

نابرابری کرامر - رأو در آمار بیز یا نابرابری ون - تریز

مینا توحیدی* و جواد بهبودیان†

$$\int \dots \int \hat{\theta}(x_1, \dots, x_n) \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \prod_{i=1}^n f(x_i | \theta) \right] dx_1 \dots dx_n$$

آنگاه نابرابری زیر (نابرابری کرامر - رأو) برقرار است:

$$\text{Var}_\theta(\hat{\theta}) \geq \frac{[1 + b'(\theta)]}{n I_X(\theta)}$$

$$(b) \text{ اربی براورده } \hat{\theta} \text{ برای پارامتر } \theta \text{ است.}$$

در آمار کلاسیک، واریانس براورده‌ها مورد مقایسه قرار می‌گیرند ولی در آمار بیز، براورده‌ها به وسیله مخاطره - بیز آنها با هم مقایسه می‌شوند. ما در این مقاله یک کران پایین برای مخاطره بیز براورده‌ها پیدا می‌کنیم. همچنین باید توجه داشت که بررسی شرایط لازم برای برقرار نابرابری کرامر - رأو، در اکثر موارد دشوار است و اگر هم این شرایط برقرار شوند، تنها براوردهایی مورد مقایسه قرار می‌گیرند که در شرط (د) صدق کنند. اما نابرابریهایی که در این مقاله ارائه خواهد شد، دارای چنین مشکلاتی نیست. قضیه اصلی این مقاله براساس مرجع [۱] است که با روشی ساده ثابت شده و در مثال به عنوان کاربرد آن ارائه گردیده است.

۲ نابرابری کرامر - رأو در آمار بیز و اثبات آن

در این بخش، با تعریف یکتابع توزیع احتمال روی فضای پارامتری A ، به نام توزیع پیشین متغیر تصادفی Θ یک کران پایین برای مخاطره بیز براورده‌ها ارائه می‌دهیم.

چکیده

در این مقاله نخست نابرابری کرامر - رأو در آمار بیز مورد تجزیه و تحلیل قرار داده و یک کران پایین برای مخاطره بیز براورده‌ها پارامتر مجھول در یک توزیع آماری ارائه می‌دهیم. شرایط برقراری نابرابری اخیر را با نابرابری کرامر - رأو مقایسه می‌کنیم و در پایان مثالهایی می‌آوریم و نقش براورده بیز را در نابرابری نامبرده یادآور می‌شویم.

۱ پیشگفتار

اکثر کتابهای آماری، نابرابری کرامر - رأو را معرفی کرده نشان داده‌اند که این نابرابری در نظریه آمار از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. شما نیز با این نابرابری آشنایی دارید اما برای یادآوری یک بار دیگر به آن اشاره می‌کنیم. فرض کنید X_1, \dots, X_n نمونه‌ای تصادفی از متغیر تصادفی X ، با چگالی $f(x|\theta)$ و $\theta \in A$ باشد و فضای پارامتری A بازمای روى اعداد حقیقی تشکیل دهد. اگر شرایط زیر را داشته باشیم:

الف - برای تمام مقادیر $A \in \theta$, $\frac{\partial f(x|\theta)}{\partial \theta}$ موجود باشد؛

$$b - E_\theta \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(X|\theta) \right] = 0$$

$$c - E_\theta \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(X|\theta) \right] I_X(\theta) = E_\theta \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(X|\theta) \right]$$

د - برای (X_1, \dots, X_n) به عنوان یک براورده پارامتر $\hat{\theta}$ ، تساوی زیر برقرار باشد:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \int \dots \int \hat{\theta}(x_1, \dots, x_n) \prod_{i=1}^n f(x_i | \theta) dx_1 \dots dx_n =$$

