

گام‌های ترتیبی یک ترکیبیات تحلیلی

رامین کاظمی^۱، الهه نادری^۲

تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۱۰/۶

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۲/۲

چکیده:

ترکیبیات تحلیلی تلاشی برای توانمند ساختن پیش‌بینی‌های کمی و ویژگی‌های ساختارهای ترکیبیاتی بزرگ است. این نظریه در دهه‌های اخیر به‌عنوان پایه‌ای برای تحلیل الگوریتم‌ها و مطالعه مدل‌های علمی در بسیاری از رشته‌ها شامل نظریه احتمال، فیزیک آماری، زیست‌شناسی محاسباتی و نظریه اطلاع ظاهر شده است. با یک ترکیب دقیق روش‌های ارزیابی نمادین، آنالیز مختلط، توابع مولد و تحلیل نقطه زینی، این نظریه برای مطالعه ساختارهای پایه‌ای نظیر جایگشت‌ها، دنباله‌ها، رشته‌ها، قدم زدن، مسیرها، درخت‌ها، گراف‌ها و نقشه‌ها به کار گرفته می‌شود. هدف این مقاله، معرفی گام‌های ترتیبی یک ترکیبیات تحلیلی است.

واژه‌های کلیدی: رده، تابع مولد، تبدیل ملین، تبدیل پوآسون، تحلیل نقطه زینی.

۱ مقدمه

(آ) نقطه a یک «تکینی برداشتنی» تابع f است اگر تابع مشتق‌پذیر مختلط g روی U وجود داشته باشد به‌طوری که برای هر z در $U - \{a\}$ داشته باشیم $f(z) = g(z)$.

(ب) نقطه a یک «قطب» تابع f است اگر تابع مشتق‌پذیر مختلط g روی U و یک عدد طبیعی n وجود داشته باشند به‌طوری که برای هر z در $U - \{a\}$ داشته باشیم

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^n}.$$

در واقع قطب، ساده‌ترین نوع تکینی است.

(پ) نقطه a یک «تکینی اساسی» تابع f است اگر نه تکینی برداشتنی باشد و نه یک قطب باشد.

اهمیت این نقاط در رویکرد ترکیبیاتی به اندازه‌ای است که تحلیلی موسوم به تحلیل تکینی بر اساس این نقاط پایه‌گذاری شده است. تابع تام (یا تابع انتگرال) تابعی مختلط‌مقدار است که روی کل صفحه مختلط، مشتق‌پذیر مختلط است. مثال‌های عمومی توابع تام، چندجمله‌ای‌ها، توابع نمایی و هر مجموع و حاصل ضربی از این توابع است. توابع برخه‌ریخت توسیعی از مفهوم تحلیلی بودن هستند و در رویکرد ترکیبیاتی یک مفهوم پایه‌ای محسوب می‌شوند. یک تابع برخه‌ریخت روی یک زیرمجموعه D باز از صفحه مختلط تابعی است که روی کل D به استثنای یک مجموعه از نقاط، مشتق‌پذیر مختلط است. این نقاط، قطب‌هایی

توابع تحلیلی، یک مفهوم ریاضی مقدماتی در تحلیل مجانبی است. در واقع این توابع به دو روش معادل، مشخص‌سازی می‌شوند: (آ) از طریق بسط سری‌های همگرا که توسط کوشی مطرح و سپس توسط وایرستراس گسترش داده شده است. (ب) به وسیله خاصیت‌های مشتق‌پذیری که توسط ریمان مطرح و توسط دیگران گسترش داده شده است.

رویکرد اول به‌طور مستقیم مرتبط با توابع مولد برای ارزیابی شیء‌های ترکیبیاتی است. تحلیلی بودن در یک نقطه مانند z قیده‌های سنگینی بر یک تابع تحمیل می‌کند. در واقع تحلیلی بودن در یک نقطه وجود همه مشتق‌های بالاتر در یک همسایگی این نقطه را ایجاب می‌کند [۴]. خارج قسمت دو تابع $f(z)$ و $g(z)$ ، $f(z)/g(z)$ ، در نقطه‌ای مانند a که در آن $g(a) = 0$ ، خاصیت تحلیلی خود را از دست می‌دهد. نقطه‌ای که به‌ازای آن تابع خاصیت تحلیلی خود را از دست می‌دهد یک تکینی تابع نامیده می‌شود. این نقاط برای مجانب‌های ضرایب نقش اساسی دارند. نقطه تکینی یک تابع، نقطه‌ای است که تابع در آن قابل تعریف نباشد یا باعث نقض یک خاصیت خوب آن مانند مشتق‌پذیری شود. فرض کنید U یک زیرمجموعه باز اعداد مختلط $\mathbb{C}$ ، a یک عضو U و f یک تابع مشتق‌پذیر مختلط روی $U - \{a\}$ باشد.

