

## روش‌های برآورد پارامترها در توزیع بیرن‌بام-ساندرز

زینب آقاباز<sup>۱</sup>، محمدحسین علامت‌ساز<sup>۲</sup>

چکیده:

برآورد پارامترها با توجه به ماهیت توزیع‌های آماری همیشه به‌سادگی میسر نیست. به‌ویژه برآورد پارامترهای توزیع بیرن‌بام-ساندرز با روش‌های متفاوت با مشکلاتی مواجه است. در این مقاله روش‌های مختلف برآورد پارامترهای توزیع بیرن‌بام-ساندرز<sup>۳</sup> معرفی می‌شود. برآورد پارامترهای این مدل عمر فرسودگی<sup>۴</sup> به چهار روش امکان‌پذیر است. روش اول روشی گرافیکی است که تکنیک نموداری ساده‌ای مبتنی بر نمودار احتمال است و برای برآورد پارامترها و بررسی نیکویی برازش زمان‌های شکست ناشی از فرسودگی به‌خوبی عمل می‌کند. در این مقاله همچنین برآوردگرهای ماکسیمم درست‌نمایی و برآوردگرهای گشتاوری اصلاح‌شده<sup>۵</sup> مورد مطالعه قرار گرفته است. روش دیگر، برآورد پارامترها به‌شیوه‌ی جک‌نایف است که برای اندازه نمونه کوچک مناسب‌تر است. در پایان کارایی این برآوردگرها به‌وسیله شبیه‌سازی مونت-کارلو مورد مطالعه و مقایسه قرار گرفته است.

**واژه‌های کلیدی:** برآوردگرهای ماکسیمم درست‌نمایی، برآوردگرهای گشتاوری اصلاح‌شده، برآوردگرهای جک‌نایف، شبیه‌سازی مونت-کارلو.

### ۱ مقدمه

کرد. سپس این تحقیقات توسط جانسون و همکاران<sup>۶</sup> (۱۹۹۵) و مارشال و الکین<sup>۸</sup> (۲۰۰۷) ادامه یافت. در دهه گذشته تعمیم‌های مختلفی از توزیع BS مطرح شده است. براساس ایده‌های دیازگارسیا و لیوا<sup>۹</sup> (۲۰۰۵)، ویلکا-لابرا و لیوا<sup>۱۰</sup> (۲۰۰۶) تعمیم بزرگتری از توزیع BS براساس توزیع‌های بیضوی و چوله بیضوی به‌دست آمده است. براساس این تعمیم‌ها، توزیع‌هایی با انعطاف‌پذیری زیاد از نظر کشیدگی و تقارن به‌دست آمد. دیگر صورت‌های توزیع BS براساس توزیع‌های

توزیع بیرن‌بام-ساندرز دو پارامتری (BS) به‌عنوان مدلی برای توصیف زمان شکست ناشی از فرسودگی معرفی شده است. در فرآیند فرسودگی، شکست بر اثر رشد و افزایش ترک‌های موجود در مواد رخ می‌دهد. دزمووند<sup>۶</sup> (۱۹۸۶) نیز این مدل‌سازی را براساس مدل‌های بیولوژیکی کرامر به‌دست آورد. او همچنین فرضیات بیرن‌بام و ساندرز (۱۹۶۹) را بهبود بخشید و رابطه این توزیع با توزیع گوسین معکوس را بیان

<sup>۱</sup> کارشناس ارشد آمار، گروه آمار دانشگاه اصفهان

<sup>۲</sup> عضو هیئت علمی گروه آمار دانشگاه اصفهان

<sup>۳</sup> Birnbaum-Saunders distribution

<sup>۴</sup> Fatigue life

<sup>۵</sup> Modified moment estimator

<sup>۶</sup> Desmond

<sup>۷</sup> Johnson et al.

<sup>۸</sup> Marshall and Olkin

<sup>۹</sup> Diaz-Garcia and Leiva

<sup>۱۰</sup> Vilca-Labra

برآورد می‌شود. آزمون نیکویی برازش نشان می‌دهد به چه میزان داده‌ها از خط راست پیروی می‌کنند. این روش برای داده‌های سانسور شده نیز کاربرد دارد. با استفاده از نتایج تحلیل‌های رگرسیونی می‌توان فواصل اطمینان تقریبی، شیب و عرض از مبدأ خط برازش داده شده را به دست آورد. حدود اطمینان به منظور ساختن فواصل اطمینان برای پارامترها به کار می‌رود. ابتدا لازم است نحوه یافتن نمودار احتمال توزیع BS شرح داده شود. این روش توسط چانگ و تانگ<sup>۱۲</sup> (۱۹۹۴) ارائه شد.

نمودار احتمال فواید زیادی در کاربردهای مختلف دارد و به سادگی قابل تفسیر است. چانگ و تانگ نمودار احتمال توزیع BS را به صورت زیر به دست آوردند. cdf توزیع BS که در معادله (۱) داده شده است را در نظر بگیرید. در این صورت داریم

$$t = \beta + \alpha \sqrt{\beta} \sqrt{t} \Phi^{(-1)}(F), \quad (2)$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، یافتن تابعی خطی برحسب  $t$  که لازمه نمودار احتمال است، اگر غیرممکن نباشد بسیار دشوار است. این مشکل را با در نظر گرفتن معادله زیر رفع می‌کنیم

$$P = \sqrt{t} \Phi^{(-1)}(F), \quad (3)$$

و نتیجه آن تابعی خطی به فرم  $y = ax + b$  است، که در آن  $t$  محور عمودی و  $P$  محور افقی است. یعنی به عبارتی داریم

$$t = \beta + \alpha \sqrt{\beta} P, \quad (4)$$

فرض کنید زمان  $n$  شکست را به صورت  $t_1, \dots, t_n$  داشته باشیم. با رسم  $t_i$  در مقابل  $P_i$  و با در نظر گرفتن  $P_i = \sqrt{t_i} \Phi(F(t_i))$ ، برآمد آن تقریباً خط راستی است که زمان‌های شکست دارای توزیع BS می‌باشد.

