

## معرفی و کاربرد صف M/M/1 همراه با فاجعه و تعمیر

مجید آبیاری<sup>۱</sup>، عبدالرحیم بادامچی زاده<sup>۲</sup>

تاریخ دریافت: ۱۳۹۴/۳/۱۵

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۱/۳۰

### چکیده:

در این جا یک صف M/M/1 همراه با بازخورد بررسی می شود که در صورت خرابی سرویس دهنده، فاجعه رخ می دهد و پس از تعمیر سرویس دهنده، سامانه مجددا شروع به کار می کند. با وقوع فاجعه سامانه فرو می پاشد و تا پایان زمان تعمیر، متقاضی به سامانه مراجعه نمی کند. جواب های حالت گذرا برای تابع احتمال اندازه سامانه ارائه می شود و با استفاده از آن تحلیل های حالت پایا انجام می شود و برخی اندازه های مؤثر بودن سامانه معرفی می گردند. سپس نتایج حاصل برای بررسی و مدل سازی عملکرد یک دستگاه خودپرداز بانک مورد استفاده قرار می گیرد و به منظور مشاهده و بهینه سازی عملکرد دستگاه مذکور، اثرهای تغییر پارامترها بر اندازه های مؤثر بودن سامانه مورد بررسی قرار می گیرند. در نهایت به کمک نرم افزار R، عملکرد سامانه شبیه سازی می شود و نتایج به دست آمده با مقادیر مورد انتظار مقایسه می گردند.

**واژه های کلیدی:** تحلیل حالت گذرا، تحلیل حالت پایا، بازخورد، اندازه های مؤثر بودن، شبیه سازی.

## ۱ مقدمه

در این زمینه هستند. شبکه های رایانه ای با ویروس می توانند به صورت صف همراه با فاجعه مدل بندی شوند. همچنین مطالعاتی در مورد رشد جمعیت همراه با فاجعه انجام شده است. با تعریف ارائه شده از این مفهوم در سالیان اخیر، سامانه های صف بندی همراه با فاجعه در [۲، ۵، ۶] مطالعه شده است.

برای به دست آوردن جواب های حالت گذرای صف ها نیز روش هایی مانند روش تابع مولد، روش طیفی، روش ترکیبیاتی، روش دیفرانسیل تفاضلی و رویکرد جایگزین توابع مولد وجود دارند. با این حال [۴، ۹ و ۱۰]

و همین طور [۱۳] از روش کسر مسلسل<sup>۳</sup> برای مطالعه رفتار حالت گذرای سامانه های تصادفی استفاده کرده اند و ما نیز بر مبنای [۳ و ۷] و البته [۱] از همین روش استفاده می کنیم. به این منظور پس از معرفی کامل مدل، تحلیل حالت گذرا را ارائه می کنیم که واکاوی سامانه در هر لحظه از زمان و مقدمه رسیدن به تحلیل حالت پایا است، و پس از آن به اندازه های مؤثر بودن می پردازیم. در بخش ۶ نیز دستگاه خودپرداز را به عنوان مثالی واقعی از مدل مورد مطالعه در نظر گرفته، به نتایج کاربردی و مفیدی در تحلیل سامانه می رسیم.

تحلیل مدل های صف، همواره ابزاری قدرتمند برای بررسی بسیاری از پدیده های واقعی در اختیار محققان قرار می دهد. امروزه گسترش کاربرد نظریه صف در بسیاری از حوزه ها قابل مشاهده است. در این جا سعی داریم مدل مناسبی را که برای بررسی رفتار یک دستگاه خودپرداز مورد نیاز است، معرفی کنیم؛ سامانه ای با یک سرویس دهنده، که برای تحلیل آن با مؤلفه های بازخورد، فاجعه و تعمیر مواجه هستیم. شایان ذکر است که با وجود این پارامترها دامنه کاربرد این مدل بسیار گسترده است و عملکرد دستگاه خودپرداز فقط مثالی از کاربرد مدل مذکور است. به عنوان مثال دیگر می توانیم به انتقال اطلاعات در قالب یک سیگنال الکترونیکی از طریق یک مسیر مانند کابل یا فیبر نوری اشاره کنیم.

بازخورد در سامانه های همراه با دوباره کاری، شبکه های رایانه ای، صنعت بانک داری و بسیاری از حوزه های دیگر اتفاق می افتد. در این خصوص، [۱۱] مفهوم صف با بازخورد را توضیح داده است و در سال های اخیر [۸، ۱۳] و همین طور [۱۲]، مراجعی

<sup>۱</sup> دانشجوی دکتری آمار، دانشگاه صنعتی شاهرود، ایران

<sup>۲</sup> عضو هیئت علمی گروه آمار، دانشگاه علامه طباطبائی، ایران

## ۲ توصیف مدل

شناخت صف نیازمند تعریف مؤلفه‌هایی است که در ادامه به اختصار آمده است.

**ورود:** متقاضیان مستقل از هم و بر اساس فرایند پواسون با پارامتر  $\lambda$  به سرویس دهنده مراجعه می‌کنند.

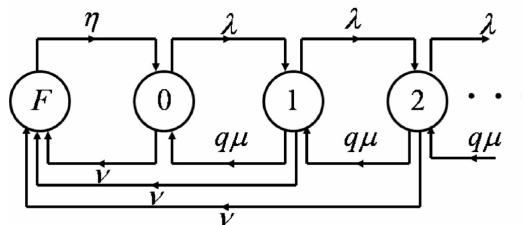
**سرویس:** زمان‌های سرویس متقاضیان، متغیرهای تصادفی مستقل نمایی با پارامتر  $\mu$  هستند و سرویس FCFS<sup>۴</sup> (سرویس بر اساس ترتیب ورود) است.

**بازخورد:** بعد از تکمیل هر سرویس، متقاضی یا با احتمال  $p$  مجدداً به انتهای صف ملحق می‌شود یا با احتمال  $q = 1 - p$  سامانه را ترک می‌کند.

