

برآوردگرهای UMVU در خانواده‌های لانه‌ای از توزیع‌ها

عبدالحمید رضائی رکن آبادی^۱

چکیده

اغلب وقتی برآوردگر $\delta = \delta(X_1, \dots, X_n)$ در خانواده‌ی توزیع‌های \mathcal{P}_1 ، UMVU است، به غلط نتیجه‌گیری می‌شود که در کلاس \mathcal{P}_2 که $\mathcal{P}_2 \subset \mathcal{P}_1$ نیز برآوردگری UMVU خواهد بود. در این مقاله نادرستی این نتیجه‌گیری را مورد بحث قرار می‌دهیم.

UMVU در \mathcal{P}_1 ، در \mathcal{P}_2 و \mathcal{P}_3 هم نااریب است و ممکن است تصور شود در \mathcal{P}_2 و \mathcal{P}_3 نیز UMVU هست. اما واقعیت چنین نیست و پاسخ سؤال فوق همواره مثبت نیست.

اگر فرض کنیم Δ_1 و Δ_2 و Δ_3 به ترتیب کلاس‌های همه‌ی برآوردگرهای نااریب θ (میانگین توزیع)، در خانواده‌های \mathcal{P}_1 و \mathcal{P}_2 و \mathcal{P}_3 باشند، به ازای هر $\delta_1 \in \Delta_1$ ؛ چون برآوردگری نااریب برای θ در \mathcal{P}_1 است، با فرض $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ داریم:

$$\forall f_1 \in \mathcal{P}_1 \quad E(\delta_1) = \int f_1(\underline{x}) \delta_1(\underline{x}) d\underline{x} = \theta$$

و چون $\mathcal{P}_2 \subset \mathcal{P}_1$ پس:

$$\forall f_2 \in \mathcal{P}_2 \quad E(\delta_2) = \int f_2(\underline{x}) \delta_2(\underline{x}) d\underline{x} = \theta$$

فرض کنید \mathcal{P}_1 خانواده‌ی همه‌ی توزیع‌های پیوسته با امید ریاضی متناهی θ ؛ \mathcal{P}_2 خانواده‌ی همه‌ی توزیع‌های متقارن حول θ و \mathcal{P}_3 خانواده‌ی همه‌ی توزیع‌های نرمال با میانگین θ و واریانس مجهول σ^2 باشند، بدیهی است:

$$\mathcal{P}_3 \subset \mathcal{P}_2 \subset \mathcal{P}_1. \quad (1)$$

اگر برآوردگر $\delta^* = \delta^*(X_1, \dots, X_n)$ در کلاس \mathcal{P}_1 برآوردگری UMVU برای θ باشد، آیا این برآوردگر در کلاس‌های \mathcal{P}_2 و \mathcal{P}_3 نیز UMVU است؟ در برخورد اول چنین استنباط می‌شود که پاسخ این سؤال مثبت است. مثلاً اگر فردی کوتاه‌ترین فرد بالغ در کشور بوده و ساکن مشهد باشد؛ قطعاً او کوتاه‌ترین فرد بالغ در استان خراسان و شهر مشهد نیز هست. در اینجا نیز \mathcal{P}_1 خانواده‌های \mathcal{P}_2 و \mathcal{P}_3 را در بر دارد؛ δ^* برآوردگر

^۱ عبدالحمید رضائی رکن آبادی، دانشکده علوم ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد

مثالهای زیر منفی بودن پاسخ سؤال مطرح شده در شروع بحث را ثابت می‌کنند:

یعنی $\delta_1 \in \Delta_2$. در نتیجه $\Delta_1 \subset \Delta_2$. بطور مشابه می‌توان نشان داد $\Delta_2 \subset \Delta_3$ و بنابراین:

$$\Delta_1 \subset \Delta_2 \subset \Delta_3. \quad (2)$$

• مثال ۲ - \bar{X} برآوردگر UMVU برای θ در خانواده‌ی \mathcal{P}_1 است ([۱]، صفحه ۱۰۲) ولی \bar{X} برآوردگر UMVU برای θ در خانواده‌ی \mathcal{P}_2 نیست زیرا به‌طور کلی ثابت می‌شود در کلاس \mathcal{P}_2 برآوردگر UMVU برای θ وجود ندارد ([۱]، صفحه‌ی ۱۳۷، تمرین ۲.۴.۴).

