

پارادوکس زندانیان

غلامحسین شاهکار*

به همیت ترتیب اگر مثلاً K را این پیشامد فرض کنیم که زندانیان بگویند «بهرام آزاد می‌شود» آن گاه باز هم به دست می‌آوریم

$$P(A|K) = \frac{1}{3}$$

پارادوکس زندانیان به صورت زیر نیز مطرح شده است. در مسابقه‌ای دو یک برنامه‌تولیزی روی صحنه سه پرده دیده می‌شوند که بنا به اظهار مجری برنامه پشت یکی از آنها جایزه‌ای متعلق به مهمان برنده مسابقه قرار دارد. پرده‌ها همه هم شکل و بنابراین احتمال وجود جایزه پشت هر یک از آنها $\frac{1}{3}$ است. مسأله از اینجا شروع می‌شود که مهمان برنامه یکی از پرده‌ها را انتخاب می‌کند. بعد از آن مجری برنامه که می‌داند جایزه پشت کدام پرده قرار دارد، برای کمک به انتخاب مهمان برنامه پرده‌ای غیر از آنچه مهمان برنامه انتخاب کرده یا پرده‌ای که جایزه پشت آن قرار دارد، کنار زده نشان می‌دهد که پشت آن خالی است. در اینجا مجری برنامه به مهمان خود می‌گوید که اگر مایل است می‌تواند نظر خود را تغییر دهد. سؤال اینجاست که احتمال وجود جایزه پشت پرده‌ای که مهمان برنامه انتخاب کرده است $\frac{1}{3}$ است یا $\frac{1}{2}$ ؟ آیا با مشخص شدن وضعیت یکی از پرده‌ها احتمال وجود جایزه پشت پرده‌ای که مهمان برنامه انتخاب کرده است از $\frac{1}{3}$ به $\frac{1}{2}$ تغییر کرده است یا نه.

در این مسأله‌ها این مجادله‌های لفظی مربوط به سوء تفاهم در اطلاعی است که زندانیان یا مجری برنامه به طرف مقابل می‌دهد. ممکن است صرف نظر از جواب رسمی مسأله که با استفاده از قضیه بیز به دست می‌آید بخواهیم از نقطه نظر شهودی نیز مثلاً اشکال گفته زندانیان را دریابیم. او می‌گوید با وجود سه نفر احتمال محکومیت هر یک $\frac{1}{3}$ است. اما با فاش شدن نام یکی از آنها می‌شود احتمال محکومیت هر یک از دو

زندانیان یک زندان که در آن احمد، رضا، و بهرام زندانی‌اند تنها کسی است که می‌داند یکی از این سه نفر محکوم به اعدام شده و دو نفر دیگر آزاد خواهند شد. احمد مصمم است نامه‌ای به همسر خود نوشته از او بخواهد تا در صورت محکومیت او پیغامش را به رضا یا بهرام، هر کدام آزاد شدند برساند (توجه کنید که چون تنها یک نفر محکوم به مرگ است بنابراین از دو نفر دیگر یعنی رضا و بهرام بالاخره یکی آزاد می‌شود). لذا احمد از زندانیان خواهش می‌کند که به او بگوید از دو نفر دیگر کدام یک آزاد می‌شوند. زندانیان از دادن پاسخ امتناع کرده به او می‌گویند که دادن پاسخ هم ارزش افزایش محکومیت او از $\frac{1}{3}$ به $\frac{1}{2}$ است، بنابراین مایل نیست موجب ناراحتی بیشتر او شود. این موضوع به نظر احمد عجیب می‌آید و به طور شهودی نیز قبول آن برایش مشکل است. از خود سؤال می‌کند پاسخ زندانیان اطلاع جدیدی به او نمی‌دهد، پس چرا باید این پاسخ احتمال محکومیت او را افزایش دهد؟ احمد از پیش می‌داند که یکی از دو نفر آزاد می‌شوند. بنابراین اطلاع از نام کسی که آزاد می‌شود نباید احتمال محکومیت او را تغییر دهد.