^۱گروه آمار دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)

^۲گروه آمار دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)

اشیاء گسسته سروکار دارند. یک سؤال اساسی در این خصوص، ارزیابی چنین اشیائی برای برخی پارامترهای مشخص است. تابعی که یک عدد صحیح نامفی به هر شیء ترکیبیاتی اختصاص می‌دهد، تابع اندازه نامیده می‌شود. یک رده ترکیبیاتی، یا به طور خلاصه یک رده، مجموعه‌ای متناهی یا شمارا با یک تابع اندازه تعریف شده روی آن است. اگر A یک رده باشد، اندازه یک عنصر α در A با $|\alpha|$ و در برخی موارد که بیان رده ترکیبیاتی ضروری به نظر می‌رسد، با $|\alpha|_A$ نمایش داده می‌شود. برای یک رده مفروض A ، همیشه فرض می‌کنیم که A_n مجموعه‌ای از اشیاء رده A است که از اندازه n برخوردار است. دنباله شمارشی یک رده ترکیبیاتی، دنباله‌ای از اعداد صحیح $\{A_n\}_{n \geq 0}$ است که در آن $A_n = \text{card}(A_n)$ ، تعداد اشیاء موجود در رده A است که از اندازه n برخوردار هستند. توابع مولد نه تنها یک ابزار مفید برای شمارش شیء‌های ترکیبیاتی هستند، بلکه یک شیء تحلیلی برای به دست آوردن مجانب‌ها نیز به حساب می‌آیند. توابع مولد می‌توانند برای پیوند دادن توزیع متغیرهای تصادفی‌ای که مرتبط با مسائل شمارش هستند، مورد استفاده قرار گیرند. در نتیجه این ارتباط، روش‌های مجانبی برای به دست آوردن قضیه‌های حدی احتمالاتی مانند قضیه حدی مرکزی به کار گرفته می‌شوند. همچنین توابع مولد معمولاً در یک معادله تابعی-بازگشتی صدق می‌کنند. به طور کلی‌تر، این توابع را می‌توان با حل یک معادله تابعی مرتبط کرد. این وضعیت به طور طبیعی در مسائل ترکیبیاتی با یک ساختار بازگشتی و به ویژه در مسائل شمارش درخت‌ها اتفاق می‌افتد؛ زیرا یک ساختار بازگشتی معمولاً قابل برگرداندن به یک معادله تابعی برای تابع مولد متناظر با آن است [۱]. بسیاری از اشیاء ترکیبیاتی کلاسیک به طور طبیعی با ساختارهای برچسب‌دار برای اجزایشان تعریف می‌شوند. به عنوان بارزترین مثال‌ها می‌توان از گراف‌ها یا درخت‌ها با گره‌های برچسب‌دار نام برد. در این حالت، هر کدام از گره‌ها با یک برچسب متمایز از سایر گره‌ها برچسب‌دار می‌شود.

تابع مولد وزنی به صورت

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{z^n}{w_n}$$

تعریف می‌شود که در آن w_n وزن را نشان می‌دهد. اگر $w_n = 1$ باشد تابع مولد، تابع مولد معمولی است که با ساختارهای بدون برچسب همخوان است. حالت $w_n = n!$ ، تابع مولد نمایی است. تابع مولد معمولی رده A دارای یک شکل ترکیبیاتی است که