**فاجعه‌ها:** فاجعه‌ها برای سرویس دهنده به صورت فرایندهای پواسون مستقل با پارامتر  $\nu$  اتفاق می‌افتند و سرویس دهنده به محض وقوع فاجعه غیرفعال می‌شود.

**تعمیرات:** زمان‌های تعمیر خرابی سرویس دهنده، متغیرهای تصادفی مستقل نمایی با پارامتر  $\eta$  هستند.

بر اساس تعاریف فوق، شکل ۱ گردش حالت‌ها در سامانه را نشان می‌دهد.



شکل ۱. نمودار گردش حالت‌های سامانه

سامانه صف مورد نظر را به‌عنوان یک مدل زنجیر مارکف زمان پیوسته (CTMC) بررسی می‌کنیم.  $\{X(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$  را تعداد متقاضیان در سامانه در زمان  $t$  قرار می‌دهیم.

همچنین  $P_n(t) = P(X(t) = n)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  را احتمال وجود  $n$  متقاضی در سامانه در لحظه  $t$  در نظر می‌گیریم. نماد  $Q(t)$  را نیز احتمال قرار گرفتن سرویس دهنده در حالت تعمیر در لحظه  $t$  در نظر می‌گیریم. حال بر اساس معادلات چپمن-کولموگوروف، احتمال‌های مورد نظر در معادله‌های زیر صدق می‌کنند:

$$Q'(t) = -(\eta + \nu)Q(t) + \nu, \quad (1)$$

$$P'_n(t) = \eta Q(t) - (\lambda + \nu)P_n(t) + q\mu P_{n+1}(t), \quad (2)$$

$$P'_n(t) = \lambda P_{n-1}(t) - (\lambda + q\mu + \nu)P_n(t) + q\mu P_{n+1}(t), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3)$$

## ۳ تحلیل حالت گذرا

می‌توان بدون از دست دادن کلیت موضوع، فرض کرد در ابتدا هیچ متقاضی‌ای در سامانه وجود ندارد و سرویس دهنده فعال است ( $P_0(0) = 1, Q(0) = 0$ ). در ادامه با تبدیل لاپلاس گرفتن، معادلات سامانه معرفی شده به صورت معادلات زیر تغییر می‌یابند.

از معادله ۱ داریم:

$$Q^*(z) = \frac{\nu}{z(z + \eta + \nu)} \quad (4)$$

یا

$$Q(t) = \nu \int_0^t e^{-(\eta + \nu)u} du = \frac{\nu}{\eta + \nu} (1 - e^{-(\eta + \nu)t}). \quad (5)$$

از معادله ۲ داریم:

$$(z + \lambda + \nu)P^*(z) = 1 + \eta Q^*(z) + q\mu P_1^*(z) \quad (6)$$

یا

$$P^*(z) = \frac{1}{(z + \lambda + \nu) - \eta \frac{Q^*(z)}{P_1^*(z)} - q\mu \frac{P_1^*(z)}{P^*(z)}} \quad (7)$$

و از معادله ۳ داریم:

$$(z + \lambda + q\mu + \nu)P_n^*(z) = \lambda P_{n-1}^*(z) + q\mu P_{n+1}^*(z), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (8)$$

یا

$$\frac{P_n^*(z)}{P_{n-1}^*(z)} = \frac{\lambda}{(z + \lambda + q\mu + \nu) - q\mu \frac{P_{n+1}^*(z)}{P_n^*(z)}} \quad (9)$$

با جایگذاری  $Q^*(z)$  در معادله (۷) و ساده‌سازی خواهیم داشت:

$$P^*(z) = \frac{1 + \frac{\eta\nu}{z(z + \eta + \nu)}}{(z + \eta + \nu) - q\mu \frac{P_1^*(z)}{P^*(z)}} \quad (10)$$

<sup>۴</sup> first-come, first-served

با استفاده از فرمول (۱۰) و اجرای فرایند تکراری در (۹)،  $P^*(z)$  به صورت کسر مسلسل بیان می شود:

$$P^*(z) = \frac{1 + \frac{\eta\nu}{z(z+\eta+\nu)}}{(z+\lambda+\nu) - \frac{q\mu\lambda}{(z+\lambda+q\mu+\nu) - \frac{\lambda q\mu}{(z+\lambda+q\mu+\nu) - \dots}}}$$

معادله بالا را می توان به صورت زیر نوشت:

$$P^*(z) = \frac{1 + \frac{\eta\nu}{(z+\eta+\nu)}}{(z+\lambda+\nu) - \phi(z)}, \quad (11)$$

که در آن

$$\phi(z) = \frac{\lambda q\mu}{(z+\lambda+q\mu+\nu) - \frac{\lambda q\mu}{(z+\lambda+q\mu+\nu) - \dots}} = \frac{\lambda q\mu}{(z+\lambda+q\mu+\nu) - \phi(z)}$$

برای به دست آوردن  $\phi(z)$ ، کسر مسلسل را به صورت یک معادله درجه دو بیان می کنیم:

$$\phi(z)^2 - (z+\lambda+q\mu+\nu)\phi(z) + \lambda q\mu = 0.$$

ریشه قابل قبول معادله به صورت زیر است:

$$\beta(z) = \frac{w - \sqrt{w^2 - 4\lambda q\mu}}{2},$$

به طوری که  $w = z + \lambda + q\mu + \nu$

با جایگذاری  $\beta(z)$  به جای  $\phi(z)$  داریم:

$$P^*(z) = \frac{1 + \frac{\eta\nu}{z(z+\eta+\nu)}}{(z+\lambda+\nu) - \left(\frac{w - \sqrt{w^2 - 4\lambda q\mu}}{2}\right)}. \quad (12)$$

با کمک مجموع تصاعد هندسی و تبدیل وارون لاپلاس داریم:

$$P_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(q\mu)^n}{(\lambda q\mu)^{\frac{n+1}{\nu}}} e^{-(\lambda+q\mu+\nu)t} \frac{I_{n+1}(\sqrt{\lambda q\mu}t)}{t} + (\eta\nu) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(q\mu)^n}{(\lambda q\mu)^{\frac{n+1}{\nu}}} \int_0^t \int_0^u e^{-(\lambda+\nu)v} * e^{-(\lambda+q\mu+\nu)(u-v)} \frac{I_{n+1}(\sqrt{\lambda q\mu}(u-v))}{(u-v)} dv du, \quad (13)$$

به طوری که  $I_n(\cdot)$  تابع بسل اصلاح شده نوع اول از مرتبه  $n$  است.

