کنکاشی در گشتاورهای فرد

نرگس عباسی[۱]

چکیده

هدف بررسی نمونه‌های تصادفی یا متغیرهای تصادفی است که در آنها گشتاورهای فرد تا مرتبه‌ای، برابر صفر و از مرتبه‌های فرد بالاترمخالف صفر باشند.

واژه‌های کلیدی: گشتاورهای فرد، توزیع متقارن، نرم افزار MAPLE.

۱. مقدمه

در مباحث آماری محاسبه گشتاورها از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. نمایان شدن گشتاورها در تابع مشخصه و تابع مولد گشتاورها، به‌کارگیری شیوه روش گشتاوری در برآوردیابی پارامترهای مجهول توجه خاصی را به خود جلب کرده است.

در خانواده چگالی‌هایی که نسبت به یک مبدأ متقارن می‌باشند، گشتاورهای مرکزی فرد حول آن مبدا برابر صفر است.(مانند توزیع نرمال استاندارد حول مبدا صفر). اما این خاصیت در گشتاورهای مرکزی یک نمونه تصادفی از این توزیع یا هر توزیع متقارن دیگر، برقرار نیست. در اکثر موارد برای ارائه مثالی از نمونه‌های تصادفی یا متغیر تصادفی که در آن گشتاورهای فرد تا مرتبه‌ای، مانند k برابر صفر و از مرتبه های بالاتر مخالف صفر باشد، ما را دچارمشکل می کند. در واقع ما با در دست داشتن تعدادی نمونه تصادفی یا متغیرتصادفی با تکیه گاه شمارش‌پذیر می‌خواهیم این مثال را بیابیم.

۲. نتایج

فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$P(X=a_i)=p_i \quad i=1,2,\dots,n,\ a_i\in\Re,$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i=1,\quad 0<p_i<1$$

فرض کنید وضعیت پارامترهای تابع چگالی احتمال فوق به شرح زیر باشد

$$a_1<a_2<\dots<a_n$$

$$p_1=p_n,\quad p_2=p_{n-1},\dots$$

$$a_1=2M-a_n,\ a_2=2M-a_{n-1},\dots$$

[۱] دانشگاه پیام نور، مرکز شیراز

که در آن M میانه توزیع (برای n های فرد برابر با $a_{(n+1)/2}$ وبرای nهای زوج برابر با $\left(a_{n/2}+a_{(n/2)+1}\right)/2$) است[1].

توجه دارید که ترکیب خطی از X نمی‌تواند متغیری تصادفی با گشتاور اول و سوم آن صفر و مابقی گشتاورها را مخالف صفر ایجاد کند. شاید این خاصیت را بتوان از ترکیب دو متغیر تصادفی مستقل با گشتاورهای مشترک تا مرتبه سوم ایجاد نمود.

حال بحث را با تغییر دادن مقدار n، و به کمک نرم افزار MAPLE حل و فصل می‌کنیم.

۲-۱ حالت $n=2$

با ساده‌ترین حالت، $n=2$ شروع می‌کنیم. می‌خواهیم کمیت‌های a_1, a_2, p_1, p_2 را بنحوی برگزینیم تا گشتاور اول یا امید ریاضی X برابر صفر شود. جواب این خواسته آنست که انتخاب ما می‌تواند چنین باشد

$$\{a_1=-\frac{p_2}{p_1}a_2\}.$$

در اینجا تقارن داشتن تکیه‌گاه ایجاد نمی‌شود. حال شرط گشتاور سوم برابر صفر را به مدل می‌افزائیم این بار جواب حل معادلات برابر است با

$$\{p_1=\frac{1}{2},\quad a_2=-a_1,\qquad p_2=\frac{1}{2}\}$$

این نتیجه را می‌توان در پیامد زیر خلاصه کرد.

۲-۱-۱ پیامد: برای متغیر تصادفی با دو نقطه متمایز در تکیه‌گاه اگر

$$E(X^3)=0,\quad E(X)=0$$

آنگاه

$$E(X^{2k+1})=0\quad \forall k\in N$$

بدیهی است برای یک نمونه تصادفی دو تایی از توزیعی، صفر شدن گشتاور اول، $\overline{x}=(x_1+x_2)/2$ گشتاورهای مرتبه فرد را صفر خواهد نمود.