برای تابع هستند. در بسیاری از موارد در رویکرد ترکیبیاتی با توابع برخه‌ریختی به شکل $(1-f(z))^{-1}$ مواجه هستیم، که در آن $f(z)$ تابعی تام است. در این مواقع نقطه تکین را تکین قطبی می‌نامند. در رویکرد ترکیبیاتی، یک تکین به نقطه‌ای اطلاق می‌شود که تابع، خاصیت تحلیلی خود را در آن از دست می‌دهد. یک تکین غالب، راست‌ترین این نقاط محسوب می‌شود. ثابت شده است که یک تابع با ضرایب مثبت که تام نیست همیشه دارای یک تکین حقیقی مثبت غالب است [۴]. در برخی موارد رفتار مجانبی ضرایب تابع به وسیله تکین غالب تعیین می‌شود. محاسبات انتگرالی برای توابع تحلیلی در نظریه اعداد مختلط یک فرق اساسی با آنچه در حوزه اعداد حقیقی است، دارد: انتگرال‌ها اساساً به طور مشخص، از مسیر انتگرال‌گیری مستقل هستند. به عبارت دیگر مقدار انتگرال با هر تغییر شکل پیوسته مسیر انتگرال‌گیری تغییر نمی‌کند به شرط این که تابع همچنان در مسیر جدید تحلیلی باقی بماند. یک مثال مقدماتی برای اثبات این حقیقت، قضیه مشهور مانده کوشی است. این استقلال، این امکان را ایجاد می‌کند که به خاصیت‌های تابع در یک نقطه و به طور دقیق‌تر به ضرایب بسطش در نقطه صفر و مانده‌اش در یک قطب توجه کنیم. نقاط تکین برای مجانب‌های ضرایب، نقاط کلیدی محسوب می‌شوند. در تحلیل تکین ثابت می‌شود که نقاط تکین یک تابع در ضرایب بسطش منعکس می‌شوند. در واقع، رفتار مجانبی ضرایب تابع (در نمایش سری آن) به وسیله نقاط تکین آن تعیین می‌شود.

۲ توابع مولد

توابع مولد یکی از مهم‌ترین ابزارها برای تحلیل الگوریتم‌ها و محاسبه تعداد طرق انجام یک کار به حساب می‌آیند. این تابع‌ها در ایجاد فرمول‌های دقیق و بازگشتی، متوسط‌گیری، محاسبه واریانس و هر خاصیت آماری دیگر، پیدا کردن بسط‌های مجانبی، نشان دادن تک‌مدی بودن و اثبات برابری‌های ترکیبیاتی مفید هستند [۴، ۱]. یک شیء گسسته، شیئی است که می‌توان آن را به طور متناهی به کمک قاعده‌های ساختاری بیان کرد. منظور از قاعده‌های ساختاری، مجموع ترکیبیاتی، حاصل ضرب دکارتی یا برچسب‌دار، دنباله‌ها، مجموعه‌ها و غیره است. مصادیق بارز شیء‌های ترکیبیاتی، کلمات (رشته‌ها و دنباله‌ها)، درخت‌ها، گراف‌ها، جایگشت‌ها و غیره هستند. روش‌های ترکیبیاتی با

به صورت

۳ روش‌های مجانبی

تبدیل ملین به برآوردهای مجانبی یک رده بزرگ از مجموع‌های ترکیبیاتی منجر می‌شود. اهمیت و کاربرد تحلیل تکینی در رویکرد ترکیبیاتی به‌ویژه در بررسی الگوریتم‌ها به اندازه‌ای است که قسمت اعظم هر نوشته منتشر شده در این رویکرد به این روش تحلیلی اختصاص داده می‌شود. برای تابع مولد

$$B(z) = \frac{1 - \sqrt{1-4z}}{2z},$$

ثابت می‌شود که

$$B_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

با توجه به فرمول استرلینگ، یعنی

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \quad n \rightarrow +\infty$$

می‌توان نتیجه گرفت که

$$B_n \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi}} n^{-\frac{3}{2}}.$$

اما بدیهی است که $B(z)$ دارای یک تکینی در نقطه $z = \frac{1}{4}$ است؛ زیرا در این نقطه مشتق‌های تابع به بی‌نهایت میل می‌کنند. این تکینی با نام «تکینی ریشه دوم» شناخته می‌شود. ثابت شده است که برای این نوع از تکینی، یک مجانب به صورت $\rho^{-n} n^{-\frac{3}{2}}$ برای ضرایب تابع وجود دارد که در آن ρ همان تکینی ریشه دوم است [۴]. بنا بر این بدون استفاده از فرمول استرلینگ و تنها به کمک نتایج ثابت‌شده در این خصوص می‌توان همان مجانب را نتیجه گرفت. لذا برای تقریب مجانبی ضرایب یک تابع مولد کافی است که به برآورد تابع مولد نزدیک تکینی آن توجه شود. عمومی‌ترین تبدیل در تحلیل الگوریتم‌ها، تبدیل ملین است. این تبدیل با تبدیل فوریه و تبدیل لاپلاس دوطرفه مرتبط است. البته این تبدیل دارای یک هسته چندجمله‌ای است. این تبدیل در دهه ۱۹۶۰ میلادی در حوزه ریاضیات گسسته معرفی شد. به هر حال مکتب فلاژوله استفاده از این تبدیل را برای حل مسائل پیچیده در تحلیل الگوریتم‌ها و تعداد طرق انجام یک کار در مسائل ترکیبیاتی توسعه داد. اخیراً از این تبدیل در نظریه اطلاع هم استفاده می‌شود [۶]. عمومی شدن این تبدیل به‌خاطر دو خاصیت مهم زیر است. نخست این که این تبدیل قادر به حل معادله‌های تابعی مشخصی است که در ادامه به آن اشاره می‌کنیم.