در ادامه بقیه احتمالات حالت گذرای  $P_n(t)$  برای  $n = 1, 2, 3, \dots$

بر حسب  $P(t)$  و  $Q(t)$  به دست می آید. با استفاده از معادله (۹) خواهیم داشت:

$$\frac{P_n^*(z)}{P_{n-1}^*(z)} = \frac{\lambda}{(z+\lambda+q\mu+\nu) - \frac{q\mu P_{n+1}^*(z)}{P_n^*(z)}} \quad (14)$$

$$= \frac{\lambda q\mu}{(z+\lambda+q\mu+\nu) - \phi(z)}$$

$$= \frac{2\lambda(w - \sqrt{w^2 - 4\lambda q\mu})}{4\lambda q\mu}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$P_n(t) = \int_0^t P_0(u) \left(\frac{\lambda}{q\mu}\right)^{\frac{n}{\nu}} e^{-(\lambda+q\mu+\nu)(t-u)} * n \frac{I_n(\sqrt{\lambda q\mu}(t-u))}{(t-u)} du. \quad (15)$$

بنا بر این معادلات (۱۳) و (۱۵) و (۵) به طور کامل همه احتمالات حالت گذرای  $P(t)$  و  $P_n(t)$  و  $Q(t)$  را به ازای  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  تعیین می کنند.

**قضیه ۱.۳.** اگر  $\nu > 0$  و  $\eta > 0$ ، آن گاه رفتار مجانبی میانگین اندازه سامانه،  $m(t)$ ، وقتی  $t \rightarrow \infty$ ، به صورت زیر است:

$$m(t) \rightarrow \frac{\eta(\lambda - q\mu)}{\nu(\eta + \nu)} + \frac{2\eta q\mu}{(\eta + \nu)(2(\lambda + \nu) - (w_1 - \sqrt{w_1^2 - 4\lambda q\mu}))}.$$

اثبات. به [۱] مراجعه کنید.

□

#### ۴ حالت پایا و اندازه های مؤثر بودن

در این بخش، توزیع حالت پایای طول صف و احتمال حالت پایای شکست، در مدل صف بندی مورد بررسی محاسبه می شود و گشتاور احتمالات اندازه سامانه در حالت پایا به دست می آید.

**قضیه ۱.۴.** به ازای  $\nu > 0$  و  $\eta > 0$ ، توزیع های حالت پایا،  $\{Q, \pi_n : n \geq 0\}$  در صف  $M/M/1$  بازگشتی همراه با فاجعه خرابی و تعمیر سرویس دهنده، به صورت زیر است:

$$Q = \frac{\nu}{\eta + \nu}, \quad (16)$$

$$\pi_0 = (1 - Q)(1 - \rho), \quad (17)$$

$$\pi_n = (1 - Q)\rho^n(1 - \rho), \quad n = 1, 2, \dots \quad (18)$$

به طوری که

$$\rho = \frac{\lambda + \nu + q\mu - \sqrt{(\lambda + q\mu + \nu)^2 - 4\lambda q\mu}}{2q\mu}. \quad (19)$$

اثبات. در ابتدا احتمال حالت شکست  $Q$  به صورت زیر به دست می آید:

$$Q = \lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) = \lim_{z \rightarrow 0} zQ^*(z) = \frac{\nu}{\eta + \nu}$$

و

$$\begin{aligned} \pi_n &= \lim_{t \rightarrow \infty} P_n(t) = \lim_{z \rightarrow 0} zP_n^*(z) \\ &= \frac{\frac{\eta\nu}{\eta + \nu}}{\lambda + \nu - \left( \frac{\lambda + q\mu + \nu - \sqrt{(\lambda + q\mu + \nu)^2 - 4\lambda q\mu}}{2} \right)}. \end{aligned}$$

در ادامه قرار می دهیم  $w_1 = \lambda + \nu + q\mu$ . پس خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \pi_n &= \frac{\frac{\eta\nu}{\eta + \nu}}{(w_1 - q\mu) - \left( \frac{w_1 - \sqrt{w_1^2 - 4\lambda q\mu}}{2} \right)} \\ &= \frac{\eta}{\eta + \nu} \left( \frac{2\nu}{w_1 - 2q\mu + \sqrt{w_1^2 - 4\lambda q\mu}} \right) \\ &= (1 - Q) \left( 1 - \frac{w_1 - \sqrt{w_1^2 - 4\lambda q\mu}}{2q\mu} \right) \\ &= (1 - Q)(1 - \rho). \end{aligned}$$

به طور مشابه:

$$\begin{aligned} \pi_n &= \lim_{t \rightarrow \infty} P_n(t) = \lim_{z \rightarrow 0} zP_n^*(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \left( \frac{w - \sqrt{w^2 - 4\lambda q\mu}}{2q\mu} \right)^n \lim_{z \rightarrow 0} zP_n^*(z) \\ &= \left( \frac{w_1 - \sqrt{w_1^2 - 4\lambda q\mu}}{2q\mu} \right)^n (1 - Q)(1 - \rho) \\ &= (1 - Q)\rho^n(1 - \rho). \end{aligned}$$

مشاهده می شود که احتمالات حالت پایا وجود دارند اگر و تنها اگر  $\rho < 1$ .

**تذکر ۲.۴.** اگر  $\eta$  به سمت  $\infty$  میل کند، داریم  $Q = 0$  و باقی احتمالات حالت پایا در سامانه، یعنی  $\pi_n, n = 0, 1, 2, 3, \dots$  همگی بر نتایج [۱۳] منطبق هستند. به علاوه اگر فرض کنیم  $\nu = 0$  آن گاه  $\rho = \frac{\lambda}{q\mu} < 1$  که معادل حالت پایا برای صف  $M/M/1$  بازگشتی می باشد و بر نتایج [۱۱] منطبق است.