پارامترهای  $\alpha$  و  $\beta$  را می‌توان از روش حداقل مربعات به دست آورد. با برآورد عرض از مبدأ  $a$  و شیب  $b$  داریم

$$\hat{\beta} = \hat{a}, \quad \hat{\alpha} = \frac{\hat{b}}{\sqrt{\hat{a}}}, \quad (5)$$

نکته با اهمیت این است که، با استفاده از روش‌های رگرسیونی به آسانی و بدون برقراری فرض نرمال بودن می‌توان فواصل اطمینان برای  $a$  و  $b$  را به دست آورد. با استفاده از روش حداقل مربعات مشاهده می‌شود، تابعی صعودی از  $b$  و تابعی نزولی از  $a$  است. به علاوه برای هر مقدار ثابت  $a$ ،  $\alpha$  به طور یکنوا برحسب  $b$  تعیین می‌شود. از طرفی می‌توان نوشت

$$\{a \leq a \leq \bar{a}, b \leq b \leq \bar{b}\} \implies \{\alpha \leq \alpha \leq \bar{\alpha}\}$$

چوله توسط لیوا و همکاران (۲۰۰۹) به دست آمد. گوی‌راد و همکاران<sup>۱۱</sup> (۲۰۰۹) صورت غیرمرکزی توزیع BS را مطرح کردند. این توزیع در مدل‌سازی موقعیت‌هایی که رشد و گسترش ترک‌ها میانگین غیر ثابتی طی زمان دارد، به کار می‌رود. تابع توزیع تجمعی توزیع BS به صورت زیر است

$$F_T(t; \alpha, \beta) = \Phi\left(\frac{1}{\alpha} \left[\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha}} - \left(\frac{\beta}{t}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right]\right); t > 0, \alpha, \beta > 0 \quad (1)$$

که در آن  $\Phi(\cdot)$  تابع توزیع تجمعی (cdf) نرمال استاندارد و  $\alpha$  و  $\beta$  به ترتیب پارامترهای شکل و مقیاس‌اند.

تابع چگالی این توزیع تک مدی است و نرخ خطر آن وانی شکل معکوس است. یعنی ابتدا تا نقطه تغییر نرخ خطر صعودی و سپس نزولی است.

برآوردگرهای ML این توزیع توسط بیرناب و ساندرز (۱۹۶۹) و توزیع مجانبی آنها توسط انگل‌هارت و همکاران (۱۹۸۱) به دست آمد. اگرچه برآوردگرهای ML خواص بهینه دارند، اما برای یافتن آنها باید معادله‌ای غیرخطی برحسب  $\beta$  را حل کنیم. برای حل این معادله نیاز به روش‌های عددی است. به این ترتیب توزیع دقیق MLE ها قابل تعیین نیست و برای تعیین فواصل اطمینان پارامترهای مجهول لازم است از توزیع تقریبی آنها استفاده کنیم. برآوردگرهای گشتاوری این توزیع به سادگی به دست نمی‌آیند و ممکن است همیشه موجود نباشند و یا حتی اگر موجود باشند ممکن است یکتا نباشند. برآوردگرهای گشتاوری اصلاح شده توزیع BS توسط ان‌جی و همکاران (۲۰۰۳) معرفی شد. این برآوردگرها به سادگی قابل محاسبه‌اند، فرم صریحی براساس مشاهدات نمونه دارند و برخلاف برآوردگرهای گشتاوری به طور یکتا وجود دارند. توزیع مجانبی آنها برای به دست آوردن فاصله اطمینان پارامترهای مجهول به کار می‌رود. کارایی این برآوردگرها با شبیه‌سازی مونت-کارلو قابل ارزیابی است.

## ۲ برآورد پارامترها به روش گرافیکی

در این قسمت تکنیک گرافیکی ساده‌ای برای استنباط پارامترهای این توزیع ارائه می‌شود. این ایده در واقع همان نمودار احتمال است و پارامترها از طریق عرض از مبدأ و شیب خط برازش داده شده بر داده‌ها

<sup>11</sup> Guirad et al.

<sup>12</sup> Chang and Tang

بنابراین  $r = k(\circ)$  است. MLE پارامتر  $\beta$  که با  $\hat{\beta}$  نشان می‌دهیم از حل تنها ریشه مثبت معادله زیر به دست می‌آید

$$\beta^2 - \beta \left[ \frac{2n}{\sum_{i=1}^n t_i^{-1}} + \frac{n}{\sum_{i=1}^n (\beta + t_i)^{-1}} + \frac{n}{\sum_{i=1}^n t_i} \left[ \frac{n}{\sum_{i=1}^n (\beta + t_i)^{-1}} + \frac{\sum_{i=1}^n t_i}{n} \right] \right] = 0,$$

با در نظر گرفتن روابط بیان شده داریم

$$\beta^2 - \beta[2r + k(\beta)] + r[s + k(\beta)] = 0, \quad (8)$$

برآورد ماکسیمم درست‌نمایی  $\alpha$  نیز به سادگی به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\hat{\alpha} = \left[ \frac{s}{\hat{\beta}} + \frac{\hat{\beta}}{r} - 2 \right]^{1/2},$$

انگلهارت (۱۹۸۱) نشان داد  $\hat{\beta}$  و  $\hat{\alpha}$  دارای توزیع مجانبی نرمال دومتغیره است و داریم

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix} \sim N \left[ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\alpha^2}{2n} & 0 \\ 0 & \frac{\beta^2}{n(0.25 + \alpha^{-2} + I(\alpha))} \end{pmatrix} \right], \quad (9)$$

که در آن

$$I(\alpha) = 2 \int_0^{\infty} \{ [1 + \xi^{-1}(\alpha z)]^{-1} - 0.5 \}^2 d\Phi(z),$$

برای اثبات این ادعا معادله زیر را در نظر بگیرید

$$\xi(t) = t^{1/2} - t^{-1/2}, \quad (10)$$

به این ترتیب تابع چگالی (۷) به صورت زیر خواهد بود

$$f(t; \alpha, \beta) = (\alpha\beta)^{-1} (2\pi)^{-1/2} \xi' \left( \frac{t}{\beta} \right) \exp \left[ - (2\alpha^2)^{-1} \xi^2 \left( \frac{t}{\beta} \right) \right]. \quad (11)$$

با مشتق گرفتن از لگاریتم معادله (۱۱) نسبت به  $\alpha$  و  $\beta$  داریم

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \ln f(t; \alpha, \beta) = \alpha^{-1} \{ \alpha^{-2} [ (\frac{t}{\beta}) + (\frac{t}{\beta})^{-1} - 2 ] - 1 \}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \ln f(t; \alpha, \beta) = \beta^{-1} \{ -2^{-1} + 2^{-1} \alpha^{-2} \times [ (\frac{t}{\beta}) + (\frac{t}{\beta})^{-1} ] + [ (\frac{t}{\beta}) + 1 ]^{-1} \}, \quad (13)$$