$$A(z) = \sum_{\alpha \in A} z^{|\alpha|}$$

نشان داده می‌شود. در این صورت، توان z ، اندازه را در تابع اندازه مشخص می‌کند. تابع مولد نمایی یک رده A دارای شکل ترکیبیاتی

$$A(z) = \sum_{\alpha \in A} \frac{z^{|\alpha|}}{|\alpha|!}$$

است. مانند تابع مولد معمولی در این جا نیز توان z ، اندازه را مشخص می‌کند.

قضیه‌ای اساسی در رویکرد ترکیبیاتی ثابت می‌کند که ساختارهای برچسب‌دار را می‌توان به توابع مولد نمایی برگرداند. این برگرداندن به توابع مولد نمایی به‌مراتب از برگرداندن ساختارهای بی‌برچسب به توابع مولد معمولی ساده‌تر است. به‌علاوه بسیاری از موارد ترکیبیاتی وجود دارند که برحسب ساختارهای برچسب‌دار قابل نمایش هستند [۴].

درخت دودویی و بسیاری دیگر از انواع درخت‌های ریشه‌دار دارای یک ساختار بازگشتی هستند. به‌طور دقیق‌تر می‌توان تعریف بازگشتی زیر را از درخت دودویی ارائه کرد:

بر اساس تعریف، یک درخت دودویی B یا تنها یک گره خارجی یا یک گره داخلی (ریشه) با دو زیردرختی است که مجدداً هر کدام یک درخت دودویی هستند. به عبارتی

$$B = \square + \circ \times B \times B,$$

که در آن $\square$ بیان‌کننده یک گره خارجی و $\circ$ یک گره داخلی است [۴]. این تفسیر بازگشتی از درخت دودویی، کلید تحلیل بسیاری از خاصیت‌های این درخت است (ارزیابی نمادین). در سایر درخت‌های تصادفی نیز تفسیرهای بازگشتی کارگشاست. با برگرداندن این رابطه بازگشتی برحسب تابع مولد معمولی این ساختار بی‌برچسب، داریم

$$B(z) = 1 + zB^2(z).$$

بنا بر این (دنباله‌های شمارشی اعداد صحیحی نامنفی هستند):

$$B(z) = \frac{1 - \sqrt{1-4z}}{2z} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} z^n.$$

در نتیجه تعداد درخت‌های دودویی با اندازه n برابر است با

$$B_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

این اعداد، اعداد کاتالان (ریاضی‌دان بلژیکی) نامیده می‌شوند.

همچنین خواهیم دید که این تبدیل، یک نگاشت مستقیم بین بسط‌های مجانبی یک تابع نزدیک صفر یا بی‌نهایت و مجموعهٔ تکنیکی‌هایش در صفحهٔ مختلط ایجاد می‌کند. خاصیت مجانبی دوم این که این تبدیل در تحلیل الگوریتم‌ها، نظریهٔ اطلاع، تعداد طرق انجام یک کار در مسائل ترکیبیاتی و در خیلی از کاربردهای ریاضیات گسسته باعث غنای تحلیل تکنیکی و پوآسونی‌سازی می‌شود.

تبدیل ملین را می‌توان با قرار دادن $x = e^t$ در تبدیل لاپلاس و قرار دادن $x = e^{i\xi}$ در تبدیل فوری به دست آورد. با این وصف کار کردن با این تبدیل از دو تبدیل دیگر در رویکرد ترکیبیاتی راحت‌تر خواهد بود. در بیشتر مواقع در تحلیل الگوریتم‌ها با یک معادلهٔ تابعی به شکل

$$f(x) = \alpha f(px) + \beta f(qx) + a(x),$$

مواجه می‌شویم که در آن α و β ثابت‌اند و $a(x)$ یک تابع معلوم است. یک نگاشت مستقیم بین بسط‌های مجانبی یک تابع نزدیک صفر یا بی‌نهایت و مجموعهٔ تکنیکی‌های تبدیل ملین‌اش در صفحهٔ مختلط وجود دارد. این خاصیت، یک نقش کلیدی در کاربردها و در خاصیت‌های مجانبی ایفا می‌کند.

