کاربردی از احتمال شرطی در حل یک مسأله

محمدحسین پورسعید[۱]

چکیده

در این مقاله یک قطعه چوب به طول l را ، با سه روش، به طور تصادفی به سه قطعه برش می‌دهیم. سپس به یاری احتمال شرطی، احتمال اینکه با این سه نقطه بتوان یک مثلث ساخت را در هر حالت می‌یابیم.

واژه‌های کلیدی: توزیع یکنواخت، توزیع شرطی، توزیع توأم.

۱. مقدمه

در محاسبه احتمال یک پیشامد اگر امکان استفاده از مدل هندسی نباشد، با توجه به متغیر یا متغیرهای تصادفی متناظر با آزمایش مربوطه شاید بتوان اقدام نمود. در این نوشتار، در قالب طرح و حل یک مسأله در حالت های مختلف، تعبیری شهودی از احتمال شرطی و کاربردی از آن ارائه می گردد.

۲. طرح و حل مسأله

فرض کنید می‌خواهیم قطعه چوبی را به طول l بطور تصادفی سه قسمت کنیم، در چگونگی تقسیم چوب سه حالت مختلف را در نظر گرفته، احتمال تشکیل مثلثی با سه قطعه چوب حاصله را تعیین می کنیم. در حالت اول دو موقعیت را بطور تصادفی، روی چوب در نظر گرفته، آنرا در دو نقطه برش می‌دهیم. در حالت دوم قطعه چوب را در نقطه‌ای بطور تصادفی برش داده و سپس قطعه باقیمانده را نیز بطورتصادفی دو قسمت می کنیم و در حالت سوم ابتدا قطعه چوب را بطور تصادفی دو قسمت کرده، سپس قطعه بزرگتر را برش می‌دهیم.

در حالت اول با تعبیر هندسی احتمال در فضای دو بعدی و تعیین نسبت مساحت ها می‌توان نشان داد که احتمال تشکیل مثلث برابر با ۰/۲۵ است([۱])، ولی در دو حالت بعدی نمی‌توان نسبت مساحت‌ها را در نظر گرفت لذا باتوجه به متغیرهای تصادفی متناظر با آزمایش، برای محاسبه احتمال پیشامد مذکور به صورت زیر عمل می کنیم.

$$f_X(x)=\frac{1}{l}\ I_{(0,l)}(x)$$

نظر به اینکه موقعیت دومین برش بستگی به محل اولین برش و در نتیجه مقدار X دارد لذا در حالت دوم با توجه به تابع احتمال شرطی داریم

$$f_{Y|X}(y\mid x)=\frac{1}{l-x}\ \ I_{(x,l)}(y)$$

---

[۱] گروه ریاضی، دانشگاه لرستان

طول قطعات را با Z_1 , Z_2 , Z_3 نشان داده که بصورت توابعی از متغیرهای تصادفی X , Y با ضوابط زیر خواهند بود.

$$Z_1 = X ,\ Z_2 = Y - X ,\ Z_3 = l - Y$$

در این حالت شرط لازم و کافی برای تشکیل مثلث به صورت زیر است

$$z_1 + z_2 > z_3 ,\ z_1 + z_3 > z_2 ,\ z_2 + z_3 > z_1$$

یا

$$\frac{l}{2} < y < x + \frac{l}{2} < l$$

موقعیت نقاط متناظر با رابطه فوق، در نمودار (۱) نشان داده شده است. بنابراین احتمال مطلوب برابر است با

$$P(.) = \iint_{\left\{(x,y)\in\Re^2 : \frac{l}{2}<y<x+\frac{l}{2}<l\right\}} f_{X,Y}(x,y)\ dx\,dy$$

$$= \int_0^{\frac{l}{2}} \int_{\frac{l}{2}}^{x+\frac{l}{2}} \frac{1}{l(l-x)}\ dy\,dx$$

$$= Ln2 - 0/5 \cong 0/19$$

در حالت سوم برای تعیین ضابطه تابع چگالی مربوطه، طول قطعات را شبیه حالت دوم با Z_1 , Z_2 , Z_3 نشان داده که بصورت توابعی از متغیرهای تصادفی X , Y با ضوابط زیر می باشند.