†) دکتر جواد بهبودیان، استاد آمار، دانشگاه شیراز

* خانم مینا توحیدی، دانشجوی کارشناسی ارشد آمار، دانشگاه شیراز

$$\begin{aligned} 1 &= \iint F(x, \theta) G(x, \theta) d\theta dx \\ &= [\iint F(x, \theta) G(x, \theta) d\theta dx]^r \\ &\leq \iint [\hat{\theta}(x) - \theta]^r f(x|\theta) \pi(\theta) d\theta dx \\ &\times \iint [\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(x|\theta) \pi(\theta)]^r f(x|\theta) \pi(\theta) d\theta dx \\ \text{با توجه به اینکه } E_\theta[\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(x|\theta)] &= 0, \text{ داریم} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\iint [\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(x|\theta)] [\frac{\partial}{\partial \theta} \ln \pi(\theta)] f(x|\theta) \pi(\theta) d\theta dx \\ &= \int [\int [\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(x|\theta)] f(x|\theta) dx] [\frac{\partial}{\partial \theta} \ln \pi(\theta)] \pi(\theta) d\theta = 0. \end{aligned}$$

اینک می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} &\iint [\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(x|\theta) \pi(\theta)]^r f(x|\theta) \pi(\theta) d\theta dx \\ &= \iint [\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(x|\theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} \ln \pi(\theta)]^r f(x|\theta) \pi(\theta) d\theta dx \\ &= \iint [\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(x|\theta)]^r f(x|\theta) \pi(\theta) d\theta dx \\ &+ \iint [\frac{\partial}{\partial \theta} \ln \pi(\theta)]^r f(x|\theta) \pi(\theta) d\theta dx \\ &= \int \left\{ \int [\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(x|\theta)]^r f(x|\theta) dx \right\} \pi(\theta) d\theta + \\ &\int [\int f(x|\theta) dx] [\frac{\partial}{\partial \theta} \ln \pi(\theta)]^r \pi(\theta) d\theta \\ &= E[I_X(\Theta)] + J(\pi) \end{aligned}$$

در نتیجه

$$r(\hat{\theta}) = E[\hat{\theta}(X) - \Theta]^r \geq \frac{1}{E[I_X(\Theta)] + J(\pi)}$$

لازم است بیفزاییم که:

۱) نابرابری بالا را، نابرابری ون - تریز (Van-Trees) هم می‌نامند. توجه کنید که در این نابرابری $\hat{\theta}$ هر برآوردهایی برای θ است و نیازی به برقراری شرط (د) در مورد $\hat{\theta}$ نیست. البته طبق شرایط قضیه $\hat{\theta}$ نمی‌تواند برآوردهایی بیز ناواریب باشد [۲ صفحه ۲۴۴].

۲) اگر $(X) \hat{\psi}$ برآوردهایی برای تابع $(\theta) \psi$ باشد، نابرابری زیر به دست می‌آید:

$$E[\hat{\psi}(X) - \psi(\Theta)]^r \geq \frac{E[\psi'(\Theta)]^r}{E[I_X(\Theta)] + J(\pi)}$$

۳) حالت تساوی در نابرابری ون - تریز هنگامی برقرار می‌شود که در نابرابری کشی - شوارتس بالا تساوی برقرار شود، یعنی داشته باشیم

$$C(\hat{\theta}(x) - \theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(x|\theta) \pi(\theta)$$

قضیه: فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از X ، با چگالی $f(x|\theta)$ و $\theta \in A$ بوده و $\pi(\theta)$ یک تابع چگالی احتمال روی فضای پارامتری $A = (\underline{\theta}, \bar{\theta})$ باشد، به طوری که π در نقاط ابتدا و انتهای بازه A همگرا به صفر گردد. با تعریف دو تابع زیر:

$$I_X(\theta) = E_\theta \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(X|\theta) \right\}^r,$$

$$J(\pi) = E \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \ln \pi(\theta) \right\}^r$$

و فرض $E_\theta[\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(X|\theta)] = 0$ داریم:مخاطره بیز $\hat{\theta} = r(\hat{\theta})$

$$= E[\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) - \Theta]^r \geq \frac{1}{nE[T_X(\Theta)] + J(\pi)}$$

امید ریاضی در این نابرابری نسبت به توزیع توأم (X, Θ) است. $I_X(\theta)$ اطلاع فیشر برای θ در X و $J(\pi)$ اطلاع فیشر برای θ در چگالی پیشین π نامیده می‌شود.