در تحلیل الگوریتم‌ها، تابع $f(x)$ اغلب تابع مولد یک دنبالهٔ f_n است. با استفاده از خاصیت‌های مجانبی تبدیل ملین، قادر به پیدا کردن یک بسط مجانبی برای $f(x)$ هستیم، اما به یک ابزار برای بازیافت f_n نیازمندیم. این رویکرد با نام «رویکرد دومرحله‌ای» شناخته می‌شود. برای این منظور می‌توان از تحلیل تکنیکی استفاده کرد. راهی دیگر برای برون‌رفت از این مشکل، استفاده از رویکرد دیگری موسوم به «بازگشت از پوآسونی‌سازی» است.

تعریف ۱.۳. تبدیل ملین تابع f تعریف‌شده روی $\mathbb{R}_{>0}$ ، تابع مختلط $f^*(s)$ است که به صورت

$$f^*(s) = \int_0^\infty f(x)x^{s-1}dx, \quad s \in \mathbb{C}$$

تعریف می‌شود.

این تبدیل در خیلی از مواقع با $\mathcal{M}[f]$ یا $\mathcal{M}[f(x); s]$ نشان داده می‌شود. اهمیت این تبدیل در دو خاصیت زیر نمایان می‌شود:

(آ) نگاشت کردن بسط مجانبی یک تابع در صفر و بی‌نهایت به

تکنیکی‌های تبدیل،

(ب) فاکتورگیری مجموعه‌های همساز.

ترکیب این دو خاصیت، امکان تحلیل مجانبی مجموعه‌های پیچیده‌تر را در یک صورت خطی با مقیاس‌های مختلف ایجاد می‌کند. فرض کنید f تابعی انتگرال‌پذیر باشد که در دو شرط $(v < u)$

$$f(x) = O(x^u), \quad x \rightarrow 0^+$$

$$f(x) = O(x^v), \quad x \rightarrow +\infty$$

صدق می‌کند. این دو شرط، وجود تبدیل ملین را برای هر عدد مختلط s با $-u < \Re(s) < -v$ ، تضمین می‌کنند. گاهی از نماد $\langle -u, -v \rangle$ ، $s \in \langle -u, -v \rangle$ ، برای نمایش این نوار که نوار پایه‌ای نامیده می‌شود، استفاده می‌شود. چون تبدیل ملین حالت خاصی از تبدیل لاپلاس است، پس در این حالت نیز مانند تبدیل لاپلاس می‌توان معکوس تبدیل را ارائه کرد. اگر تابع $f(x)$ روی بازهٔ $(0, \infty)$ پیوسته باشد، خواهیم داشت

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f^*(s)x^{-s}ds,$$

که در آن $a < c < b$ و $\langle a, b \rangle$ نوار پایه‌ای $f^*(s)$ است. فرض کنید $f^*(s)$ تبدیل ملین تابع $f(x)$ باشد و $g^*(s)$ تبدیل ملین تابع $g(x)$ باشد. در این صورت،

$$\mathcal{M}[f(x)g(x), s] = \frac{1}{\sqrt{\pi}i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f^*(t)g^*(s-t)dt,$$

که در آن انتگرال‌گیری روی خط عمودی $\Re(s) = c$ که به طور کامل درون ناحیهٔ همگرایی تابع f^* است، صورت می‌گیرد.

۱.۳ پوآسونی‌سازی

در محاسبهٔ تعداد طرق انجام یک کار و در تحلیل الگوریتم‌ها اغلب یک نسخهٔ پوآسون از مسئله (که آن را پوآسونی‌سازی می‌نامیم) برای حل آن راحت‌تر از حل مستقیم آن است. گاهی این فن تحت عنوان مدل برنولی نیز شناخته می‌شود. در حقیقت، پوآسونی‌سازی فنی است که مسئله را به سمت یک فرایند پوآسون هدایت می‌کند. تبدیل پوآسون، دنبالهٔ توصیف‌کنندهٔ مدل برنولی را درون تابع مولد یک متغیر مختلط توصیف‌کنندهٔ مدل پوآسون نگاشت می‌کند. هر گاه مسئله در قلمرو پوآسون حل شود، باید برای رسیدن به نتیجهٔ اصلی، آن را از پوآسونی‌سازی درآورد. این فن به‌ویژه به‌عنوان یک فن

فرض کنید X_N مشخصه تعریف شده در مدل پواسون باشد که با جایگزینی متغیر پواسون N به جای n به دست می آید. در این صورت بنا بر تعریف،

$$\Delta(z) = \sum_{n \geq 0} \mathbb{E}(X_N | N = n) e^{-z} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} \mathbb{E}(X_n) e^{-z} \frac{z^n}{n!},$$

که در آن $\mathbb{E}$ بیان کننده عملگر امید ریاضی است. فرض می شود مجموع بالا برای هر z ، به طور مطلق همگرا است یا به طور معادل $\Delta(z)$ یک تابع تام از متغیر مختلط z است. با این وصف، تبدیل پواسون برای هر عدد مختلط z تعریف می شود.