$$f_X(x) = \frac{1}{l}\ I_{(0,l)}(x) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 0 < x < \frac{l}{2} \Rightarrow f_{Y|X}(y\,|\,x) = \frac{1}{l-x}\ I_{(x,l)}(y) \\ \frac{l}{2} < x < l \Rightarrow f_{Y|X}(y\,|\,x) = \frac{1}{x}\ I_{(0,x)}(y) \end{cases}$$

$$0 < x < \frac{l}{2} \Rightarrow Z_1 = X ,\ Z_2 = Y - X ,\ Z_3 = l - Y$$

$$\frac{l}{2} < x < l \Rightarrow Z_1 = l - X ,\ Z_2 = Y ,\ Z_3 = X - Y$$

در این حالت نیز احتمال تشکیل مثلث برابر است با

$$P(.) = \frac{1}{2}\left(\iint_{A=\left\{(x,y)\in\Re^2 : 0<y-\frac{l}{2}<x<\frac{l}{2}\right\}} \frac{1}{l(l-x)} dA + \iint_{A=\left\{(x,y)\in\Re^2 : \frac{l}{2}<x<y+\frac{l}{2}<l\right\}} \frac{1}{lx} dA \right)$$

$$= Ln2 - 0/5 \cong 0/19$$

نمودار (۲) موقعیت نقاط متناظر با تشکیل یک مثلث را نشان می دهد.

۳. بحث و نتیجه گیری

فضای نمونه ای یک آزمایش تصادفی، با توجه به نحوه انجام آن و موضوع مورد نظر تعریف و تعیین می شود لذا همانطور که در سه حالت بالا نیز ملاحظه شد، ممکن است در آزمایشی تصادفی که نحوه انجام آن متفاوت باشد متناظر با یک نتیجه معین مقادیر احتمالی متفاوتی را شاهد باشیم. در این قسمت به توجیه تساوی یا تفاوت در مقادیر احتمالی محاسبه شده می پردازیم. یادآوری می شود که در هر سه حالت، فضاهای نمونه ای به صورت مجموعه ای از اعداد تعریف می شوند لذا می توان فضای نمونه ای و تکیه گاه متغیر تصادفی را معادل با هم در نظر گرفت.

در برش چوب، متغیرهای تصادفی X و Y محل‌های برش و Z_1 , Z_2 , Z_3 به عنوان طول قطعات حاصله تعریف شدند. بنابراین در سه حالت مختلف مطرح شده، فضاهای نمونه ای متفاوتی به صورت زیر خواهیم داشت:

حالت اول:

$$S_X = \{x \in \Re , 0 \le x \le l\} ,$$

$$S_Y = \{y \in \Re , 0 \le y \le l\}$$

که در این صورت کل وضعیتهای ممکنه مربوط به طول قطعات به صورت زیر هستند

$$A=\{z_1+z_2>z_3\ ,\ z_1+z_3>z_2\ ,\ z_2+z_3>z_1\}$$

$$B=\{z_1+z_2>z_3\ ,\ z_1+z_3>z_2\ ,\ z_2+z_3<z_1\}$$

$$C=\{z_1+z_2>z_3\ ,\ z_1+z_3<z_2\ ,\ z_2+z_3>z_1\}$$

$$D=\{z_1+z_2<z_3\ ,\ z_1+z_3>z_2\ ,\ z_2+z_3>z_1\}$$

در هر یک از چهار وضعیت فوق، موقعیت اولین برش(X) در سمت چپ یا در سمت راست موقعیت دومین برش(Y) است. در نتیجه طول سه قطعه توابعی بر حسب متغیرهای تصادفی X و Y با ضابطه‌های زیر خواهند بود،

$$\begin{cases} 0\le x<y\le l \ \Rightarrow\ Z_1=X,\ Z_2=Y-X\ ,\ Z_3=l-Y \\ 0\le y<x\le l \ \Rightarrow\ Z_1=Y\ ,\ Z_2=X-Y\ ,\ Z_3=l-X \end{cases}$$

با توجه به اینکه متغیرهای تصادفی X و Y بر بازه $(0,l)$ دارای توزیع یکنواخت و مستقل از هم هستند، می‌توان موقعیت پیشامدهای A,B,C,D را بصورت نمودار (۳) نشان داد.

با توجه به تابع چگالی توأم X و Y و بکارگیری انتگرال مکرر (یا با استفاده از مدل هندسی)، می‌توان نشان داد که احتمال هر یک از چهار پیشامد A,B,C,D برابر با ۰/۲۵ است.

حالت دوم:

نظر به اینکه در حالتهای دوم و سوم موقعیت دومین برش بستگی به موقعیت اولین برش دارد، جهت نمایش تکیه‌گاه متغیر تصادفی متناظر با آنها از نماد متغیر تصادفی شرطی استفاده می‌شود.

$$S_X=\{x\in\Re,0\le x\le l\}\ ,$$

$$S_{Y|X=x}=\{y\in\Re,x\le y\le l\}$$

حالت سوم:

$$S_X=\{x\in\Re,0\le x\le l\}\ \Rightarrow$$

$$\begin{cases} S_{Y|X=x\in(0,l)}=\{y\in\Re,x\le y\le l\} \\ S_{Y|X=x\in(\frac{l}{2},l)}=\{y\in\Re,0\le y\le x\} \end{cases}$$