برای سادگی معادلات (۱۲) و (۱۳) را به ترتیب به صورت  $G_2(t; \alpha, \beta)$  و  $G_1(t; \alpha, \beta)$  نشان می‌دهیم. همچنین می‌توان نتیجه

گرفت اگر  $t$  دارای تابع چگالی (۱۱) باشد، آنگاه  $z = \alpha^{-1} \xi(t/\beta)$  دارای توزیع نرمال استاندارد است. به عبارت دیگر  $t = \alpha \xi(z)$  که در آن  $\xi^{-1}$  معکوس تابع  $\xi$  است. در این صورت

با استفاده از خواص مجموعه‌ها داریم

$$\begin{aligned} P[\underline{\alpha} \leq \alpha \leq \bar{\alpha}] &\geq P[\underline{a} \leq a \leq \bar{a}, \underline{b} \leq b \leq \bar{b}] \\ &\geq 1 - P[\{\underline{a} \leq a \leq \bar{a}\}^c] - P[\{\underline{b} \leq b \leq \bar{b}\}^c] \\ &= (1 - \gamma_1 - \gamma_2) \end{aligned}$$

بنابراین فاصله اطمینان تقریبی در سطح  $100(1 - \gamma_1 - \gamma_2)\%$  برای پارامتر  $\alpha$  به صورت زیر است

$$[\underline{\alpha}, \bar{\alpha}] = \left[ \frac{\underline{b}}{\sqrt{\underline{a}}}, \frac{\bar{b}}{\underline{a}} \right] \quad (6)$$

با استفاده از شیوه‌های رگرسیونی  $[\underline{a}, \bar{a}]$  و  $[\underline{b}, \bar{b}]$  فواصل اطمینان تقریبی به ترتیب در سطح‌های  $100(1 - \gamma_1)\%$  و  $100(1 - \gamma_2)\%$  برای  $a$  و  $b$  هستند. در ادامه مثالی برای بررسی نحوه این عملکرد این روش بیان می‌شود.

## ۳ برآوردهای ماکسیمم درست‌نمایی

برآوردهای ماکسیمم درست‌نمایی پارامترهای توزیع  $BS$  به وسیله بیرناب و ساندرز و توزیع مجانبی آن‌ها توسط انگلهارت (۱۹۸۱) به دست آمد. اگرچه  $MLE$  ها دارای خواص بهینه‌اند، اما برای یافتن آن‌ها باید معادله غیر خطی برحسب  $r$  حل کنیم. بیرناب و ساندرز چندین راهکار مفید برای حل این معادله ارائه دادند. به دلیل پیچیدگی این معادله توزیع دقیق  $MLE$  ها قابل تعیین نیست. بنابراین برای به دست آوردن فاصله اطمینان پارامترهای مجهول لازم است توزیع تقریبی آن‌ها را بدانیم.

رفتار این فواصل اطمینان تقریبی برای اندازه نمونه کوچک معلوم نیست و نیاز به بررسی‌های بیشتر دارد. فرض کنید  $t_1, \dots, t_n$  نمونه‌ای تصادفی به حجم  $n$  از توزیع  $BS$  با تابع چگالی احتمال ( $pdf$ ) زیر باشد

$$f_T(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left( - \frac{1}{2\alpha^2} \left[ \frac{t}{\beta} + \frac{\beta}{t} - 2 \right] \frac{t^{-1/2} [t + \beta]}{2\alpha\sqrt{\beta}} \right), \quad (7)$$

می‌دانیم میانگین‌های حسابی و هارمونیک به صورت زیر محاسبه می‌شوند

$$s = 1/n \sum_{i=1}^n t_i, \quad r = \left[ 1/n \sum_{i=1}^n t_i^{-1} \right]^{-1}$$

فرض کنید تابع میانگین هارمونیک  $k$  را به صورت زیر تعریف کنیم

$$k(x) = \left[ 1/n \sum_{i=1}^n (x + t_i)^{-1} \right]^{-1}; \quad x > 0$$

(MME) اولین پیشنهاد برای برآورد  $\alpha$  و  $\beta$  هستند. آن‌ها به راحتی قابل محاسبه‌اند و فرم صریحی برحسب مشاهدات نمونه دارند. برخلاف برآوردگرهای گشتاوری، برآوردگرهای گشتاوری اصلاح شده به طور یکتا وجود دارند. این برآوردگرها توسط ان‌جی و همکاران (۲۰۰۳) معرفی شد. توزیع مجانبی MME ها برای ساختن فواصل اطمینان برای پارامترهای مجهول به کار می‌روند. برای به دست آوردن برآوردگرهای گشتاوری معمول به‌ویژه در حالت دوپارامتری، گشاورهای اول و دوم جامعه را متناظر با گشتاورهای نمونه‌ای قرار می‌دهیم. این برآوردگرها با حل معادلاتی برحسب  $\alpha$  و  $\beta$  به دست می‌آیند. می‌توان نشان داد اگر ضریب تغییرات نمونه بیشتر از  $\sqrt{5}$  باشد، برآوردگرهای گشتاوری وجود ندارد و اگر ضریب تغییرات نمونه از  $\sqrt{5}$  کوچکتر باشد، برآوردگرهای گشتاوری وجود دارد، اگرچه ممکن است برآوردگرهای گشتاوری  $\beta$  یکتا نباشد. فرض کنید  $T \sim BS(\alpha, \beta)$  و تبدیل یکنوای زیر را در نظر بگیرید

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \left( \frac{T}{\beta} \right)^{1/2} - \left( \frac{T}{\beta} \right)^{-1/2} \right] \quad (17)$$

و نیز داریم

$$T = \beta(1 + 2X^2 + 2X(1 + X^2)^{1/2}).$$

تابع توزیع متغیر تصادفی  $T$  را به صورت زیر در نظر بگیرید

$$F_T(t; \alpha, \beta) = \Phi\left(\frac{1}{\alpha} \left[ \left( \frac{t}{\beta} \right)^{1/2} - \left( \frac{\beta}{t} \right)^{1/2} \right]\right); \quad t > 0, \alpha, \beta > 0 \quad (18)$$