**قضیه ۳.۴.** به ازای  $\nu > 0$  و  $\eta > 0$  تابع مولد احتمال حالت پایا،  $\Pi(s)$  به صورت زیر به دست می آید:

$$\Pi(s) = \frac{Q\rho(1-s) + (1-\rho)}{(1-\rho s)}$$

میانگین و واریانس اندازه های سامانه با نمادهای  $E(N)$  و  $V(N)$  و میانگین اندازه سامانه  $E(N_q)$  به صورت زیر به دست می آیند:

$$E(N) = \frac{\rho(1-Q)}{1-\rho}, \quad (20)$$

$$V(N) = \frac{\rho(1-Q)(1+\rho Q)}{(1-\rho)^2} \quad (21)$$

و

$$E(N_q) = \frac{(1-Q)\rho^q}{1-\rho}. \quad (22)$$

اثبات. تابع مولد احتمال حالت پایا،  $\Pi(s)$  را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\Pi(s) = (Q + \pi_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \pi_n s^n.$$

با جایگذاری مقادیر  $\pi_n$  و  $\pi_n$  از معادلات (۱۷) و (۱۸) و بعد از ساده کردن داریم:

$$\begin{aligned} \Pi(s) &= Q + (1-Q)(1-\rho) + \sum_{n=1}^{\infty} (1-Q)\rho^n(1-\rho)s^n \\ &= Q + (1-Q)(1-\rho) \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n s^n \right] \\ &= \frac{Q\rho(1-s) + (1-\rho)}{(1-\rho s)}. \end{aligned}$$

□

نمادهای  $E(N)$  و  $V(N)$  را به عنوان میانگین و واریانس اندازه حالت پایای سامانه در نظر می گیریم، که با مشتق گرفتن از  $\Pi(s)$  نسبت به  $s$  و قرار دادن  $s = 1$  به دست می آیند. بنا بر این:

$$\begin{aligned} E(N) &= \lim_{s \rightarrow 1} \Pi'(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 1} \frac{-Q\rho(1-\rho s) + \rho(Q\rho(1-s) + (1-\rho))}{(1-\rho s)^2} \\ &= \lim_{s \rightarrow 1} \frac{\rho(1-\rho)(1-Q)}{(1-\rho s)^2} = \frac{\rho(1-Q)}{1-\rho}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(N^2) &= \lim_{s \rightarrow 1} \Pi''(s) + \lim_{s \rightarrow 1} \Pi'(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 1} \frac{2(1-\rho s)\rho(Q\rho(1-s) + (1-\rho))}{(1-\rho s)^3} \\ &\quad + \frac{\rho(1-Q)}{1-\rho} = \frac{2\rho^2(1-Q)}{(1-\rho)^2} + \frac{\rho(1-Q)}{1-\rho}. \end{aligned}$$

$$P(\text{بیکاری سرویس دهنده مشروط بر سالم بودن}) = \frac{\pi \cdot}{(1-Q)} = 1 - \rho.$$

قضیه ۴.۴. به ازای  $\nu > 0$  و  $\eta > 0$  در حالت پایا، عملکرد سامانه،  $U$ ، به صورت زیر به دست می آید:

$$U = \frac{\eta}{\eta + \nu} \rho q \mu,$$

به طوری که  $\rho$  به صورت رابطه (۱۹) است.

اثبات. با توجه به تعریفی که پیش تر برای عملکرد بیان شد، با نرخ خروج  $q\mu$  و با جایگذاری روابط (۱۶) و (۱۷) داریم:

$$U = [1 - (\pi \cdot + Q)]q\mu = \frac{\eta}{\eta + \nu} \rho q \mu$$

□

## ۵ قابلیت اعتماد

قابلیت اعتماد در سامانه مورد بحث، مستقیماً با وقوع فاجعه ارتباط دارد؛ یعنی شکست در سامانه، در صورت خرابی سرویس دهنده رخ می دهد. اما عدم دسترسی به این سامانه هنگامی است که امکان ورود به سامانه مختل شود، یعنی وقتی که سرویس دهنده در حال تعمیر است و امکان ورود به سامانه وجود ندارد. بنا بر این، قابلیت اعتماد در سامانه همراه با فاجعه معرفی شده، عبارت است از احتمال این که سامانه کارش را به طور مؤثر در یک دوره زمانی مشخص و شرایط محیطی مرتبط ادامه دهد. در دسترس بودن (قابلیت دسترسی) عبارت است از احتمال این که سامانه در یک زمان خاص یا نسبتی از بازه کاری اش فعال باشد.

$A(t)$  را احتمال در دسترس بودن سامانه در زمان  $t$  تعریف می کنیم. سپس از معادله (۵) مقدار  $A(t)$  به صورت زیر به دست می آید:

$$A(t) = 1 - Q(t) = \frac{\eta}{\eta + \nu} + \frac{\nu}{\eta + \nu} e^{-(\eta + \nu)t}. \quad (23)$$

میانگین در دسترس بودن سامانه در  $[0, t]$  به صورت زیر است:

$$\bar{A}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t A(u) du = \frac{\eta}{\eta + \nu} + \frac{\nu}{(\eta + \nu)^2} \frac{1}{t} (1 - e^{-(\eta + \nu)t}). \quad (24)$$

اگر  $\eta = 0$  آن گاه از رابطه (۵) به دست خواهیم آورد:

$$Q(t) = 1 - e^{-\nu t}.$$

از آن جا که  $V(N) = E(N^2) - E(N)^2$  با جایگذاری مقادیر  $E(N)$  و  $E(N^2)$  و پس از مقداری ساده کردن به دست خواهیم آورد:

$$V(N) = \frac{2\rho^2(1-Q)}{(1-\rho)^2} + \frac{\rho(1-Q)}{1-\rho} - \frac{\rho^2(1-Q)^2}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho(1-Q)(1+\rho Q)}{(1-\rho)^2}.$$