اثبات: قضیه را برای $n = 1$ اثبات می‌کنیم. روش اثبات برای $n > 1$ مانند حالت $n = 1$ است. نخست تساوی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} &\iint [\hat{\theta}(x) - \theta] [\frac{\partial}{\partial \theta} f(x|\theta) \pi(\theta)] d\theta dx = \\ &\int \hat{\theta}(x) \left\{ \int [\frac{\partial}{\partial \theta} f(x|\theta) \pi(\theta)] d\theta \right\} dx \\ &- \iint \theta [\frac{\partial}{\partial \theta} f(x|\theta) \pi(\theta)] d\theta dx \quad (1) \end{aligned}$$

حال توجه کنید که:

$$\int [\frac{\partial}{\partial \theta} f(x|\theta) \pi(\theta)] d\theta = f(x|\theta) \pi(\theta)|_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} = 0. \quad (2)$$

از طرفی، با استفاده از انتگرال جزء به جزء خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \int \theta [\frac{\partial}{\partial \theta} f(x|\theta) \pi(\theta)] d\theta &= \theta f(x|\theta) \pi(\theta)|_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} - \int f(x|\theta) \pi(\theta) d\theta \\ &= - \int f(x|\theta) \pi(\theta) d\theta \quad (3) \end{aligned}$$

با بهکارگیری (2) و (3) در رابطه (1)، داریم:

$$\begin{aligned} &\iint [\hat{\theta}(x) - \theta] [\frac{\partial}{\partial \theta} f(x|\theta) \pi(\theta)] d\theta dx = \\ &\iint f(x|\theta) \pi(\theta) d\theta dx = 1 \end{aligned}$$

حال با استفاده از نابرابری کوشی - شوارتس برحسب انتگرال دوگانه با دو تابع زیر: $G(x, \theta) = [\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(x|\theta) \pi(\theta)] \sqrt{f(x|\theta) \pi(\theta)}$ و $F(x, \theta) = [\hat{\theta}(x) - \theta] \sqrt{f(x|\theta) \pi(\theta)}$ رابطه زیر بدست می‌آید:

$$E(\tau) = \frac{g}{\alpha}, \quad E(\tau^*) = \frac{g(g+1)}{\alpha^*}$$

$$E\left(\frac{1}{\tau}\right) = \frac{\alpha}{g-1}, \quad E\left(\frac{1}{\tau^*}\right) = \frac{\alpha^*}{(g-1)(g-2)}, \quad g > 2$$

در نتیجه

$$I_x(\sigma^*) = \frac{1}{2\sigma^*}, \quad E[I_x(\sigma^*)] = 2E(\tau^*) = \frac{2g(g+1)}{\alpha^*}$$

$$J(x) = E\left[-\frac{g-1}{\sigma^*} + \frac{\alpha}{2\sigma^*}\right]^2 = 4E[-\tau(g-1) + \alpha\tau^*]^2$$

پس از محاسبات لازم، کران پایین نابرابری ون - تریز برابر خواهد بود با

$$\frac{\alpha^*}{2g(g+1)(n+2g+2)}$$

از طرفی برآورده کننده بیز برای $\frac{1}{\tau}$ $= \sigma^*$ برابر است با

$$\delta_B(\underline{x}) = \frac{\alpha + Y}{n + 2g - 2}$$

با فرض $Y = \sum_{i=1}^n X_i$. ضمناً تابع مخاطره δ_B برابر است با

$$R(\sigma^*, \delta_B) = \frac{2n\sigma^*}{(n+2g-2)^2} + \frac{(\alpha - (2g-2)\sigma^*)^2}{(n+2g-2)^2}$$

در نتیجه

$$\tau(\delta_B) = \frac{n}{2(n+2g-2)} E\left(\frac{1}{\tau^*}\right) + \frac{(g-1)^2}{(n+2g-2)^2} \text{var}\left(\frac{1}{\tau}\right)$$

$$= \frac{n}{2(n+2g-2)^2} \left(\frac{\alpha^*}{(g-1)(g-2)} \right)$$

$$+ \frac{(g-1)^2}{(n+2g-2)^2} \left(\frac{\alpha^*}{(g-1)^2(g-2)} \right)$$

$$= \frac{\alpha^*}{2(g-1)(g-2)(n+2g-2)}$$

ملحظه می شود که در این مثال نابرابری ون - تریز یک نابرابری اکید است.
زیرا چگالی پسین نرمال نیست.