حال از (۱۷) و (۱۸) می‌توان نتیجه گرفت که  $X$  دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس  $\frac{1}{2}\alpha^2$  است. با به کارگیری این تبدیل، امید ریاضی و واریانس به راحتی به دست می‌آید

$$E(T) = \beta(1 + \frac{1}{2}\alpha^2) \quad (19)$$

$$Var(T) = (\alpha\beta)^2(1 + \frac{5}{4}\alpha^2), \quad (20)$$

به علاوه اگر  $T$  دارای توزیع  $BS$  با پارامترهای  $\alpha$  و  $\beta$  باشد، آنگاه  $T^{-1}$  نیز دارای توزیع  $BS$  با پارامترهای  $\alpha$  و  $\beta^{-1}$  است. این مطلب با اعمال تبدیل مناسب و با استفاده از (۱۸) به سادگی اثبات می‌شود. با توجه به این ویژگی توزیع  $BS$  با استفاده از (۱۹) و (۲۰) داریم

$$E(T^{-1}) = \beta^{-1}(1 + \frac{1}{2}\alpha^2) \quad (21)$$

$G_1(t; \alpha, \beta)$  و  $G_1(\xi^{-1}(\alpha z); \alpha, 1)$  به ترتیب به صورت  $G_1(t; \alpha, \beta)$  و  $G_1(\xi^{-1}(\alpha z); \alpha, 1)$  خواهد بود.

حال برای به دست آوردن ماتریس اطلاع فیشرفرض کنید  $B_{ij}(\alpha, \beta) = E[G_i(t; \alpha, \beta)G_j(t; \alpha, \beta)]$   $i, j = 1, 2$  به سادگی می‌توان نشان داد شرایط نظم برای تابع چگالی (۱۱) برقرار است و به این ترتیب  $\hat{\alpha}$  و  $\hat{\beta}$  دارای توزیع مجانبی نرمال با میانگین‌های  $\alpha$  و  $\beta$  ماتریس کواریانس مجانبی  $\|nB_{ij}(\alpha, \beta)\|^{-1}$  است و داریم

$$B_{11}(\alpha, \beta) = \alpha^{-2}E(Z^2 - 1)^2 = 2\alpha^{-2}. \quad (14)$$

به علاوه برای هر  $\alpha$  و  $\beta$  ثابت معادله زیر تابع فردی از  $z$  است.

$$G_1(t; \alpha, \beta)G_2(t; \alpha, \beta) = \beta^{-1}G_1(\xi^{-1}(\alpha z); \alpha, 1)G_2(\xi^{-1}(\alpha z); \alpha, 1)$$

و از آنجایی که توزیعی حول صفر متقارن است داریم

$$B_{12}(\alpha, \beta) = B_{21}(\alpha, \beta) = 0 \quad (15)$$

حال عضو دیگر ماتریس کواریانس به صورت زیر به دست می‌آید

$$B_{22}(\alpha, \beta) = \int_0^\infty G_2^2(t; \alpha, \beta)f(t; \alpha, \beta)dt$$

که با ساده کردن به صورت زیر در می‌آید

$$B_{22}(\alpha, \beta) = \beta^{-2}[1/4 + \alpha^{-2} + I(\alpha)] \quad (16)$$

که در آن

$$I(\alpha) = 2 \int_0^\infty \{[1 + \xi^{-1}(\alpha z)]^{-1} - 0.5\}^2 d\Phi(z)$$

و ماتریس واریانس-کواریانس به صورت زیر به دست می‌آید

$$\|nB_{ij}(\alpha, \beta)\|^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha^2}{2n} & 0 \\ 0 & \frac{\beta^2}{n(0.75 + \alpha^{-2} + I(\alpha))} \end{pmatrix}$$

به این ترتیب رابطه (۹) برقرار است. نکته دیگر در اینجا استقلال مجانبی  $\hat{\alpha}$  و  $\hat{\beta}$  است. فاصله اطمینان مجانبی برای  $\alpha$  به سادگی از (۹) به دست می‌آید. به علاوه فاصله اطمینان مجانبی  $\beta$  به ازای مقادیر  $\alpha$  مفروض از (۹) قابل محاسبه است.

## ۴ برآوردگرهای گشتاوری تعدیل یافته

برآوردگرهای گشتاوری به سادگی قابل محاسبه نیستند و ممکن است همیشه وجود نداشته باشند یا حتی اگر موجود باشند، ممکن است یکتا نباشند. برای حل این مشکل برآوردگرهای گشتاوری اصلاح شده<sup>۱۳</sup> )

<sup>13</sup>Modified Moment estimator

که در آن

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{11} = \text{Var}(T) = (\alpha\beta)^2 \left(1 + \frac{5}{4}\alpha^2\right),$$

$$\begin{aligned} \sigma_{12} = \sigma_{21} &= \text{Cov}(T, T^{-1}) \\ &= E(1) - E(T)E(T^{-1}) = 1 - \left(1 + \frac{1}{4}\alpha^2\right)^2 \end{aligned}$$

$$\sigma_{22} = \text{Var}(T^{-1}) = \alpha^2 \beta^{-2} \left(1 + \frac{5}{4}\alpha^2\right),$$

حال لازم است توزیع توأم مجانبی زیر را به دست آوریم

$$\begin{pmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\beta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(S, R) \\ f_2(S, R) \end{bmatrix}$$

که در آن

$$f_1(x, y) = \left\{ 2 \left[ \left( \frac{x}{y} \right)^{1/2} - 1 \right] \right\}^{1/2}, \quad f_2(x, y) = (xy)^{1/2}$$

با استفاده از قضیه کرامر داریم

$$\sqrt{n} \begin{pmatrix} \tilde{\alpha} - \alpha \\ \tilde{\beta} - \beta \end{pmatrix} \sim N \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tilde{\Sigma} \right]$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} \Sigma \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} \bigg|_{x=E(T), y=E(T^{-1})} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha^2/2 & 0 \\ 0 & (\alpha\beta)^2 \left( \frac{1+\alpha^2/4}{(1+\frac{1}{4}\alpha^2)^2} \right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