نماد  $E(N_q)$  را به عنوان میانگین اندازه صف در حالت پایا در نظر می گیریم. از این رو:

$$E(N_q) = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)\pi_n.$$

با جایگذاری مقادیر  $\pi_n, n = 1, 2, \dots$  و پس از برخی محاسبات جبری، عبارت زیر را به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} E(N_q) &= \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)(1-Q)\rho^n(1-\rho) \\ &= (1-Q)\rho^2(1-\rho) \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)\rho^{n-2} \\ &= (1-Q)\rho^2(1-\rho) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{dp^{n-1}}{d\rho} \\ &= (1-Q)\rho^2(1-\rho) \frac{d \sum_{n=1}^{\infty} \rho^{n-1}}{d\rho} \\ &= (1-Q)\rho^2(1-\rho) \frac{d}{d\rho} \left( \frac{1}{1-\rho} \right) = \frac{(1-Q)\rho^2}{1-\rho}. \end{aligned}$$

توجه: میانگین تعداد متقاضیان در سامانه،  $E(N)$ ، با احتساب زمان تعمیر و زمان بیکاری که متقاضی در سامانه حضور ندارد محاسبه شده است.

$$\begin{aligned} P(\text{اشتغال سرویس دهنده}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \pi_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (1-Q)\rho^n(1-\rho) \\ &= (1-Q)(1-\rho) \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \\ &= (1-Q)(1-\rho) \frac{\rho}{(1-\rho)} \\ &= (1-Q)\rho, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\text{بیکاری سرویس دهنده یا تحت تعمیر بودن}) &= \pi \cdot + Q \\ &= (1-Q)(1-\rho) + Q = 1 - \rho(1-Q), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\text{اشتغال سرویس دهنده مشروط بر سالم بودن}) &= \frac{(1-Q)\rho}{(1-Q)} \\ &= \rho, \end{aligned}$$

بنا بر این تابع قابلیت اعتماد سامانه،  $R(t)$ ، به صورت زیر است:

$$R(t) = 1 - Q(t) = e^{-\nu t}.$$

میانگین زمان خرابی سامانه (MTTF) به صورت زیر است:

$$MTTF = \int_0^{\infty} R(t) dt = \frac{1}{\nu}.$$

اگر  $T$  یک متغیر تصادفی باشد که زمان سرویس را نشان دهد، تعمیرپذیری سامانه،  $M(t)$ ، نیز به صورت زیر است:

$$M(t) = P(T \leq t)$$

و از آنجا که زمان تعمیر دارای توزیع نمایی با پارامتر  $\eta$  است، تابع چگالی احتمال تعمیر به صورت  $g(t) = \eta e^{-\eta t}$  است و بنا بر این:

$$M(t) = P(T \leq t) = \int_0^t \eta e^{-\eta u} du = 1 - e^{-\eta t}.$$

پس مقدار مورد انتظار زمان تعمیر، یعنی میانگین زمان تعمیر، (MTTR)، به صورت زیر حاصل می شود:

$$MTTR = \int_0^{\infty} t g(t) dt = \int_0^{\infty} \eta e^{-\eta u} u du = \frac{1}{\eta}.$$

از رابطه (۲۳) در دسترس بودن سامانه در اجرای طولانی مدت یا حالت پایا به صورت زیر حاصل می شود:

$$A = A(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = \frac{\eta}{\eta + \nu}.$$

هم چنین از رابطه (۲۴) داریم:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{A}(t) = \frac{\eta}{\eta + \nu}.$$

از این رو:

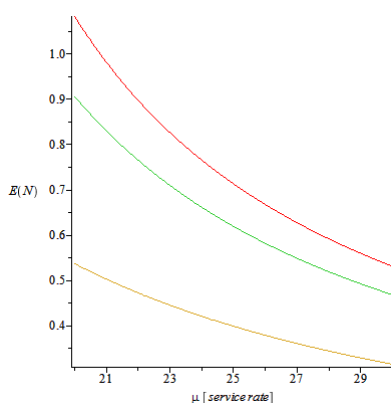
$$A = \frac{\eta}{\eta + \nu} = \frac{\frac{1}{\nu}}{\frac{1}{\nu} + \frac{1}{\eta}} = \frac{MTTF}{MTTF + MTTR} = \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{A}(t).$$

یعنی در اجرای طولانی مدت، در دسترس بودن لحظه ای با میانگین در دسترس بودن برابر است.

## ۶ کاربرد و شبیه سازی

### ۱.۶ کاربرد

برای بررسی رفتار دستگاه خودپرداز بانک ملی واقع در فرودگاه مهرآباد در ساعات اداری، از مدل معرفی شده فوق استفاده کردیم. بدین منظور دستگاه مورد نظر را طی ده روز متوالی از ساعت ۸ تا ۱۶ بررسی و تعداد مراجعه کننده گان به دستگاه - اعم از ناموفق و موفق به دریافت سرویس - را در هر ساعت ثبت کردیم. این اطلاعات در جدول ۱ آمده است. با تحلیل واریانس مشاهده کردیم که عامل تغییر روز، اثر معنی داری بر پاسخ ندارد. میانگین تعداد مراجعه کنندگان در نمونه مذکور برابر با  $10/2$  بوده که آن را به عنوان برآوردی از میانگین جامعه در نظر گرفتیم. سپس به کمک آزمون نیکویی برازش مشخص گردید که می توانیم داده ها را متغیرهای تصادفی از توزیع پواسون با میانگین ۱۰ در نظر بگیریم. سپس با تحلیل باقیمانده ها، یعنی آزمون نرمال بودن آنها و ثابت بودن واریانس شان، با اطمینان بیشتری به این نتیجه رسیدیم که مراجعه به دستگاه مذکور، از توزیع پواسون با میانگین ۱۰ نفر در ساعت پیروی می کند. حال اگر زمان شروع کار مراجعه کننده تا پایان کارش با دستگاه خودپرداز را به عنوان زمان سرویس در نظر بگیریم، با اطلاعات ثبت شده در دستگاه دریافتیم که این زمان دارای توزیع نمایی با پارامتر  $2/4$  دقیقه است. البته در جریان بررسی شاهد بودیم که حدود ۶ درصد از متقاضیان موفق به دریافت سرویس پس از اتمام سرویس، به دلایل مختلف، دوباره به انتهای صف ملحق می شوند که این پدیده را به عنوان بازخورد در نظر می گیریم. همان طور که می دانیم به دلیل مشکلات ارتباطی ماهواره ای و اینترنتی پیش آمده در خلال کار دستگاه خودپرداز، در مواقعی شاهد قطع شدن ارتباط هستیم به طوری که پس از قطع شدن ارتباط، امکان ارائه سرویس فراهم نیست و متقاضیان موجود در سامانه نیز به علت مشخص نبودن زمان شروع به کار مجدد دستگاه خودپرداز، سامانه را ترک می کنند. حال اگر این قطع شدن ارتباط را به عنوان فاجعه در نظر بگیریم، این بار با بررسی زمان های وقوع این مشکل متوجه شدیم که قطع شدن ارتباط به صورت تصادفی و به طور میانگین هر دو ساعت یک بار اتفاق می افتند. با بررسی داده ها به شرح قبل، پذیرفتن توزیع پواسون با میانگین  $0/5$  قطعی در ساعت، معقول بود. همچنین توزیع زمان های غیرفعال بودن سامانه، یعنی