حال g_n از رابطه

$$g_n = \frac{n!}{n^n \pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Delta(ne^{it}) \exp(ne^{it}) e^{-nit} dt$$

به دست می آید (برگشت از پواسونی سازی). در این صورت همه نتایج برگشت از پواسونی سازی مجانبی از انتگرال بالا به وسیله یک برآورد دقیق این انتگرال با استفاده از روش نقطه زینی نتیجه می شود.

۴ روش نقطه زینی

نقطه زینی یک تابع $f(z)$ ، نقطه ای مانند z است که برای آن $f(z) \neq 0$ و $f'(z) = 0$. این نقطه، یک نقطه زینی ساده نامیده می شود هرگاه همچنین $f''(z) \neq 0$ باشد. برای برآورد انتگرال های مختلط یک تابع تحلیلی، اغلب یک تدبیر خوب اتخاذ مسیر انتگرال گیری به صورت یک منحنی است که از یک یا چند نقطه زینی تابع تحت انتگرال عبور می کند. به کار گرفتن این فن در مواقعی که انتگرال به یک پارامتر بزرگ وابسته است، به اطلاع مجانبی دقیقی منجر می شود. استفاده عمومی از این روش برای انتگرال های کوشی مبین ضرایب توابع مولد شاخص های بزرگ است. چون انتگرال را می توان در طول یک دایره به مرکز مبدا محاسبه کرد، اجرای این روش نسبتاً ساده خواهد بود. روش نقطه زینی می تواند به برآوردهای مجانبی دقیقی شامل بسط های مجانبی نیز منتهی شود. پایه این روش، استفاده از مسیر عبور نقطه زینی و سپس برآورد موضعی تابع تحت انتگرال نزدیک این نقطه است که در نهایت با تقریب های موضعی و انتگرال گیری، یک بسط مجانبی از انتگرال را نتیجه می دهد. یک شکل ساده شده این روش، کران هایی را نتیجه می دهد که کران های نقطه زینی نامیده می شوند. ثابت شده است که این روش برای انتگرال های ضرایب کوشی تابع های تام و تابع هایی

مجانبی برای توابع مولدی که توابع تام هستند، به کار گرفته می شود.

تعریف ۲.۳. فرض کنید g_n یک مشخصه مدل برنولی از اندازه n باشد. در این صورت تبدیل پواسون آن به صورت

$$\Delta(z) = \sum_{n \geq 0} \mathbb{E}(X_N | N = n) e^{-z} \frac{z^n}{n!}$$

تعریف می شود که N یک فرایند پواسون با میانگین $\Re(z) > 0$ است.

زمانی که z یک عدد مختلط است، این تبدیل را پواسونی سازی تحلیلی می نامند. اگر بتوان تبدیل پواسون $\Delta(z)$ را به طور دقیق محاسبه کرد، می توان ضرایب موجود در تبدیل را به صورت

$$g_n = n! [z^n] (e^z \Delta(z))$$

بازیافت کرد. این نوع برگشت از پواسونی سازی را برگشت از پواسونی سازی دقیق یا جبری گویند. به عنوان مثال با به کار گرفتن فرمول ضرایب کوشی برای

$$\Delta(z) = \frac{e^{-z}}{1-z}$$

می توان نتیجه گرفت که

$$g_n = n! [z^n] (e^z \Delta(z)) = n!.$$

در بیشتر وضعیت های مورد بررسی در الگوریتم ها، تبدیل پواسون در یک معادله تابعی-بازگشتی صدق می کند که معمولاً نمی توان آن را به صورت دقیق حل کرد. در این مواقع می توان روی محور حقیقی زمانی $z \rightarrow \infty$ ، یک مجانب $\Delta(z)$ را پیدا کرد یا کرانی برای آن در صفحه مختلط ارائه نمود. در نهایت می توان از طریق مجانب های $\Delta(z)$ به یک بسط مجانبی g_n رسید. این روش معمولاً به برگشت از پواسونی سازی تحلیلی معروف است.