که با محاسبه مشتقات زیر به دست می‌آید

$$\left. \frac{\partial f_1}{\partial x} \right|_{x=E(T), y=E(T^{-1})} = \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}},$$

$$\left. \frac{\partial f_1}{\partial y} \right|_{x=E(T), y=E(T^{-1})} = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}},$$

$$\left. \frac{\partial f_2}{\partial x} \right|_{x=E(T), y=E(T^{-1})} = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}},$$

$$\left. \frac{\partial f_2}{\partial y} \right|_{x=E(T), y=E(T^{-1})} = -\frac{\beta^2}{\sqrt{1+\alpha^2}},$$

$$\text{Var}(T^{-1}) = \alpha^2 \beta^{-2} \left(1 + \frac{5}{4}\alpha^2\right), \quad (22)$$

برای به دست آوردن برآوردگرهای گشتاوری اصلاح شده به جای استفاده از معادلات (۱۹) و (۲۰) از معادلات (۲۱) و (۲۲) استفاده می‌کنیم و آن‌ها را با برآوردهای نمونه‌ای متناظر معادل قرار می‌دهیم. در این صورت دو معادله گشتاوری به صورت زیر خواهیم داشت

$$s = \beta \left(1 + \frac{1}{4}\alpha^2\right) \quad (23)$$

$$r^{-1} = \beta^{-1} \left(1 + \frac{1}{4}\alpha^2\right) \quad (24)$$

با حل این معادلات برحسب  $\alpha$  و  $\beta$  برآوردگرهای گشتاوری اصلاح شده که با نماد  $\tilde{\alpha}$  و  $\tilde{\beta}$  نشان می‌دهیم، به صورت زیر خواهد بود

$$\tilde{\alpha} = \left\{ 2 \left[ \left( \frac{s}{r} \right)^{1/2} - 1 \right] \right\}^{1/2}$$

$$\tilde{\beta} = (sr)^{1/2}.$$

نشان می‌دهیم توزیع مجانبی  $\tilde{\alpha}$  و  $\tilde{\beta}$  نرمال دومتغیره است. یعنی داریم

$$\begin{pmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\beta} \end{pmatrix} \sim N \left[ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\alpha^2}{4n} & 0 \\ 0 & \frac{(\alpha\beta)^2}{n} \left( \frac{1+\alpha^2/4}{(1+\frac{1}{4}\alpha^2)^2} \right) \end{pmatrix} \right], \quad (25)$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود  $\tilde{\alpha}$  و  $\tilde{\beta}$  همانند برآوردگرهای ماکسیمم درستنامی به‌طور مجانبی از یکدیگر مستقل‌اند. حال به اثبات رابطه (۲۵) می‌پردازیم. فرض کنید  $T_n, \dots, T_1, T$  متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع  $BS$  با چگالی (۷) باشند. متغیرهای تصادفی  $S$  و  $R$  را به صورت زیر در نظر بگیرید

$$S = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i, \quad R = \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i^{-1} \right]^{-1},$$

با استفاده از قانون قوی اعداد بزرگ  $S$  و  $R^{-1}$  به‌طور قریب به یقین به ترتیب به  $E(T)$  و  $E(T^{-1})$  همگرا هستند. همچنین طبق قضیه حد مرکزی  $S$  و  $R^{-1}$  دارای توزیع مجانبی نرمال‌اند. به این ترتیب هر ترکیب

خطی از آن‌ها نیز دارای توزیع مجانبی نرمال است. به عبارتی

$$aS + bR^{-1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [aT_i + bT_i^{-1}],$$

برای هر مقدار  $a$  و  $b$  دارای توزیع مجانبی نرمال است. بنابراین  $(S \ R^{-1})'$  نیز دارای توزیع مجانبی نرمال دومتغیره است. به‌ویژه

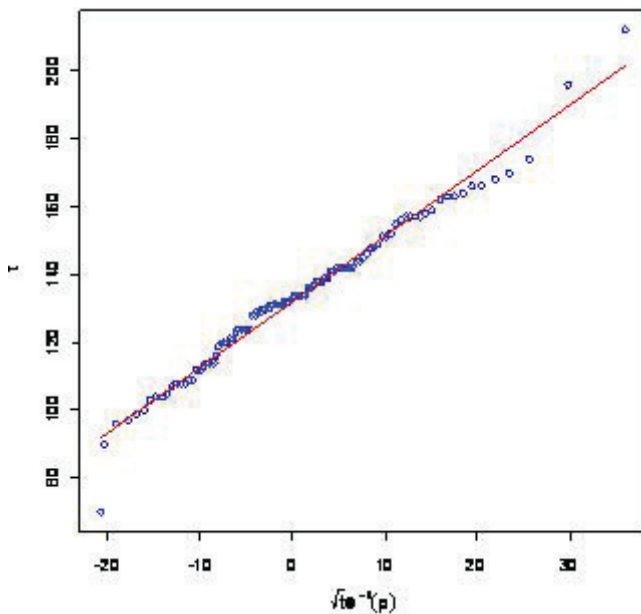
$$\sqrt{n} \begin{pmatrix} S - E(T) \\ R^{-1} - E(T^{-1}) \end{pmatrix} \sim N \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \Sigma \right]$$

## ۵ برآوردگرهای جک‌نایف

BS را دارد. فرمان  $gmbS()$  در نرم‌افزار  $R$  برای برآورد پارامترهای  $\alpha$  و  $\beta$  به روش گرافیکی به کار می‌رود. برآورد این پارامترها برای داده‌های فرسودگی ورق‌های آلومینیومی که به وسیله بیرنجام و ساندرز ارائه شده، به دست آمده است. این داده‌ها شامل  $n = 101$  مشاهده است که تحت بیشترین میزان استرس یعنی  $31000$  psi در  $18$  سیکل نوسانی به دست آمده است. این داده‌ها به صورت پیش فرض در بسته  $bs$  نرم‌افزار  $R$  به نام  $psi31$  موجود است. برآورد  $\alpha$  و  $\beta$  و نمودار احتمال به روش گرافیکی برای این داده‌ها به دست آمده است که در جدول ۱ و شکل ۱ ارائه شده است.