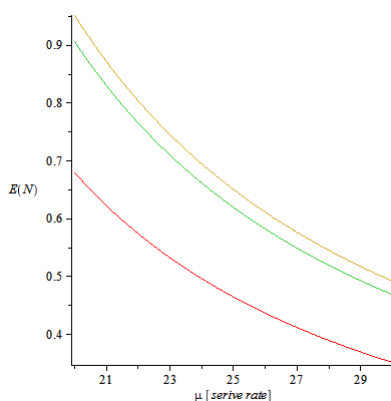


شکل ۲. اثر  $\mu$  بر  $E(N)$  در سه سطح  $\nu$

$$L1: \lambda = 10; \nu = 0.1; q = 0.94; \eta = 4$$

$$L2: \lambda = 10; \nu = 0.5; q = 0.94; \eta = 4$$

$$L3: \lambda = 10; \nu = 2; q = 0.94; \eta = 4$$

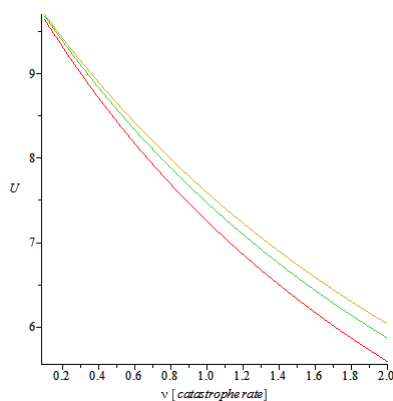


شکل ۳. اثر  $\mu$  بر  $E(N)$  در سه سطح  $\eta$

$$L1: \lambda = 10; \nu = 0.5; q = 0.94; \eta = 1$$

$$L2: \lambda = 10; \nu = 0.5; q = 0.94; \eta = 4$$

$$L3: \lambda = 10; \nu = 0.5; q = 0.94; \eta = 7$$



شکل ۴. اثر  $\nu$  بر  $U$  در سه سطح  $\eta$

$$L1: \lambda = 10; \nu = 0.5; q = 0.94; \eta = 1$$

$$L2: \lambda = 10; \nu = 0.5; q = 0.94; \eta = 4$$

$$L3: \lambda = 10; \nu = 0.5; q = 0.94; \eta = 7$$

زمانی که ارتباط قطع می‌شود تا زمان شروع به کار مجدد نیز نمایی با میانگین ۱۵ دقیقه به دست آمد.

حال که نحوه کار دستگاه را بر طبق سامانه مورد بررسی مدل‌بندی کردیم و پارامترهای مورد نظر را نیز برآورد نمودیم، می‌توانیم به تحلیل کار دستگاه و شبیه‌سازی آن پردازیم و نیز تغییرات عملکرد را بر اساس تغییر پارامترها مشاهده کنیم و برطبق آن، تنظیمات لازم را انجام دهیم.

مشخص است که نرخ ورود و همچنین بازخورد، چندان قابل تغییر نیست. بنا بر این توجه خود را به نتایج حاصل از تغییر در سایر پارامترها معطوف می‌کنیم. بررسی رفتار  $\pi$  در برابر تغییر پارامترها، امکان قضاوت صحیح در باره سامانه را به ما نمی‌دهد؛ زیرا تهی بودن این سامانه، هم ممکن است به علت قطعی‌های مکرر و راه‌اندازی‌های مجدد باشد که بد است و هم ممکن است حاصل سرعت مناسب سرویس باشد، که خوب است. اما اگر اثر تغییر نرخ سرویس را بر میانگین تعداد در سامانه در هر سطح ثابت از سایر پارامترها بررسی کنیم، می‌توانیم به درستی متوجه اهمیت این پارامتر شویم.

شکل‌های ۲ و ۳ نشان می‌دهند که با افزایش نرخ سرویس در سامانه، میانگین تعداد متقاضیان در سامانه،  $E(N)$ ، در سطوح مختلف نرخ خرابی،  $\nu$  و نیز در سطوح مختلف زمان تعمیر،  $\eta$ ، کاهش پیدا می‌کند. به عبارتی در هر کدام از حالت‌ها با افزایش نرخ سرویس، اندازه سامانه کوتاه‌تر می‌شود و این موضوع می‌تواند موجب رضایتمندی و ترغیب متقاضیان گردد. اما موضوع مهم‌تر، تأثیر نرخ سرویس، نرخ فاجعه و نرخ تعمیر بر عملکرد سامانه است. از فرمول کاملاً مشخص است که تأثیر  $\mu$  بر عملکرد سامانه کاملاً خطی و به صورت ضریب ثابت است.

