تذکری دربارهٔ کوتاهترین فاصلهٔ اطمینان برای میانگین یک جامعهٔ نرمال

رابرت بارتوزینسکی
وای چن
ترجمهٔ اعظم نجف کوچک*

۱ مقدمه

در نظریهٔ برآورد، کوتاهترین فاصله اطمینان ۹۵٪ برای میانگین یک توزیع نرمال با واریانس معلوم $\sigma^۲$ به صورت زیر است:

$$\bar{X} \pm ۱٫۹۶\sigma/\sqrt{n} \qquad (۱)$$

(مثلاً نگاه کنید به لیمن [۱]). دکتر جونز[1] از فارغ‌التحصیلان اخیر گروه آمار شکّاکیون[2]، فاصلهٔ اطمینانی حتی کوتاهتر از فاصله (۱) به دست آورده است. ابتدا او فاصله (۱) را محاسبه می‌کند. سپس وانمود می‌کند که σ مجهول است و فاصله اطمینان زیر را محاسبه می‌کند.

$$\bar{X} \pm tS/\sqrt{n-۱} \qquad (۲)$$

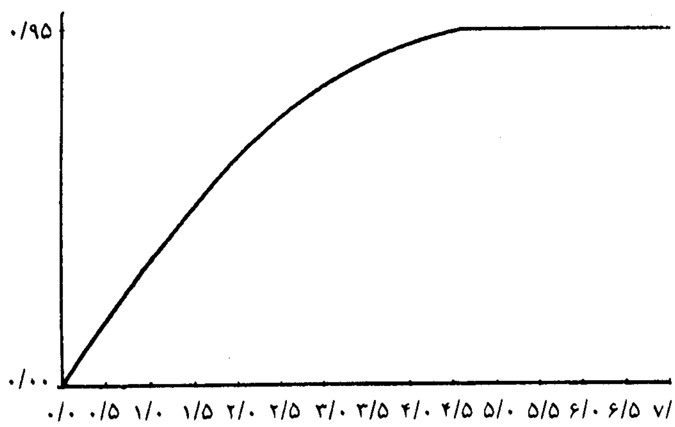
که در آن $nS^۲ = \sum_{i=۱}^{n}(X_i - \bar{X})^۲$ و $t = t_{۰٫۹۷۵}^{(n-۱)}$ صدک ۹۷٫۵-ام توزیع tی استودنتی با $n-۱$ درجه آزادی است. حال او از بین فاصله اطمینان‌های به دست آمده از رابطه‌های (۱) و (۲) آن فاصله‌ای را انتخاب می‌نماید که کوتاهتر است.

واضح است که طول فاصله اطمینان دکتر جونز کمتر از یا مساوی طول فاصله (۱) است. از طرف دیگر هر دو فاصلهٔ (۱) و (۲) احتمال پوشش ۰٫۹۵ دارند. بنابراین دکتر جونز ادعا می‌کند که همین حکم دربارهٔ فاصلهٔ اطمینان او نیز صادق است.

آیا دکتر جونز یک کشف آماری مهم کرده است؟

این سئوال، به علاوه چند سئوال دیگر که جنبهٔ فنی بیشتری دارند جزو سئوالات به اصطلاح امتحان استنباط بخش آمار دانشگاه ایالتی اوهایو در سال ۱۹۸۷ آمده بود.

ما نمی‌توانیم جزئیات پاسخ دانشجویان را برملا کنیم. اما این سئوال صرفاً جنبهٔ کنجکاوی ندارد. حتی آماردانان با تجربه نیز برای لحظاتی از این استدلال دکتر جونز سر در گم شده‌اند. نکته اساسی این است که گرچه احتمال $P(|\bar{X} - \mu| \leq tS/\sqrt{(n-۱)})$ برابر ۰٫۹۵ است اما احتمال شرطی $P(|\bar{X} - \mu| \leq tS/\sqrt{(n-۱)}|S = s)$ نسبت به s ثابت نیست. وقتی $tS/\sqrt{(n-۱)} < ۱٫۹۶\sigma/\sqrt{n}$، احتمال شرطی $P(|\bar{X} - \mu| \leq tS/\sqrt{(n-۱)}|S = s)$ کمتر از ۰٫۹۵ است.