جدول ۱: برآورد  $\alpha$  و  $\beta$  به روش گرافیکی

$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$R^2$
۰.۱۶۸۶	۱۳۱.۹۲۲۴	۰.۹۷۷۲



شکل ۱: نمودار احتمال توزیع BS برای داده‌های  $psi31$

همان‌طور که مشاهده می‌شود  $R^2 = 0.977$  است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت داده‌ها دارای توزیع BS می‌باشند. این آماره که  $R^2$  شاپیرو-ویلک نامیده می‌شود، روشی برای آزمون دوری از فرض‌های توزیعی است. در حقیقت معیاری برای درستی نمودار احتمال است و مقادیر کوچک آن نشان‌دهنده انحراف از توزیع می‌باشد. با استفاده از روش حداقل مربعات شیب و عرض از مبدأ و فواصل اطمینان برای پارامترها با استفاده از معادله (۵) به دست می‌آید. همچنین در کنار نتایج حاصل از داده‌های

اساس برآوردگرهای جک‌نایف<sup>۱۴</sup> حذف دنباله‌ای نقاط از نمونه و محاسبه MLEها و MMEها با نمونه‌ای به اندازه  $n - 1$  است. با خارج کردن نقطه  $t_j$  از نمونه و محاسبه دوباره مقادیر  $r$  و  $s$  تابع  $k$  داریم

$$s(j) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1, i \neq j}^n t_j = \frac{ns - t_j}{n-1},$$

$$r(j) = \left[ \frac{1}{n-1} \sum_{i=1, i \neq j}^n t_j^{-1} \right]^{-1} = \frac{nr - t_j^{-1}}{n-1},$$

$$k(j)(x) = \left[ \frac{1}{n-1} \sum_{i=1, i \neq j}^n (x + t_j)^{-1} \right]^{-1} = \frac{nk(x) - (x + t_j)^{-1}}{n-1},$$

پس  $\hat{\beta}_j$  با محاسبه ریشه یکتای معادله زیر به دست می‌آید

$$\beta^2 - \beta[2r(j) + k(j)(\beta)] + r(j)[s(j) + k(j)(\beta)] = 0,$$

و

$$\hat{\alpha}_j = \left[ \frac{s(j)}{\hat{\beta}_j} + \frac{\hat{\beta}_j}{r(j)} - 2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

و نیز به‌طور مشابه داریم

$$\tilde{\alpha}_j = \left\{ 2 \left[ \frac{s(j)}{r(j)} \right]^{\frac{1}{2}} - 1 \right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$\tilde{\beta}_j = (s(j)r(j))^{\frac{1}{2}}$$

و با در نظر گرفتن تعاریف زیر برآوردگرهای جک‌نایف به دست می‌آید

$$\hat{\beta}_{(\cdot)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \hat{\beta}_j, \quad \hat{\alpha}_{(\cdot)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \hat{\alpha}_j,$$

$$\tilde{\beta}_{(\cdot)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \tilde{\beta}_j, \quad \tilde{\alpha}_{(\cdot)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \tilde{\alpha}_j,$$

همچنین برآوردگرهای ماکسیمم درستمایی اریبی تصحیح شده جک‌نایف که با نماد JMME نشان می‌دهیم به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\hat{\alpha}_J = n\hat{\alpha} - (n-1)\hat{\alpha}_{(\cdot)}, \quad \hat{\beta}_J = n\hat{\beta} - (n-1)\hat{\beta}_{(\cdot)},$$

برای جزئیات بیشتر به افرون<sup>۱۵</sup> (۱۹۸۲) مراجعه کنید. JMMEهای

پارامترهای  $\alpha$  و  $\beta$  نیز به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\tilde{\alpha}_J = n\tilde{\alpha} - (n-1)\tilde{\alpha}_{(\cdot)}, \quad \tilde{\beta}_J = n\tilde{\beta} - (n-1)\tilde{\beta}_{(\cdot)},$$

## ۶ بررسی دقت برآوردگرها

ابتدا مثالی عددی برای چگونگی عملکرد برآوردگرها به شیوه گرافیکی بیان می‌شود. بسته  $bs$  در نرم‌افزار  $R$  قابلیت اجرای فرمان‌های توزیع

<sup>15</sup>Efron

جدول ۲ خلاصه شده است. در ادامه برآوردهای حاصل از این روش را با برآوردهای ماکسیمم درستنمایی مقایسه می‌کنیم.

کامل نتایج مشابه با داده‌های سانسور شده از راست به دست آمده است که در آن از ۲۱ داده از داده‌های کامل صرف نظر شده است. برای هر دو دسته از داده‌ها  $R^2$  به دست آمده مقدار مشابهی دارد. نتایج حاصل در

جدول ۲: برآوردهای حداقل مربعات و فواصل اطمینان ۹۰٪

داده‌ها	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$[\underline{\alpha}, \bar{\alpha}]$	$[\underline{\beta}, \bar{\beta}]$	$R^2$
داده‌های کامل	۰.۱۶۸۶	۱۳۱.۹	[۰.۱۶۳، ۰.۱۷۴]	[۱۳۱.۳، ۱۳۲.۵]	۰.۹۷۷
سانسور شده نوع II	۰.۱۷۵۰	۱۳۲.۵	[۰.۱۶۸، ۰.۱۸۲]	[۱۳۲.۰، ۱۳۳.۰]	۰.۹۶۵

که در آن  $h_T(x) = \frac{1+3/4x^2}{(1+1/2x^2)^2}$  است.

از آنجایی که برخی از برآوردها نا اریب هستند برای بررسی نحوه عملکرد آنها از معیار MSE استفاده شده است. از نتایج شبیه‌سازی واضح است که برای مقادیر مختلف نمونه و برای  $\alpha$  های نه‌چندان بزرگ MLE ها و MME ها عملکرد تقریباً یکسانی دارند. در محاسبات جداگانه که در مقاله نیامده است مشاهده شد که برآوردهای متوسط MLE ها و MME ها و انحراف استاندارد آن‌ها به ازای  $\alpha$  های کمتر از ۰/۵، تا چهار رقم اعشار برهم منطبق‌اند. در نتیجه MSE این برآوردها نیز به ازای  $\alpha$  های کمتر از ۰/۵ تا چهار رقم اعشار برهم منطبق‌اند. همچنین مشاهده شد برای  $n$  های کوچک و  $\alpha$  های بزرگ میزان اریبی زیاد است. با توجه به جدول ۳ واضح است MME ها و MML ها برای مقادیر کوچک  $\alpha$  تقریباً عملکرد یکسانی دارند و نیز مشاهده می‌کنیم با افزایش  $n$  میزان MSE کاهش می‌یابد به طوری که به ازای  $n = 50, 100$  و مقادیر  $\alpha$  کوچک تقریباً برابر صفر است. همچنین واضح است این برآوردها برای مقادیر کمتر  $\alpha$  عملکرد بهتری دارد ولی به طور کلی مقادیر میانگین توان دوم خطا برای مقادیر  $\alpha$  و  $\beta$  مفروض کم است و این نشان دهنده عملکرد نسبتاً خوب این برآوردها است.