در پایان دو پرسش را مطرح می کنیم:

- (1) آیا می توان مثالی مناسب پیدا کرد که شرط (d) را نداشته باشد، یعنی نابرابری کرامر - رانو برایش صادق نباشد، اما نابرابری ون - تریز برابر آن برقرار گردد؟ ظاهراً پیدا کردن چنین مثالی آسان نیست.
- (2) آیا در صورتی که $\pi(\theta)$ چگالی ناسره (مانند $\pi(\theta) = 1$) باشد، نابرابری ون - تریز چه موقع می تواند برقرار گردد؟ ملاحظه می شود که در مثال ۱ با فرض $\infty = \tau^*$ (پیشین یکنواخت ناسره) نابرابری ون - تریز برقرار است، ولی در مثال ۲ با فرض $1 = \alpha$ و $g = 0$ (پیشین ناسره x/e^{-x}) نابرابری برقرار نمی شود.

که در آن C عددی ثابت است. این برابری بدین معناست که چگالی پسین به صورت زیر است:

$$\pi(\theta|x) \propto f(x|\theta)\pi(\theta) = e^{-\frac{1}{2}C(\hat{\theta}(x)-\theta)^2}$$

به سخنی دیگر چگالی پسین، به شکل چگالی توزیع نرمال با میانگین $\hat{\theta}(x)$ است. پس به طور کلی می توان گفت تنها هنگامی نابرابری ون - تریز تبدیل به تساوی می شود که چگالی پسین نرمال باشد و داشته باشیم $\hat{\theta}(x) = E[\Theta|x]$ یعنی $\hat{\theta}(x)$ برآورده کننده بیز با تابع زیان درجه دو باشد.

۳ دو مثال برای توزیع نرمال

مثال ۱ - فرض کنید $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ نمونه ای تصادفی از $N(\theta, \sigma^2)$ با σ^2 معلوم باشد. برای برآورد پارامتر θ وقتی که با تابع زیان درجه دو کار می کنیم، در آمار بیز معمولاً فرض می شود که پارامتر θ خود یک متغیر تصادفی با توزیع $N(\mu, \tau^2)$ است. واضح است که در این صورت،

$$\text{داریم: } I_x(\theta) = \frac{1}{\sigma^2}, \quad J(\tau) = \frac{1}{\tau^2}$$

در نتیجه کران پایین نابرابری ون - تریز برابر است با

$$\frac{1}{nE[I_x(\Theta)] + J(\pi)} = \frac{1}{\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\tau^2}}$$

همچنین می دانیم که [۲]، یک برآورده کننده بیز برای پارامتر θ عبارت است از:

$$\delta_B(\underline{x}) = \left(\frac{n/\sigma^2}{n/\sigma^2 + 1/\tau^2} \right) \bar{x} + \left(\frac{1/\tau^2}{n/\sigma^2 + 1/\tau^2} \right)$$

با مخاطره بیز:

$$r(\delta_B) = \frac{1}{\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\tau^2}}$$

ملحظه می شود که در این مثال مخاطره بیز با کران پایین نابرابری

ون - تریز برابر می شود، زیرا چگالی پسین، نرمال است و $E(\Theta|\underline{x}) = \delta_B(\underline{x})$.

مثال ۲ - فرض کنید $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ یک نمونه تصادفی از

توزیع (μ, σ^2) باشد. برای برآورد σ^2 ، وقتی با تابع زیان درجه دو کار

می کنیم [۲] با فرض اینکه $\frac{1}{\sigma^2} = \tau$ دارای توزیع گاما با پارامترهای g و $\frac{1}{\alpha}$

باشد، داریم:

قدرتانی: از پیشنهادهای داور محترم که برای بهبود مقاله سودمند بوده اند، سپاسگزاری می شود.

مراجع

- [1] Gill, R. D. & Levit, B. Y. (1995) Applications of the Van-Trees inequality. Bernoulli 1, 59-79.
- [2] Lehmann, E. L. (1983) Theory of Point Estimation. John Wiley & sons, New York.
- [3] Van Trees, H. L. (1968) Detection, Estimation and Modulation theory, Part 1. New York, Wiley.