در شکل ۱ نمودار احتمال پوشش فاصلهٔ اطمینان دکتر جونز را به عنوان تابعی از s برای $n = ۲۱$ و $\sigma^۲ = ۲۵$ رسم کرده‌ایم. بنابراین با اینکه امید ریاضی طول فاصلهٔ اطمینان دکتر جونز کمتر از $۲ \times ۱٫۹۶\sigma/\sqrt{n}$ است، احتمال پوشش کمتر از ۰٫۹۵ است. مختصراً محاسبات مربوط به امید ریاضی طول و احتمال پوشش فاصله اطمینان دکتر جونز را شرح می‌دهیم.

*) عضو هیأت علمی گروه آمار، دانشگاه شهید چمران اهواز

1) Jones 2) Department of Dubious Statistics

[Downloaded from andisheyeamari.irstat.ir on 2025-05-17]

۲ امید ریاضی طول

طول فاصله اطمینان جدید تابعی از S و بنابراین یک متغیر تصادفی است. برای محاسبه امید ریا ضی طول فرض کنید $f_{n-۱}$ تابع چگالی یک متغیر تصادفی خی دو با $n-۱$ درجه آزادی باشد. در این صورت

$$
\begin{aligned}
&E(|\text{فاصلهٔ اطمینان دکتر جونز}|)\\
&=\int_{\{t^۲s^۲/(n-۱)\geq(۱{,}۹۶\sigma)^۲/n\}} ۲\times ۱{,}۹۶\sigma/\sqrt{n}\times f_{n-۱}(\frac{ns^۲}{\sigma^۲})d(\frac{ns^۲}{\sigma^۲})\\
&+\int_{\{t^۲s^۲/(n-۱)<(۱{,}۹۶\sigma)^۲/n\}} ۲\times \frac{ts}{\sqrt{n-۱}}\times f_{n-۱}(\frac{ns^۲}{\sigma^۲})d(\frac{ns^۲}{\sigma^۲}) \qquad (۳)\\
&=۲\times ۱{,}۹۶\sigma/\sqrt{n}\times P(nS^۲/\sigma^۲\geq(n-۱)(۱{,}۹۶/t)^۲)\\
&+۲\frac{۱}{\sqrt{(n-۱)}}\int_{\{(\frac{ns}{\sigma})^۲<(n-۱)(\frac{۱{,}۹۶}{t})^۲\}} s\times f_{n-۱}(\frac{ns^۲}{\sigma^۲})d(\frac{ns^۲}{\sigma^۲}) \qquad (۴)
\end{aligned}
$$

جملهٔ اول رابطهٔ (۴) عبارت است از

$$(۲\times ۱{,}۹۶\sigma/\sqrt{n})P(\mathcal{X}^۲_{n-۱}\geq(n-۱)(\frac{۱{,}۹۶}{t})^۲. \qquad (۵)$$

با تغییر متغیر، جملهٔ دوّم (۴) به صورت زیر درمی‌آید:

$$
\begin{aligned}
&\frac{۲t}{\sqrt{n(n-۱)}}\int_{۰}^{(n-۱)(۱{,}۹۶/t)^۲}\sigma\sqrt{y}f_{(n-۱)}(y)dy=۲t\sigma\sqrt{\frac{۲}{n(n-۱)}}\\
&\times\frac{\Gamma(n/۲)}{\Gamma((n-۱)/۲)}\times P(\mathcal{X}^۲_n\leq(n-۱)(۱{,}۹۶/t)^۲). \qquad (۶)
\end{aligned}
$$

بنابراین برای محاسبهٔ امید ریاضی طول فاصلهٔ اطمینان دکتر جونز تنها به جدول خی دو نیاز خواهیم داشت. برای مثال اگر $n=۲۱$ و $\sigma^۲=۲۵$، آنگاه با استفاده از رابطه‌های (۵) و (۶) داریم:

$$E(|\text{فاصلهٔ اطمینان دکتر جونز}|)=۲{,}۶۱+۱{,}۴۶=۴{,}۰۹$$

در حالی که طول فاصلهٔ اطمینان استاندارد (۱) در این حالت عبارت است از ۴٫۲۸

۳ احتمال پوشش

احتمال پوشش عبارت است از

$$
\begin{aligned}
&P(\text{پوشش})=\\
&P(|\bar{X}-\mu|\leq ۱{,}۹۶\sigma/\sqrt{n};\,۱{,}۹۶\sigma/\sqrt{n}\leq tS/\sqrt{(n-۱)})\\
&+P(|\bar{X}-\mu|\leq\frac{tS}{\sqrt{(n-۱)}};\,۱{,}۹۶\sigma/\sqrt{n}>tS/\sqrt{(n-۱)})
\end{aligned}
$$