## تقدیر و تشکر

نویسندگان مقاله از پیشنهادها و اصلاحی داوران محترم مقاله که باعث بهبود ارائه شد کمال تشکر و قدردانی را دارند.

## نتایج شبیه‌سازی مونت کارلو

برای مقایسه برآوردهای مذکور مطالعات شبیه‌سازی را برای اندازه‌های نمونه مختلف و مقادیر مختلف پارامترها انجام داده‌ایم. برای برآورد پارامترها به روش ML، MM، و گرافیکی با شبیه‌سازی فرمان‌هایی در بسته bs نرم افزار R وجود دارد. اندازه نمونه را به صورت  $\alpha = 5, 10, 20, 50, 100$  و مقادیر پارامتر شکل را به صورت  $n = 5, 10, 20, 50, 100$  و  $\beta$  پارامتر مقیاس  $\beta$  از آنجایی که  $\beta$  پارامتر مقیاس است، مقدار ثابت  $\beta$  را بدون برهم خوردن کلیت مسأله برابر ۱ اختیار می‌کنیم. همه نتایج براساس ۱۰۰۰۰ دوره به دست آمده و در جدول ۳ خلاصه شده است. با توجه به توزیع مجانبی برآوردهای ماکسیمم درستنمایی و گشتاوری اصلاح شده، فواصل اطمینان  $(1 - \gamma) \cdot 100$  برای  $\alpha$  و  $\beta$  به ترتیب به صورت زیر خواهد بود

$$\left( \hat{\alpha} \left[ \frac{z_{\gamma/2}}{\sqrt{n}} + 1 \right]^{-1}, \hat{\alpha} \left[ \frac{z_{1-\gamma/2}}{\sqrt{n}} + 1 \right]^{-1} \right),$$

$$\left( \hat{\beta} \left[ \frac{z_{\gamma/2}}{\sqrt{nh_1(\hat{\alpha})}} + 1 \right]^{-1}, \hat{\beta} \left[ \frac{z_{1-\gamma/2}}{\sqrt{nh_1(\hat{\alpha})}} + 1 \right]^{-1} \right),$$

که در آن  $h_1(x) = 0.25 + x^{-2} + I(x)$  و  $z_p$  -مین صدک توزیع نرمال استاندارد است. به طور مشابه فواصل اطمینان  $(1 - \gamma) \cdot 100$  برای  $\alpha$  و  $\beta$  براساس MME ها به صورت زیر است

$$\left( \tilde{\alpha} \left[ \frac{z_{\gamma/2}}{\sqrt{n}} + 1 \right]^{-1}, \tilde{\alpha} \left[ \frac{z_{1-\gamma/2}}{\sqrt{n}} + 1 \right]^{-1} \right),$$

$$\left( \tilde{\beta} \left[ \frac{z_{\gamma/2}}{\sqrt{nh_T(\tilde{\alpha})}} + 1 \right]^{-1}, \tilde{\beta} \left[ \frac{z_{1-\gamma/2}}{\sqrt{nh_T(\tilde{\alpha})}} + 1 \right]^{-1} \right),$$

جدول ۳: میانگین توان دوم خطا (MSE) برآوردها براساس شبیه‌سازی مونت کارلو ( $\beta = 10$ )