با استفاده از قضیه بیز به سادگی معلوم می‌شود که حتی اگر زندانیان نام یکی از آنها را که آزاد می‌شود به احمد بگویند باز هم احتمال محکوم شدن احمد همان $\frac{1}{3}$ است. فرض کنید A ، B ، و R به ترتیب پیشامد محکوم شدن احمد، بهرام، و رضا، و Z این پیشامد باشد که زندانیان مثلاً بگویند «رضا آزاد می‌شود». داریم:

$$\begin{aligned} P(A|z) &= \frac{P(z|A)P(A)}{P(z|A)P(A) + P(z|B)P(B) + P(z|R)P(R)} \\ &= \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

* دکتر غلامحسین شاهکار، گروه آمار، دانشگاه فردوسی مشهد

در پارادوکس زندانبان و جواب آن زیاد بحث شده است، اما علیرغم همه این بحث و جدلها وقتی مسأله بالا در مجله‌ای^۱ مطرح شد و نویسنده مقاله ازو و ایفل^۲ جواب درست مسأله را بازگو کرد به شدت مورد انتقاد و مواخذه سه ریاضیدان قرار گرفت. در شماره ۱۷ فوریه سال ۱۹۹۱ همان مجله نویسنده مقاله می‌نویسد تا این تاریخ نزدیک به ۲۰۰۰ نامه در مورد این مطلب دریافت کرده است که ۹۲٪ کل خوانندگان و ۶۵٪ آنهایی که تحصیلات دانشگاهی داشته‌اند نظری بر خلاف نظر او عنوان کرده‌اند. این مطالب ما را به یاد سخنان حکیمانه دموراور (مقاله نظریه پیشامدهای تصادفی) می‌اندازد. او می‌گوید، بعضی مسائل پیشامدهای تصادفی ظاهر بسیار ساده‌ای دارند که ممکن است ذهن به آسانی آنها را باور کند. اینها زیاد نیستند و با عقل سلیم می‌توان به اشکال آنها واقف شد. به نظر می‌رسد که طرح مسائلی از این قبیل که تفاوت میان واقعیتها را آنچه به نظر موجه می‌آیند روشن می‌کند در تعقل خوب مفید باشند.

نفر دیگر از $\frac{1}{3}$ به $\frac{2}{3}$ تغییر می‌کند. شاید دلیل قاطعی که می‌تواند موضوع را روشن کند توجه به تفاوت میان مقادیر $P(j|A)$ و $P(j|B)$ باشد که در فرمول بالا ملاحظه شد [$P(j|B) = 1$ و $P(j|A) = \frac{2}{3}$]. بازیکنان بازی بریج این را «اصل مقید» می‌گویند. بنابه اصل بیان مقید از اظهار نظر طرف مقابل هیچگونه اطلاع مفیدی به دست نمی‌آید. به وضوح احتمال بیان مقید بیش از احتمال بیان آزاد است، و اشتباه همه آنهایی که سعی در حل چنین مسائلی به طور شهودی دارند این است که این نکته را در نظر نمی‌گیرند. در پارادوکس زندانبان وقتی قرار است بهرام محکوم شود احتمال اینکه زندانبان بگوید «رضا آزاد می‌شود» دو برابر بیشتر از وقتی است که قرار است احمد محکوم شود. (قید در بیان زندانبان این است که وقتی قرار است بهرام محکوم شود ناچار است بگوید «رضا» و آزادی بیان زندانبان در این است که وقتی قرار است احمد محکوم شود می‌تواند بگوید «بهرام» یا «رضا».)

مراجع

- [1] Zweifel, Mathematics Magazine page 156 issue of June 1986.
- [2] Parade Magazine, September 9, 1990.
- [3] Parade Magazine, December 2, 1990.
- [4] Parade Magazine, February 17, 1991.