حال با شرطی کردن روی متغیر S و با استفاده از این حقیقت که X و S از یکدیگر مستقل‌اند، داریم:

$$
\begin{aligned}
&P(\text{پوشش})=\\
&=\int_{\{(۱{,}۹۶\sigma)^۲/n\leq t^۲s^۲/(n-۱)\}}P(|\bar{X}-\mu|\leq ۱{,}۹۶\sigma/\sqrt{n}|S=s)f_{n-۱}(\frac{ns^۲}{\sigma^۲})d(\frac{ns^۲}{\sigma^۲}) \qquad (۷)\\
&+\int_{\{(۱{,}۹۶/\sigma)^۲/n>t^۲s^۲/(n-۱)\}}P(|\bar{X}-\mu|\leq\frac{ts}{\sqrt{(n-۱)}}|S=s)f_{n-۱}(\frac{ns^۲}{\sigma^۲})d(\frac{ns^۲}{\sigma^۲})\\
&=۰{,}۹۵P(nS^۲/\sigma^۲\geq(n-۱)(۱{,}۹۶/t)^۲) \qquad (۸)\\
&+\int_{\{ns^۲/\sigma^۲<(n-۱)(۱{,}۹۶/t)^۲\}}P(|\bar{X}-\mu|\leq ts/\sqrt{n}-۱)f_{n-۱}(\frac{ns^۲}{\sigma^۲})d(\frac{ns^۲}{\sigma^۲})
\end{aligned}
$$

اولین جملهٔ رابطهٔ (۸) برابر است با $۰{,}۹۵P(\mathcal{X}^۲_{n-۱}\geq d)$ که در آن $d=(n-۱)(۱{,}۹۶/t)^۲$. دومین جملهٔ (۸)، پس از تغییر متغیر، به صورت زیر درمی‌آید:

$$
\begin{aligned}
&\int_{y=۰}^{d}P(|\bar{X}-\mu|\leq t\sigma\sqrt{y/(n^۲-n)})f_{n-۱}(y)dy\\
&=\int_{y=۰}^{d}(۲\Phi(t\sqrt{y/(n-۱)})-۱)f_{n-۱}(y)dy,
\end{aligned}
$$

که در آن Φ تابع توزیع تجمعی توزیع نرمال استاندارد است. بنابراین رابطهٔ (۸) را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$
\begin{aligned}
&P(\text{پوشش})\\
&=۰{,}۹۵-۱{,}۹۵P(\mathcal{X}^۲_{n-۱}\leq d)+۲\int_{۰}^{d}[\Phi(t\sqrt{y/n-۱})]f_{n-۱}(y)dy \qquad (۹)
\end{aligned}
$$

که می‌توان آن را به صورت عددی محاسبه کرد. برای $n=۲۱$ و $\sigma^۲=۲۵$ احتمال پوشش ۰٫۹۳۵۸ است. توجه کنید که هر زمان $y<d=(n-۱)(۱{,}۹۶/t)^۲$ آنگاه $\Phi(t\sqrt{y/(n-۱)})<\Phi(۱{,}۹۶)=۰{,}۹۷۵$. از رابطهٔ (۹)، به دست می‌آوریم:

$$
\begin{aligned}
&P(\text{پوشش})\\
&<۰{,}۹۵-۱{,}۹۵P(\mathcal{X}^۲_{n-۱}\leq d)+۲\int_{y=۰}^{d}۰{,}۹۷۵f_{n-۱}(y)dy\\
&=۰{,}۹۵-۱{,}۹۵P(\mathcal{X}^۲_{n-۱}\leq d)+۲(۰{,}۹۷۵)P(\mathcal{X}^۲_{n-۱}\leq d)\\
&=۰{,}۹۵ \qquad (۱۰)
\end{aligned}
$$

و بنابراین احتمال پوشش فاصله اطمینان دکتر جونز همان طور که گفته شد، کمتر از ۰٫۹۵ است.

مراجع

اصل این مقاله با عنوان
A Remark on the Shortest Interval of a Normal Mean
نوشتهٔ **Robert Bartoszyński and Wai Chan**
در نشریهٔ **The American Mathematical Monthly, May, 1990**
چاپ شده است.

[1] E. L. Lehmann, *Testing Statistical Hypotheses,* Wiley, New York, 1959.

[Downloaded from andisheyeamari.irstat.ir on 2025-05-17]