه مقادیر کرانگین به طور مختصر معرفی شده است و انواع توزیع‌های مجانبی بزرگترین (کوچکترین) مقدار بررسی و معرفی گردیده است. سه تقریب برای توزیع مقدار ماکزیمم $F^n(x)$ نشان داده شده است که عبارتند از،

$$G_۱(x) \approx \exp\{-n\exp[-H(x)]\}$$

$$G_۲(x) = \exp\{-\exp[-h(x_۰)(x-x_۰)]\}$$

$$(x) = \exp\left(-\exp\left(\frac{-h(x_۰)(x-x_۰) - h'(x_۰)(x-x_۰)^۲}{۲}\right)\right)$$

نشان داده شده که توزیع تقریبی $G_۲(x)$ با توزیع دقیق بزرگترین مقدار برای اندازه نمونه‌های متفاوت با توزیع‌های منشاء مختلف خیلی خوب قابل مقایسه است. این تقریب وقتی که توزیع دقیق بزرگترین مقدار با توزیع اولیه از خانواده نمایی است، خیلی دقیقتر است. روش PWM را برای برآورد پارامترهای توزیع‌های مقادیر کرانگین می‌توان به کار برد. در این مطالعه، با استفاده از این روش، پارامترهای توزیع کوچکترین مقدار برآورد شده است. آنگاه با استفاده از تابع عکس، کوچکترین مقدار رخداد X در زمان آینده T قابل پیش‌بینی است.

[۹] Plotting position

$\beta = ۱$						
	X=۱		X=۴		X=۷	
اندازه نمونه	توزیع دقیق	توزیع تقریبی	توزیع دقیق	توزیع تقریبی	توزیع دقیق	توزیع تقریبی
۱۰	۰/۰۱۰۱۸۶	۰/۰۲۵۲۵۳	۰/۸۳۱۲۲۵	۰/۸۳۲۶۳۸	۰/۹۹۰۹۱۹	۰/۹۹۰۹۲۳
۳۰	۰/۰۰۰۰۱	۰/۰۰۰۱۶	۰/۵۷۴۳۲۳	۰/۵۷۷۲۵۶	۰/۹۷۳۰۰۲	۰/۹۷۳۰۱۴
۵۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰	۰/۳۹۶۸۲۰	۰/۴۰۰۲۰۴	۰/۹۵۵۴۱۰	۰/۹۵۵۴۳۰
$\beta = ۱/۵$						
۱۰	۰/۰۱۰۱۸۶	۰/۰۱۲۷۴۲	۰/۹۹۶۶۴۵	۰/۹۸۸۶۰۸	۱/۰۰۰۰۰	۰/۹۹۹۹۷۰
۳۰	۰/۰۰۰۰۱	۰/۰۰۰۰۰۰۰	۰/۹۸۹۹۸۵	۰/۹۸۰۳۸۲	۱/۰۰۰۰۰	۰/۹۹۹۹۷۰
۵۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰	۰/۹۸۳۳۶۴	۰/۹۷۲۶۷۲	۱/۰۰۰۰۰	۰/۹۹۹۹۷۷
$\beta = ۲$						
۱۰	۰/۰۱۰۱۸۶	۰/۰۰۰۰۰۲	۰/۹۹۹۹۸۸	۰/۹۹۹۹۸۹	۱/۰۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰۰
۳۰	۰/۰۰۰۰۱	۰/۰۰۰۰۰۰۰	۰/۹۹۹۹۷	۰/۹۹۹۹۹۵	۱/۰۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰۰
۵۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰	۰/۹۹۹۹۹۴	۰/۹۹۹۹۹۹	۱/۰۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰۰

جدول ۱

مراجع

[1] Gumbe E.J., 1954. *The Maximum of the Mean Largest Value and of the Range*, Ann. Math. Stats, pp. 25-76.
[2] Kendall, M.G, Org, J.K. and Stuart, A., 1987. *The Advance Theory of Statistics,* Vol. 5th Ed., Gvin ffin, London.
[3] Fisher, R.A. and Tippet, L.H.C., 1928. *Limiting Forms of the Frequency Distribution of the Largest or Smallest Member of a Sample*, proc. Cambridge phill. Soc., pp.144-180.
[4] Gumbel, E.J., 1958. *Statistics of Extremes,* Colombia university press, New York.
[6] Haldane, J.B.S. and Jayakar, S.D., 1963. *The Distribution of Extremal and Nearly Extremal Values in Samples From a Normal Distribution,* Biometrika, 50,1 and 2, p.89.
[7] Galambos, J., 1978. *The Asymptotic Theory of Extreme Order Statistics,* wiley, New York.
[8] Hall, P., 1979. *On the Rate of Convergence of Normal Extremes,* J. App prob., 16, pp.433-439.
[9] Hall, P., 1980, *Estimating Probabilities for Normal Extremes,* Ads., App. Prob. 12,pp.491-500.
[10] Cohen, J.P., 1982, *The Penultimate Form of Approximation to Normal Extreme,* Adv. Appl. Prob. 14, pp.324-389.
[11] Anderson, C.W., 1976, *Extreme Value Theory P.E.D Thesis,* Imperial college, London.
[12] Gomes, M.I., 1984, *Penultimate Limiting Forms in Extreme Value Theory,* Annals of the Institute of Statistical Mathematics. Vol.36, No 1.
[13] Galambos, J., 1978, *The Speed of Convergence of the Distribution of Extreme*, Math Scientist, 6, pp.13-26.
[14] Jenkinson, A.F., 1955. *The Frequncy Distribution of the Annual Maximum (or Minimum) Values of Meteological Elements,* Q. J. Roy. Meteo., Soc., pp. 87-158.
[15] Hakimi Sibooni, J., 1992. *Approximation of Largest Value*, (IV) ICC Proceeding. Lahore Pakistan.
[16] Hakimi, J., 1988. *Application of Extreme Value Theory, Ph.D Thesis*, Univ. of Bradford, England.
[17] Greenwood, J.A., Landwehr, J.M., Matalas, N.C. and Wallis, J.R., 1979. *Probability Weighted Moments: Defenition and Relation to Parameter of Several Distributions Ecpressible in Inverse Form,* Water Resources res, 15, pp. 1049-1054.
[18] Hosking, J.R.M., Wallis, J.R. and Wood, E.F., 1985. *Estimation of the generalized Extreme- value Distribution by the Method of Probability Weighted Moments,* Tech, Aug. Vol.27, No.3, pp. 259-261.
[19] Bain, L.J. and Antle, C.F., 1967. *Estimation of Parameter in the Weibull Distributions,* Teach, Vol.9, No.4, pp. 621-627.
[20] Gringorten, I.T., 1963. *A Plotting Rule for Extreme-value Probability Paper,* J. Geographical Reseach, 68, pp. 813-814.