در حقیقت براساس همین استدلال ثابت می‌شود که صرف نظر از نوع توزیع، \bar{X} برآوردگری نارایب برای θ (میانگین توزیع) است. در توزیع نرمال، نارایب بودن \bar{X} را برای میانگین توزیع نرمال بدیهی می‌انگاریم.

مثال زیر نشان می‌دهد زیرمجموعه‌ها در رابطه‌ی (۲)

ممکن است، به‌صورت محض باشند.

• مثال ۱ - با فرض $\delta_0(X_1, \dots, X_n) = \frac{X_{(1)} + X_{(n)}}{2}$ که در آن $X_{(1)}$ و $X_{(n)}$ به‌ترتیب آماره‌های ترتیبی اول و n ام در یک نمونه‌ی تصادفی n تایی از توزیع X است، ثابت می‌شود δ_0 برآوردگری نارایب برای مرکز تقارن هر توزیع پیوسته‌ی متقارن است ([۱]، تمرین ۵.۳.۱)؛ یعنی $\delta_0 \in \Delta_2$ اما اگر f_1 در \mathcal{P}_1 به‌صورت نمایی

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

فرض شود، به ازای $m = 3$ ، δ_0 برآوردگری اریب برای θ میانگین توزیع فوق، است و اریبی آن $\frac{\theta}{3}$ است؛ یعنی $\delta_0 \notin \Delta_1$. پس لااقل عضوی در Δ_2 وجود دارد که در Δ_1 نیست.

براساس رابطه‌ی (۲) می‌توان گفت، اصولاً یافتن بهترین برآوردگر در کلاس Δ_2 (مربوط به خانواده توزیع‌های \mathcal{P}_2) مشکل‌تر از یافتن بهترین برآوردگر در زیرکلاس‌های Δ_1 و Δ_2 (مربوط به توزیع‌های به ترتیب \mathcal{P}_2 و \mathcal{P}_3) است.

• مثال ۳ - اگر \mathcal{P}_4 نیز خانواده‌ی توزیع‌های نرمال با میانگین معلوم θ و واریانس مجهول σ^2 باشد؛ بدیهی است، $\mathcal{P}_4 \subset \mathcal{P}_2$. در خانواده‌ی \mathcal{P}_2 با استفاده از خواص خانواده‌ی نمایی ثابت می‌شود آماره‌ی $(\sum X_i, \sum X_i^2)$ بسنده‌ی کامل است. پس بنا به قضیه‌ی لهنمن شفه برآوردگر نارایب $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum (X_i - \bar{X})^2$ برای σ^2 که تابعی از این آماره‌ی بسنده‌ی کامل است، برآوردگری UMVU برای σ^2 است. اما بطور مشابه می‌توان نشان داد برآوردگر UMVU برای σ^2 در خانواده‌ی محدودتر \mathcal{P}_4 عبارت‌است از $S_0^2 = \frac{1}{n} \sum (X_i - \theta_0)^2$ که با S^2 متفاوت است.

هر چند در بحث بالا نتیجه گرفتیم UMVU بودن در خانواده‌ی بزرگتر، UMVU بودن در زیرخانواده‌ی کوچکتر از آن را در حالت کلی نتیجه نمی‌دهد، ولی مسلماً این امکان وجود دارد که یک برآوردگر UMVU در خانواده‌ی وسیع‌تر، در زیرخانواده‌ی کوچکتر از آن نیز UMVU باشد. مثلاً \bar{X} برآوردگری UMVU از میانگین توزیع، هم در خانواده‌ی \mathcal{P}_1 و هم در زیرخانواده‌ی کوچکتر \mathcal{P}_2 است.

مراجع

[1] Lehmann. E. L. *Theory of Point Estimation*, (1983).