شکل‌های ۴ و ۵ جزئیاتی از عملکرد سامانه، یعنی عملکرد در برابر پارامترهای  $\nu$  و  $\eta$  را در سطوح مختلف  $\mu$  نشان می‌دهند. به وضوح مشخص است عملکرد  $U$  یک تابع افزایشی از  $\mu$  و یک تابع کاهشی از  $\nu$  و  $\eta$  است.

حال باید ببینیم که هزینه صرف‌شده برای کاهش نرخ خرابی و زمان تعمیر یا افزایش نرخ سرویس، در برابر افزایش عملکرد توجیه‌پذیر است یا نه و سپس تصمیم‌گیری کنیم.

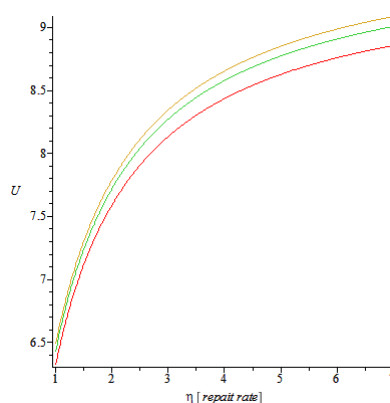
سامانه و نیز طول زمان وقوع رخدادها در این شکل مشخص است. البته کاملاً واضح است که چون زمان اجرای سامانه کوتاه بوده، نباید این مقدار را با امید در حالت پایا مقایسه کرد.

حال اگر زمان را افزایش دهیم، انتظار داریم میانگین تعداد در سامانه به مقدار مورد انتظار در حالت پایا نزدیک تر شود. برای این منظور، شبیه سازی سامانه را در ۱۰۰۰ واحد زمانی انجام می دهیم و همان طور که در شکل ۷ مشخص است این عدد  $۰/۶۳۷۶$  است که به مقدار مورد نظر نزدیک تر شده است.

حال انتظار داریم اگر بارها و بارها این شبیه سازی را تکرار کنیم مقادیر به دست آمده برای میانگین طول صف بر اساس قضیه حدی مرکزی دارای توزیع نرمال با میانگین  $۰/۶۱۹۵$  باشند. این نتایج برای ۳۰ بار تکرار شبیه سازی به شرح زیر می باشند:

- [1] 0.645810 0.640350 0.629196 0.640795
- [5] 0.614368 0.621112 0.634470 0.644377
- [9] 0.657434 0.623749 0.620592 0.628422
- [13] 0.595253 0.622249 0.620907 0.631503
- [17] 0.583230 0.613798 0.596282 0.602631
- [21] 0.600742 0.580698 0.640996 0.616270
- [25] 0.641512 0.632301 0.602448 0.621533
- [29] 0.595654 0.597767

میانگین داده های به دست آمده از شبیه سازی، یعنی  $۰/۶۲۱۳۹۳۴$ ، به عنوان برآوردی بسیار دقیق برای میانگین جامعه به دست آمده است. همان طور که از خروجی نرم افزار SPSS مشخص است، بازه اطمینانی با با طول کمتر از  $۰/۱۶$  با احتمال ۹۵ درصد، مقدار واقعی میانگین جامعه را شامل می شود.



شکل ۵. اثر  $\eta$  بر  $U$  در سه سطح  $\mu$

$$L1 : \lambda = 10; \mu = 20; q = 0.94; \nu = 0.5$$

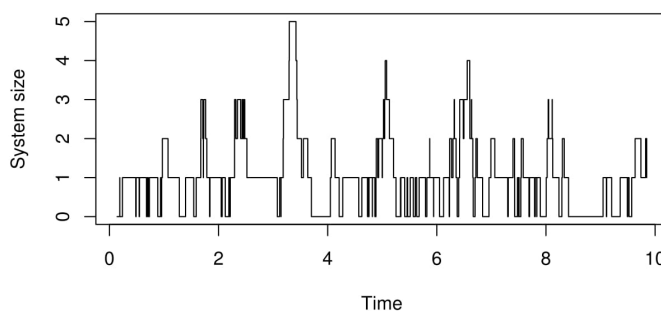
$$L2 : \lambda = 10; \mu = 25; q = 0.94; \nu = 0.5$$

$$L3 : \lambda = 10; \mu = 30; q = 0.94; \nu = 0.5$$

## ۲.۶ شبیه سازی

شبیه سازی سامانه صف به این معنی است که با توجه به نرخ های ورود، سرویس، فاجعه، تعمیر و بازخورد، نحوه شکل گرفتن و ایجاد تغییرات در صف و به نحوی رفتار احتمالی صف را بررسی کنیم. به این منظور به کمک نرم افزار R و با پارامترهای مربوط به دستگاه خودپرداز، اقدام به شبیه سازی سامانه می کنیم. با اجرای این برنامه می توان توالی تعداد متقاضیان در سامانه و میانگین تعداد در سامانه را طی  $t$  واحد زمانی مشاهده کرد. نمودار  $L2$  در شکل ۲ نشان می دهد که مقدار  $E(N)$ ، یعنی میانگین تعداد در سامانه، هنگامی که  $t \rightarrow \infty$ ، برابر با  $۰/۶۱۹۵$  است. حال با شبیه سازی صف با این پارامترها در مدت ۱۰ واحد زمانی، میانگین تعداد در سامانه و البته تغییرات تعداد در سامانه و رفتار احتمالاتی صف را در شکل ۶ ملاحظه می کنیم. در این مدت زمان برای سامانه شبیه سازی شده ۱۹۸ رخداد اتفاق افتاده که توالی تعداد در