یک ساختار ترکیبیاتی شامل n شیء را که قرار است نه لزوماً به طور تصادفی در مکان های مشخصی توزیع شوند، در نظر بگیرید. فرض کنید X_n یک مشخصه مدل تحت بررسی باشد. برای تعریف مدل پواسون، فرض کنید N یک متغیر تصادفی پواسون با پارامتر $\Re(z) > 0$ باشد؛ یعنی

$$P(N = k) = e^{-z} \frac{z^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

خروجی: یک فرمول مجانبی برای

$$[z^n]G(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} G(z) \frac{dz}{z^{n+1}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{h(z)} dz,$$

که در آن γ یک مسیر دایره‌ای حول صفر است، استنتاج می‌شود. **مسیر انتگرال‌گیری:** فرض کنید $G(z)$ در شرایط قضیه ۱.۴ صدق کند. انتگرال بالا روی مسیر $\gamma = \{z : |z| = r\}$ محاسبه می‌شود. **خرد کردن:** فرض کنید $h'''(r)^{\frac{1}{3}} h''(r)^{-\frac{1}{3}} \rightarrow 0$

$$\delta = |h'''(R)^{-\frac{1}{3}} h''(R^{-\frac{1}{3}})|,$$

به‌طوری که

$$\delta \rightarrow 0,$$

$$h''(r)\delta^2 \rightarrow \infty,$$

$$h'''(r)\delta^3 \rightarrow 0.$$

مسیر γ به‌صورت $\gamma = \gamma_0 \cup \gamma_1$ خرد می‌شود، که در آن

$$\gamma_0 = \{z \in \gamma : |\arg(z)| \leq \delta\},$$

$$\gamma_1 = \{z \in \gamma : |\arg(z)| \geq \delta\}.$$

حذف کردن: روی γ_1 ، $|G(re^{i\theta})| \leq |G(re^{i\delta})|$ و

$$\left| \int_{\gamma_1} e^{h(z)} dz \right| = \mathcal{O}(|e^{-h(re^{i\delta})}|).$$

تقریب موضعی: فرض کنید

$$h(re^{i\theta}) - h(r) - \frac{1}{2}r^2\theta^2 h''(r) = \mathcal{O}(|h'''(r)\delta^3|).$$

در این صورت

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{h(z)} dz = \frac{G(r)r^{-n}}{\sqrt{2\pi h''(r)}} \left(1 + \mathcal{O}(|h'''(r)\delta^3|)\right).$$

جمع‌بندی:

$$\begin{aligned} [z^n]G(z) &= \frac{G(r)r^{-n}}{\sqrt{2\pi h''(r)}} \left(1 + \mathcal{O}(|h'''(r)\delta^3|)\right) \\ &\sim \frac{G(r)r^{-n}}{\sqrt{2\pi h''(r)}}. \end{aligned}$$

شکل ساده‌تری از مراحل بالا در قضیه زیر آمده است:

قضیه ۲.۴. فرض کنید $f(z) = \sum_{n \geq 0} f_n z^n$ یک تابع با ضرایب مثبت باشد. در این صورت

$$f_n \sim \frac{f(r)}{\sqrt{2\pi C(n)r^{n+1}}},$$

$$C_n = \frac{d^2}{dz^2} \log f(z) \Big|_{z=r} + (n+1)r^{-2},$$

که در اطراف تکین‌هایشان به‌سرعت رشد می‌کنند، روش مناسبی است [۴]. در واقع این روش برای توابع تام و توابعی که تکین‌های آنها یک رشد نمایی را القا می‌کنند، مناسب است. برای مثال می‌توان به تابع $f(z) = \exp(\frac{1}{1-z})$ اشاره کرد.

انتگرال موجود در فرمول ضرایب کوشی، سطحی با یک نقطه زینی تعریف می‌کند که در طول محور حقیقی مثبت است. با انتخاب کردن یک دایره به مرکز مبدأ و عبور آن از نقطه زینی، این انتگرال می‌تواند کران‌های مفیدی ارائه کند.

قضیه ۱.۴. فرض کنید $f(z) = \sum_{n \geq 0} f_n z^n$ یک تابع تام با ضرایب مثبت باشد. در این صورت برای هر n داریم

$$f_n = [z^n]f(z) \leq \frac{f(r)}{r^n},$$

که در آن $r = r(n)$ کوچک‌ترین عدد حقیقی مثبتی است که

$$r \frac{f'(r)}{f(r)} = n.$$

اثبات. به [۴] مراجعه شود. $\square$

این قضیه به کران ساده نقطه زینی معروف است. تعداد رده‌های ترکیبیاتی که با تحلیل نقطه زینی قابل جواب‌گویی هستند به‌مراتب کمتر از آن تعدادی است که با تحلیل تکین قابل حل هستند. در حقیقت در خیلی از موارد، جواب مسئله با همان تحلیل تکین حاصل می‌شود.