۲-۲ حالت $n=3$

اگر فقط شرط صفر شدن امید ریاضی را قرار دهیم بینهایت تابع چگالی احتمال با گشتاورهای مرکزی مراتب بالاتر غیر صفر را بدست می‌آوریم. افزودن شرط آنکه گشتاور سوم نیز صفر باشد معادلات را تا حدی مشکل می‌سازد تا جائیکه نرم‌افزار به آن پاسخی نمی‌دهد. شرایط را کمی ساده‌تر می‌کنیم تا پیچیده‌گی حل دستگاه را بهتر مشاهده نمائیم. تحت فرض $2p_1=p_2$ ما دو سری جواب خواهیم داشت

$$\{a_1=-a_2,\quad a_2=a_2,\quad a_3=0\}$$

یا

$$a_1=\frac{1}{p_1}a_3(-RootOf(3Z^2+3p_1^2-4p_1+1+(-6p_1+3)z)+2p_1-1,$$

$$a_2=\frac{a_3}{p_1}(-RootOf(3Z^2+3p_1^2-4p_1+1+(-6p_1+3)z),$$

$$a_3=a_3$$

که در آن RootOf () یکی از ریشه‌های چند جمله‌ای داخل پرانتز است. آنچه که مسلم است نمی‌توان پیامد ۲-۱-۱ را به این حالت تعمیم داد. اما به کمک نرم‌افزار، با شرایط پیامد زیر یک توزیع متقارن ایجاد می‌گردد که نتیجه مورد نظر را خواهد داد.

۲-۲-۱ پیامد: برای متغیر تصادفی با سه نقطه متمایز در تکیه‌گاه اگر

$$E(X^5)=E(X^3)=E(X)=0$$

آنگاه

$$E(X^{2k+1})=0,\qquad \forall k\in N$$

در سه نمونه تصادفی از توزیعی، با شرایط $\overline{x}=\overline{x^3}=0$ الزاما یک نمونه متقارن را می‌سازد.

$$\{x_1=-x_3,\quad x_2=0\}$$

$$\{x_1=-x_2,\quad x_3=0\}$$

$$\{x_1=0,\quad x_2=-x_3\}$$

نتایج از روش مستقیم با عملیات جبری قابل دسترسی هستند.

۲-۲-۲ پیامد: در یک نمونه تصادفی سه تایی اگر $\overline{x}=\overline{x^3}=0$ آنگاه

$$\overline{x^{2k+1}}=0,\qquad \forall k\in N$$

۲-۳ حالت $n = 4$

مشابه بخش قبلی تابع چگالی احتمال زیر گشتاورهای اول و سوم آن صفر و گشتاورهای فرد مراتب بالاتر می‌تواند صفر باشند. قرار دهید

$$p_1 = 0/2, \quad p_2 = 0/2, \qquad p_3 = 0/3, \quad p_4 = 0/3$$

آنگاه دسته جوابها به صورت زیر خواهد شد

$$\{a_1 = -a_2, \qquad a_2 = a_2, \qquad a_3 = a_3, \qquad a_4 = -a_3\}$$

یا

$$a_1 = -RootOf\Big(12z^2 + (18a_4 + 18a_3)z + 5a_4^2 + 22a_3a_4 + 5a_4^2\Big) - 1/5a_3 - 1/5a_4,$$

$$a_2 = RootOf\Big(12Z^2 + (18a_4 + 18a_3)Z + 5a_3^2 + 22a_3a_4 + 5a_4^2\Big),$$

$$a_3 = a_3,$$

$$a_4 = a_4$$

در حالیکه نتایج برای چهار نمونه تصادفی با عملیات جبری همانند پیامد ۲-۲-۲ بدست می‌آید.

۲-۳-۱ پیامد: درچهار نمونه تصادفی اگر $\overline{x} = \overline{x^3} = 0$ برقرار باشد، آنگاه

$$\overline{x^{2k+1}} = 0, \qquad \forall k \in N.$$

۲-۴ حالت $n > 4$

حل دستگاه $\overline{x} = \overline{x^3} = 0$ برای پنج نمونه تصادفی جوابهای زیر را تولید می‌کند

$$\{x_1 = -RootOf((x_3 + x_4 + x_5)Z^2 + (2x_3x_4 + 2x_3x_5 + x_4^2 + x_5^2 + x_3^2 + 2x_4x_5)Z + 2x_3x_4x_5 + x^2x_5 + x_4x_5^2 + x_3^2x_4 + x_3x_4^2 + x_3^2x_5 + x_3x_5^2) - x_3 - x_4 - x_5,$$

$$x_2 = RootOf((x_3 + x_4 + x_5)Z^2 + (2x_3x_4 + 2x_3x_5 + x_4^2 + x_5^2 + x_3^2 + 2x_4x_5)Z + 2x_3x_4x_5 + x^2x_5 + x_4x_5^2 + x_3^2x_4 + x_3x_4^2 + x_3^2x_5 + x_3x_5^2),$$

$$x_3 = x_3, \quad x_4 = x_4\}.$$

در بررسی افزودن شرط $\overline{x^5} = 0$ اگر در نمونه‌های تصادفی شش‌تایی و پنج‌تایی اعمال کنیم پیامد زیر حاصل می‌گردد.