N	$\alpha$	برآورد $\alpha$				برآورد $\beta$			
		MLE	MME	JMLE	JMME	MLE	MME	JMLE	JMME
۵	۰.۱۰	۰.۰۰۱۲	۰.۰۰۱۲	۰.۰۰۱۴	۰.۰۰۹۸	۰.۰۰۲۰	۰.۰۰۲۰	۰.۰۰۲۰	۰.۰۰۲۰
	۰.۲۵	۰.۰۰۷۴	۰.۰۰۷۴	۰.۰۰۸۸	۰.۰۰۸۸	۰.۰۱۲۷	۰.۰۱۲۷	۰.۰۱۲۵	۰.۰۱۲۵
	۰.۵۰	۰.۰۲۹۹	۰.۰۲۹۹	۰.۰۳۵۵	۰.۰۳۵۵	۰.۰۵۱۷	۰.۰۵۱۷	۰.۰۴۹۵	۰.۰۴۹۴
	۱.۰۰	۰.۱۲۲۱	۰.۱۲۲۰	۰.۱۴۹۰	۰.۱۴۸۴	۰.۲۱۷۰	۰.۲۱۷۰	۰.۱۹۹۳	۰.۱۹۲۱
	۲.۰۰	۰.۵۲۹۱	۰.۵۲۴۲	۰.۶۹۲۷	۰.۶۶۶۸	۰.۹۶۸۳	۰.۹۷۶۳	۱.۱۱۱۸	۰.۸۸۹۵
۱۰	۰.۱۰	۰.۰۰۰۵	۰.۰۰۰۵	۰.۰۰۰۶	۰.۰۰۰۶	۰.۰۰۱۰	۰.۰۰۱۰	۰.۰۰۱۰	۰.۰۰۱۰
	۰.۲۵	۰.۰۰۳۴	۰.۰۰۳۴	۰.۰۰۳۶	۰.۰۰۳۶	۰.۰۰۶۱	۰.۰۰۶۱	۰.۰۰۶۱	۰.۰۰۶۱
	۰.۵۰	۰.۰۱۳۴	۰.۰۱۳۴	۰.۰۱۴۴	۰.۰۱۴۴	۰.۰۲۴۱	۰.۰۲۴۱	۰.۰۲۳۵	۰.۰۲۳۵
	۱.۰۰	۰.۰۵۴۷	۰.۰۵۴۶	۰.۰۵۹۳	۰.۰۵۹۳	۰.۰۹۰۲	۰.۰۹۰۲	۰.۰۸۴۴	۰.۰۸۳۱
	۲.۰۰	۰.۲۳۰۷	۰.۲۲۹۱	۰.۲۵۶۲	۰.۲۵۳۷	۰.۲۸۲۲	۰.۲۸۷۴	۰.۲۶۸۷	۰.۲۳۸۲
۲۰	۰.۱۰	۰.۰۰۰۳	۰.۰۰۰۳	۰.۰۰۰۳	۰.۰۰۰۳	۰.۰۰۰۵	۰.۰۰۰۵	۰.۰۰۰۵	۰.۰۰۰۵
	۰.۲۵	۰.۰۰۱۶	۰.۰۰۱۶	۰.۰۰۱۶	۰.۰۰۱۶	۰.۰۰۳۱	۰.۰۰۳۱	۰.۰۰۳۱	۰.۰۰۳۱
	۰.۵۰	۰.۰۰۶۴	۰.۰۰۶۴	۰.۰۰۶۶	۰.۰۰۶۶	۰.۰۱۲۲	۰.۰۱۲۲	۰.۰۱۲۰	۰.۰۱۲۰
	۱.۰۰	۰.۰۲۵۸	۰.۰۲۵۸	۰.۰۲۶۷	۰.۰۲۶۷	۰.۰۴۲۵	۰.۰۴۲۶	۰.۰۴۰۸	۰.۰۴۰۶
	۲.۰۰	۰.۱۰۶۲	۰.۱۰۵۸	۰.۱۱۰۵	۰.۱۱۰۳	۰.۱۰۹۸	۰.۱۱۳۹	۰.۱۰۱۳	۰.۰۹۹۶
۵۰	۰.۱۰	۰.۰۰۰۱	۰.۰۰۰۱	۰.۰۰۰۱	۰.۰۰۰۱	۰.۰۰۰۲	۰.۰۰۰۲	۰.۰۰۰۲	۰.۰۰۰۲
	۰.۲۵	۰.۰۰۰۶	۰.۰۰۰۶	۰.۰۰۰۶	۰.۰۰۰۶	۰.۰۰۱۳	۰.۰۰۱۳	۰.۰۰۹۳۲	۰.۰۰۱۲
	۰.۵۰	۰.۰۰۲۵	۰.۰۰۲۵	۰.۰۰۲۶	۰.۰۰۲۶	۰.۰۰۴۸	۰.۰۰۴۸	۰.۰۰۴۸	۰.۰۰۴۸
	۱.۰۰	۰.۰۱۰۲	۰.۰۱۰۲	۰.۰۱۰۳	۰.۰۱۰۳	۰.۰۱۶۲	۰.۰۱۶۳	۰.۰۱۶۰	۰.۰۱۶۰
	۲.۰۰	۰.۰۴۱۴	۰.۰۴۱۳	۰.۰۴۱۵	۰.۰۴۱۵	۰.۰۳۳۷	۰.۰۳۹۴	۰.۰۳۶۱	۰.۰۳۷۳
۱۰۰	۰.۱۰	۰.۰۰۰۰	۰.۰۰۰۰	۰.۰۰۰۱	۰.۰۰۰۱	۰.۰۰۰۱	۰.۰۰۰۱	۰.۰۰۰۱	۰.۰۰۰۱
	۰.۲۵	۰.۰۰۰۳	۰.۰۰۰۳	۰.۰۰۰۳	۰.۰۰۰۳	۰.۰۰۰۶	۰.۰۰۰۶	۰.۰۰۰۶	۰.۰۰۰۶
	۰.۵۰	۰.۰۰۱۳	۰.۰۰۱۳	۰.۰۰۱۳	۰.۰۰۱۳	۰.۰۰۲۴	۰.۰۰۲۴	۰.۰۰۲۴	۰.۰۰۲۴
	۱.۰۰	۰.۰۰۵۰	۰.۰۰۵۰	۰.۰۰۵۰	۰.۰۰۵۰	۰.۰۶۵۴۵	۰.۰۰۷۹	۰.۰۰۷۹	۰.۰۰۷۹
	۲.۰۰	۰.۰۲۰۲	۰.۰۲۰۲	۰.۰۲۰۲	۰.۰۲۰۲	۰.۰۱۸۰	۰.۰۱۸۷	۰.۰۱۷۷	۰.۰۱۸۲



## مراجع

- [1] Birnbaum, Z. W. and Saunders, S. C. (1969a). A New Family of Life Distributions. *Journal of Applied Probability*, vol. **6**, pp. 319-327.
- [2] Birnbaum, Z. W. and Saunders, S. C. (1969b). Estimation for a Family of Life Distributions With Applications to Fatigue. *Journal of Applied Probability*, vol. **6**, pp. 328-347.
- [3] Cramer, H. (1946). *Mathematical Methods of Statistics*. Princeton University Press, Princeton, USA.
- [4] Desmond, A. (1985). Stochastic Models of Failure in Random Environments. *Canadian Journal of Statistics*, vol. **13**, pp. 171-183.
- [5] Desmond, A. F. (1986). On the Relationship Between Two Fatigue-Life Models. *IEEE Transaction on Reliability*, vol. **R-35**, pp. 167-169.
- [6] Diaz-Garcia, J. A. and Leiva, V. (2005). A New Family of Life Distributions Based on Elliptically Contoured Distributions. *Journal of Statistical Planning and Inference*, vol. **128**, pp. 445-457.
- [7] Engelhardt, M.; Bain, L. J. and Wright, F. T. (1981). Inferences on the Parameters of the Birnbaum-Saunders Fatigue Life Distribution Based on Maximum Likelihood Estimation. *Technometrics* **23**, 251-255.
- [8] Guiraud, P.; Leiva, V. and Fierro, R. (2009). A Non-Central Version of The Birnbaum-Saunders Distribution for Reliability Analysis. *IEEE Transactions on Reliability*, vol. **58**, 152-160.
- [9] Leiva, V.; Sanhueza, A. and Angulo, J. M. (2009). A Length-Biased Version of the Birnbaum-Saunders Distribution With Application in Water Quality. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, vol. **23**, 299-307.
- [10] Marshall, A. W. and Olkin, I. (2007). *Life Distributions-Structure of Non-parametric, Semiparametric, and Parametric Families*. Springer, New York.
- [11] Ng, H. K.; Kundu, D. and Balakrishnan, N. (2003). Modified Moment Estimation for the Two-Parameter Birnbaum-Saunders Distribution. *Computational Statistics and Data Analysis*, vol. **43**, pp. 283-298.
- [12] Vilca-Labra, F. and Leiva, V. (2006). A New Fatigue Life Model Based on the Family of Skew-Elliptical Distributions. *Communications in Statistics Theory and Methods*, vol. **35**, pp. 229-244.