همان‌طور که قبلاً گفته شد، استفاده عمومی از روش نقطه زینی به انتگرال‌های ضرایب کوشی محدود می‌شود. فرض کنید که $G(z)$ ، یک تابع مولد مفروض باشد که در مبدأ تحلیلی و دارای ضرایب نامنفی است. در این صورت

$$[z^n]G(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} G(z) \frac{dz}{z^{n+1}},$$

که در آن γ یک طوقه به مرکز مبدأ است که در ناحیه‌ای که در آن تابع G تحلیلی است قرار گرفته و به‌طور مثبت سودار است. روش نقطه زینی با قرار دادن $z = re^{i\theta}$ در انتگرال بالا که در آن شعاع دایره‌ای برابر با (یا نزدیک به) نقطه زینی است، آشکار می‌شود. در حقیقت با این انتخاب از مختصات قطبی استفاده می‌شود. به‌طور کلی روش نقطه زینی شامل مراحل زیر است:

ورودی: فرض کنید تابع $G(z)$ برای $0 < R < |z| < \infty$ تحلیلی با ضرایب مثبت و با یک رشد سریع باشد زمانی که $z \rightarrow R^-$. فرض کنید $h(z) = \log G(z) - (n+1) \log z$

تابع احتمال، امید ریاضی و واریانس آنها است [۲، ۳، ۵]. محاسبه توزیع احتمال متغیرهای تصادفی تعریف شده روی الگوریتم‌ها یا ساختارهای تصادفی، اغلب ناممکن است. تحلیل ترکیباتی می‌تواند با اجرای چند گام ترتیبی بدون ارجاع به توزیع احتمال متغیر تصادفی منجر به پیدا کردن میانگین یا واریانس این متغیرهای تصادفی شود. در بسیاری از موارد، یک تحلیل مجانبی امکان‌پذیر است. به‌طور کلی یک تحلیل ترکیباتی استاندارد شامل گام‌های ترتیبی تابع مولد نمایی، پوآسونی سازی و تبدیل ملین است. اگر هدف اجرای تحلیلی مجانبی باشد، چون انتگرال در تبدیل ملین به یک پارامتر بزرگ وابسته خواهد شد یک تحلیل نقطه زینی نیز ضروری است. برای بازیافت ضرایب تبدیل پوآسون باید گام‌های ترتیبی تبدیل ملین معکوس و بازگشت از پوآسونی سازی انجام شود.

که در آن نقطه زینی r ، کوچک‌ترین عدد حقیقی مثبتی است که

$$r \frac{f'(r)}{f(r)} = n + 1.$$

اثبات. به [۴] مراجعه شود.

به‌عنوان یک مثال ساده، برای تابع

$$f(z) = e^z = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} z^n$$

که دارای نقطه زینی $r = n + 1$ است،

$$\frac{1}{n!} = [z^n] e^z \sim \frac{e^{n+1}}{\sqrt{2\pi/(n+1)}(n+1)^{n+1}} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{e}{n}\right)^n.$$

این نشان می‌دهد که $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$

۵ نتیجه‌گیری

یکی از مهم‌ترین کاربردهای ترکیبیات تحلیلی در بررسی متغیرهای تصادفی روی ساختارهای تصادفی و به‌ویژه محاسبه

مراجع

- [1] Drmota, M. (2009). *Random Trees: An Interplay Between Combinatorics and Probability*. Springer, New York.
- [2] Drmota, M. and Szpankowski, W. (2011). The expected profile of digital search trees. *Journal of Combinatorial Theory, Series A.*, **118**, 1939-1965.
- [3] Drmota, M. and Szpankowski, W. (2009). Un(expected) behavior of digital search tree profile. *Siam Journal on Applied Mathematics*, 130-138.
- [4] Flajolet, F. and Sedgewick, R. (2008). *Analytic Combinatorics*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [5] Kazemi, R. and Vahidi-Asl, M. Q. (2011). The variance of the profile in digital search trees. *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, **13(3)**, 21-38.
- [6] Szpankowski, W. (2001). *Average Case Analysis of Algorithms on Sequences*, Wiley, New York.