۲-۴-۱ پیامد: در نمونه تصادفی پنج‌تایی یا شش‌تایی اگر $\overline{x} = \overline{x^3} = \overline{x^5} = 0$، آنگاه

$$\overline{x^{2k+1}} = 0, \qquad \forall k \in N$$

برخی نتایج فوق در نرم افزار MAPLE مطابق فرمانهای زیر انجام گرفته است.

```
Solve({p1*a1 + p2*a2 + p3*a3, p1*(a1^3) +
    + p2*(a2^3) + p3*(a3^3), p1 > 0, p2 > 0
    , p3 > 0, p1 + p2 + p3 = 1} {a1, a2});
Solve({x1 + x2 + x3 + x4 + x5, x1^3 + x2^3 + x3^3
    + x4^3 + x5^3}, {x1, x2, x3});
Solve({x1 + x2 + x3 + x4 + x5 + x6, x1^3 + x2^3 + x3^3
    + x4^3 + x5^3 + x6^3, x1^5 + x2^5 + x3^5
    + x4^5 + x5^5 + x6^5}, {x1 + x2 + x3});
```

۳. بحث

آوردن مثالهایی که در آن گشتاورهای فرد تا مرتبه‌ای برابر صفر و مراتب بالاتر مخالف صفر باشد، از اهداف این مقاله بوده است. بر اساس حل معادلات به وسیله نرم افزارMAPLE که برای $n < 12$ انجام شد، توانستیم پیامدها را به شکل زیر تعمیم دهیم. اگر به شیوه جبری بخواهیم متوسل شویم باید ابتدا معادلات در قسمت فرض پیامدها حل شود سپس

با رسیدن به جواب متقارن به نتیجه مورد نظر دست یافت. در حالتیکه تعداد عناصر در تکیه‌گاه و یا تعداد نمونه تصادفی کوچک است با یک محاسبه جبری ساده می‌توان اثبات را انجام داد اما در ابعاد بالا کار به این سادگی نیست.

- اگر متغیر تصادفی X دارای تکیه‌گاه با n عضو بوده و $E(X^{2k-1}) = 0 \quad \forall k \le n$ آنگاه

  $E(X^{2k-1}) = 0 \quad \forall k \ge 1$.

- برای نمونه‌هایی $2n$ تایی و $2n-1$ تایی، اگر

  $\overline{x} = \overline{x^{3}} = \ldots = \overline{x^{2k-1}} = 0$ آنگاه $\overline{x^{2k-1}} = 0 \quad \forall k \ge 1$.

درباره این نتایج می‌توان اینچنین استدلال کرد، ابتدا بدون آنکه از کلیت مسئله کاسته شود فرض می کنیم $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_{2n}$ بنابر معادلات در فرضیه، تعدادی از مجهولات باید منفی و مابقی مثبت باشند یعنی $m \le n$

$$x_1^{2m-1} + x_2^{2m-1} + \ldots + x_k^{2m-1} = -x_{k+1}^{2m-1} - \ldots - x_{2n}^{2m-1}$$

برای سازگاری معادلات باید $k = n$ باشد. دو دستگاه یکی برحسب مجهولات $x_1,\ldots,x_n$ و دیگری بر حسب $x_{n+1},\ldots,x_{2n}$ با n معادله مطرح است. جواب این دو دستگاه در یک منها با هم اختلاف دارند و از آنجا که x_i مرتب شده در نظر گرفته ایم پس $x_i = -x_{n-i+1}, \quad i = 1,2,\ldots n$ در وضعیت $2n-1$ مجهول جواب $x_n = 0$ و $x_i = -x_{n-i+1}, \quad i = 1,2,\ldots,n-1$ است.
برای متغیر تصادفی با n عنصردر تکیه‌گاه چون n جرم مجهول باید در نظر گرفته شود پس $2n$ مجهول داریم که مطابق با استدلال فوق به نتیجه کلی پیامد خواهیم رسید.

مراجع

[۱] بهبودیان، جواد، روشهای ناپارامتری، انتشارات پیام نور

ارقام دروغ نمی گویند، دروغ گویان رقم‌سازی می کنند.

ژنرال چارلز-اچ