Simulation, mean system size= 0.6841

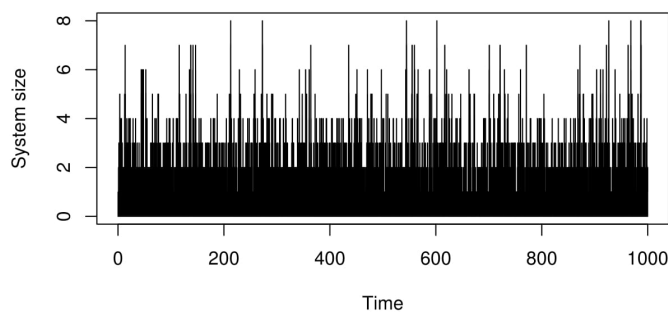


شکل ۶. شبیه سازی تعداد مراجعه کننده ها به سامانه در کوتاه مدت

$$\lambda = 10; \mu = 25; q = 0.94; \nu = 0.5; \eta = 4; t = 10$$



Simulation, mean system size= 0.6376



شکل ۷. شبیه‌سازی تعداد مراجعه‌کننده‌ها به سامانه در بلندمدت

$$\lambda = 10; \mu = 25; q = 0.96; \nu = 0.5; \eta = 4; t = 1000$$

جدول ۱. فراوانی تعداد مراجعان به دستگاه خودپرداز

روز/ساعت	۸-۹	۹-۱۰	۱۰-۱۱	۱۱-۱۲	۱۲-۱۳	۱۳-۱۴	۱۴-۱۵	۱۵-۱۶
روز اول	۱۶	۱۱	۶	۱۳	۶	۱۱	۷	۱۳
روز دوم	۷	۴	۷	۱۰	۱۰	۹	۷	۱۲
روز سوم	۱۰	۱۴	۱۲	۹	۹	۸	۸	۹
روز چهارم	۱۲	۱۴	۶	۸	۱۰	۱۰	۱۷	۹
روز پنجم	۱۹	۱۰	۱۲	۱۳	۷	۹	۱۲	۶
روز ششم	۸	۱۲	۱۰	۵	۱۱	۲۳	۷	۸
روز هفتم	۱۱	۱۳	۱۸	۸	۱۷	۱۲	۱۰	۶
روز هشتم	۱۶	۵	۱۵	۹	۵	۱۵	۱۱	۶
روز نهم	۹	۱۹	۶	۱۱	۱۲	۱۴	۶	۶
روز دهم	۸	۶	۱۹	۱۲	۶	۱۱	۱۲	۹

جدول ۲. نتایج آماری حاصل از شبیه‌سازی تعداد مراجعه‌کنندگان به خودپرداز

خطای استاندارد	آماره	
۰/۰۰۳۸۶۰۸۳۰۹	۰/۶۲۱۳۹۳۴۵۴۰	میانگین
		بازه اطمینان ۹۵ درصدی میانگین
	۰/۶۱۳۴۹۷۱۶۸۲	حد پایین
	۰/۶۲۹۲۸۹۷۳۹۸	حد بالا
	۰/۶۲۱۴۴۹۸۸۱۵	میانگین پیراسته ۵ درصدی
	۰/۶۲۱۸۹۰۶۵۰۰	میانه
	۰/۰۰۰	واریانس
	۰/۰۲۱۱۴۶۶۴۱۸	انحراف معیار
	۰/۵۸۰۶۹۷۹۰	مینیمم
	۰/۶۶۱۶۲۷۰۲	ماکسیمم
	۰/۰۸۰۹۲۹۱۲	دامنه
	۰/۰۳۸۴۳۹۹۷	دامنه میان چارکی
۰/۴۲۷	-۰/۱۴۱	چولگی
۰/۸۳۳	-۰/۶۸۵	کشیدگی

## مراجع

- [۱] آبیاری، مجید. (۱۳۹۳). تحلیل حالت گذرا و قابلیت اعتماد در صف  $M/M/1$  بازگشتی همراه با فاجعه و تعمیر، پایان نامه کارشناسی ارشد رشته آمار اقتصادی-اجتماعی، دانشکده علوم ریاضی و رایانه، دانشگاه علامه طباطبائی، تهران.
- [2] Artalejo, J. R. (2000). A versatile approach for work removal in queueing networks. *Journal of Operational Research*, **2**, 233–249.
- [3] Chandrasekaran, V. M. Saravananarajan, M. C. (2012). Transient and reliability analysis of  $M/M/1$  feedback queue subject to catastrophes, server failures and repairs. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, **77**, 605–625.
- [4] Flajolet, P. Guillemin, F. (2000). The formal theory of birth and death processes. lattice path combinatorics, and continued fractions, *Advances in Applied Probability*, **32**, 750–778.
- [5] Krishna Kumar, B. Arivudainambi, D. (2000). Transient solution of an  $M/M/1$  queue with catastrophes. *Computers and Mathematics with Applications*, **40**, 1233–1240.
- [6] Krishna Kumar, B. Pavai Madheswari, S. (2002). Transient behavior of the  $M/M/2$  queue with catastrophes. *Statistica*, **62(1)**, 129-136.
- [7] Krishna Kumar, B. Krishnamoorthy, A. Pavai Madheswari, S. Sadiq Basha, S. (2007). Transient analysis of a single server queue with catastrophes, failures and repairs. *Queueing Systems*, **56**, 133-141.
- [8] Krishna Kumar, B. Pavai Madheswari, S. Vijayakumar, A. (2002). The  $M/G/1$  retrial queue with feedback and starting failures. *Applied Mathematical Modelling*, **26**, 1057–1075.
- [9] Parthasarathy, P. R. Selvaraju, N. (2001). Transient analysis of a queue where potential customers are discouraged by queue length. *Mathematical Problems in Engineering*, **7**, 433–4544.
- [10] Parthasarathy, P. R. Vijayashree, K. V. Lenin, R. B. (2002). An  $M/M/1$  driven fluid queue, continued fraction approach. *Queueing Systems*, **42**, 189–199.
- [11] Takacs, L. (1963). A Single server queue with feedback. *The Bell System Tech. Journal*, **42**, 134–149.
- [12] Thangaraj, V. VanithaHon, S. (2010).  $M/M/1$  queue with feedback a continued fraction approach. *International Journal of Computational and Applied Mathematics*, **5**, 129–139.
- [13] Thangaraj, V. VanithaHon, S. (2009). On the analysis of  $M/M/1$  feedback queue with catastrophes using continued fractions. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, **53**, 133–151.