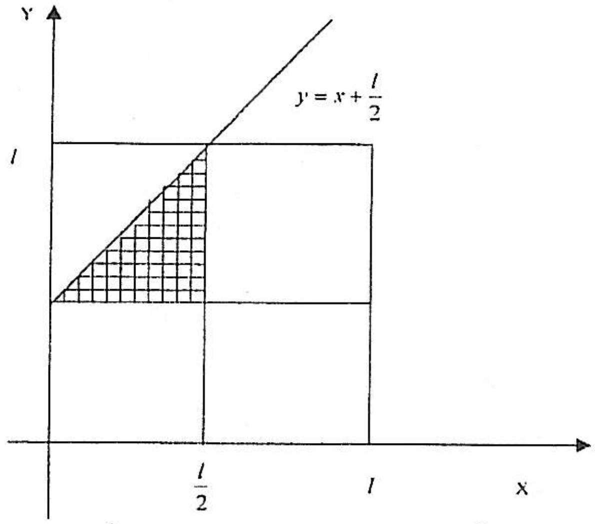
همان طور که ملاحظه می‌شود فضاهای نمونه ای حالتهای دوم و سوم با فضای نمونه‌ای حالت اول متفاوت است لذا اختلاف بین مقادیر احتمالی پیشامدها می تواند توجیه‌پذیر باشد. از طرفی با وجود تفاوت در فضاهای نمونه‌ای حالت‌های دوم و سوم، مقادیر احتمالی پیشامدها در دو حالت با هم برابرند که جهت توجیه آن، ابتدا فضای نمونه‌ای حالت دوم را به صورت زیر بازنویسی می کنیم.

$$S_X=\{x\in\Re,0\le x\le l\}\ \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 0<x<\frac{l}{2}\ \Rightarrow\ S_{Y|X=x}=\{y\in\Re,x\le y\le l\} \\ \frac{l}{2}<x<l\ \Rightarrow\ S_{Y|X=x}=\{y\in\Re,x\le y\le l\} \end{cases}$$

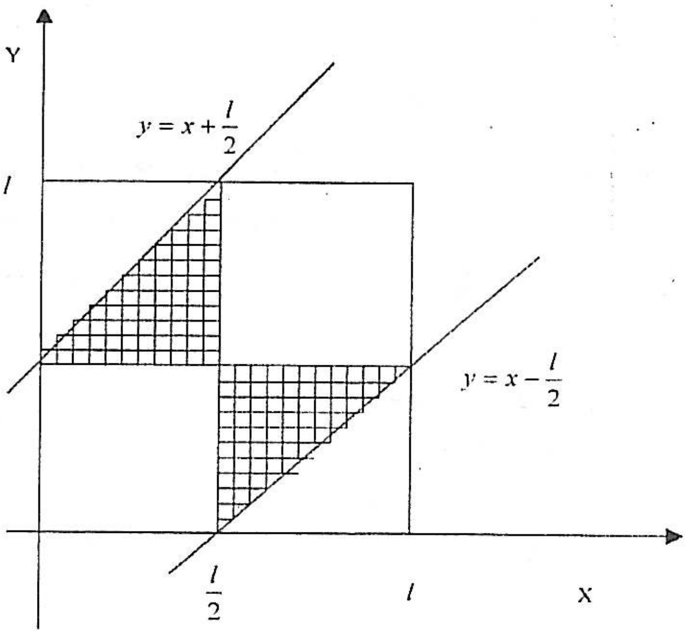
در زیر شاخه دوم، تشکیل یک مثلث با سه قطعه حاصله غیر ممکن است زیرا طول اولین قطعه بزرگتر از $\frac{l}{2}$ و مجموع دو قطعه دیگر کمتر از $\frac{l}{2}$ است. و در واقع در این حالت شرط لازم (و نه کافی) برای تشکیل مثلث، کنار گذاشتن قطعه چوب کوتاهتر و برش دادن قطعه چوب بلندتر است که در این صورت همان حالت سوم را در پیش رو خواهیم داشت و انتظار می‌رود که همان مقدار احتمال حالت سوم بدست آید(یادآوری می شود که در حالت دوم همواره $y>x$ است). بنابراین می توان نتیجه گرفت که در دو حالت اخیر بر خلاف حالت اول نمی‌توان از مدل هندسی استفاده کرد و با وجود عدم برابری مساحتهای متناظر در دو نمودار (۱) و (۲)، مقادیر احتمالی یکسانی را شاهد هستیم.

نمودار (۱)



$$\left\{(x,y) \in \Re^{۲} : \frac{l}{۲} < y < x + \frac{l}{۲} < l\right\}$$

نمودار (۲)



$$\left\{(x,y) \in \Re^{۲} : \frac{l}{۲} < y < x + \frac{l}{۲} < l \text{ یا } \frac{l}{۲} < x < y + \frac{l}{۲} < l\right\}$$