توزیع توانی دو طرفه

هژیر حومئی [۱] ، مهناز غیور [۲]، لیلا حسن زاده [۳]

چکیده:

در این مقاله خانواده‌ای جدید از توزیع‌ها با کاربرد فراوان در مهندسی مالی، معرفی شده است. این توزیع شامل توزیع‌های مهم آماری مانند توزیع مثلثی، توانی و یکنواخت است. ابتدا حالت خاصی از این توزیع در نظر گرفته شده و سپس ویژگی‌های مهم آن را بررسی نموده‌ایم. در پایان برآورد بیشینه درستنمایی را برای پارامترها به همراه مثال عددی ارائه می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: توزیع توانی، برآورد ماکسیمم تابع راستنمایی، آنتروپی.

۱ مقدمه

تحقیقات وسیع روی توزیع‌های چند ضابطه‌ای با تکیه‌گاه $(0,1)$ از کار ناداراجا (۲۰۰۵) آغاز گردید. در بین تمام کارهای بسیاری که در این باره انجام شده است به وان دورپ (۲۰۰۲) و پریز (۲۰۰۵) اشاره می‌کنیم. در این سری مقالات، کاربرد، انعطاف پذیری و کارایی این توزیع‌ها به‌طور کامل بررسی گردیده است.

اخیراً به دنبال چنین توزیع‌هایی، توزیع جدیدی با نام $GTSP$ توسط سلطانی و حومئی (۲۰۰۹) معرفی گردیده است. شکل توزیع $GTSP$ اگرچه پیچیده است ولی حالت‌های خاص آن شامل توزیع‌های مهم آماری دیگر است.

تابع چگالی $GTSP$، $f(x|\theta,n,k_1,k_2)$، به شکل زیر تعریف شده است

$$\begin{cases} \kappa_2\theta^{k_1-1}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{k_2-1}\left(1-\frac{x}{\theta}\right)^{n-k_2}F_2, & 0<x<\theta \\ \kappa_1(1-\theta)^{n-k_2}\left(\frac{1-x}{1-\theta}\right)^{n-k_1}\left(\frac{x-\theta}{1-\theta}\right)^{k_1-1}F_1, & \theta<x<1 \end{cases}$$

که در آن F_1, F_2, κ_i به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$F_2 = F(k_2-n, k_1, k_2; -\frac{x(1-\theta)}{\theta-x})$$

$$F_1 = F(1-k_1, n-k_2+1, n-k_1+1; -\frac{\theta(1-x)}{x-\theta}),$$

$$F(a,b,c;z) = K\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a}dt,$$

$$\kappa_i = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k_i)\Gamma(n-k_i+1)} \quad , \quad k = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}.$$

اگر $k_1 = 1$ و $k_2 = n$ باشد تابع چگالی $f(x|\theta,n)$، که در مهندسی مالی کاربرد فراوان دارد به شکل زیر خلاصه می‌شود

$$f(x|\theta,n) = \begin{cases} n(\frac{x}{\theta})^{n-1} & 0<x\leq\theta \\ n(\frac{1-x}{1-\theta})^{n-1} & \theta\leq x<1. \end{cases}$$

در این مقاله قصد داریم برخی خواص این تابع چگالی را بررسی کنیم.

در بخش ۲ ، توزیع توانی دو طرفه استاندارد $STSP$ معرفی شده و برخی از خواص مقدماتی این توزیع به طور خلاصه بررسی شده است. در بخش ۳ در مورد برآورد MLE برای دو پارامتر توزیع $STSP$ بحث شده است.

[۱] گروه آمار دانشگاه تبریز

[۲] گروه آمار دانشگاه تبریز

[۳] گروه آمار دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

۲ توزیع‌های توانی دوطرفه استاندارد

فرض کنید X متغیر تصادفی با تابع چگالی زیر باشد

$$f(x|\theta,n)=\begin{cases} n(\frac{x}{\theta})^{n-1} & 0<x\leq\theta \\ n(\frac{1-x}{1-\theta})^{n-1} & \theta\leq x<1. \end{cases} \qquad (1)$$

آنگاه X را توزیع توانی دو طرفه استاندارد $STSP(\theta,n)$، $0\leq\theta\leq 1$ و $n>0$، می‌نامیم که در آن n لزوماً عدد صحیح نیست. برای $0\leq\theta\leq 1$ و $n>0$، چگالی (۱) تک مدی و مد آن برابر θ است. برای $0<\theta<1$ و $0<n<1$، شکل تابع چگالی، $U-$ شکل و مد آن برابر صفر یا یک است. به ازای $n=1$ چگالی داده شده متناظر با توزیع یکنواخت $[0,1]$، به ازای $n=2$ متناظر با چگالی مثلثی در بازه $[0,1]$ و به ازای $\theta=1$ متناظر با توزیع توانی خواهد بود. با استفاده از (۱) تابع توزیع تجمعی توزیع $STSP(\theta,n)$ به شکل زیر به دست آمده است.

$$F(x|\theta,n)=\begin{cases} \theta(\frac{x}{\theta})^{n} & 0<x\leq\theta \\ 1-(1-\theta)(\frac{1-x}{1-\theta})^{n} & \theta\leq x<1. \end{cases} \qquad (2)$$

۱.۲ گشتاورها

k امین گشتاور متغیر تصادفی $STSP(\theta,n)$ به شکل ساده زیر به دست آمده است

$$E(X^k)=\frac{n\theta^{k+1}}{n+k}+\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{k-i}\frac{n}{n+i}(1-\theta)^{i+1} \qquad (3)$$

بنابراین

$$E(X)=\frac{(n-1)\theta+1}{n+1}. \qquad (4)$$

با استفاده از (۳) و (۴) نتیجه می‌شود که

$$Var(X)=\frac{n-2(n-1)\theta(1-\theta)}{(n+2)(n+1)^2}. \qquad (5)$$

میانگین توزیع $STSP$، معدل وزنی از کران پایین 0 و پارامتر مکانی θ و کران بالای ۱ می‌باشد که در آن وزن‌ها فقط تابعی از n هستند. به ازای $n=1$، (۴) برابر $\frac{1}{2}$ می‌شود که این همان میانگین توزیع یکنواخت $[0,1]$ می‌باشد و به ازای $n>1$، وزن بیشتر به مد θ و با افزایش n وزن‌های کمتری به کران‌های پایین صفر و بالای یک اختصاص داده می‌شود. زمانی که $n\to\infty$ میل می‌کند هیچ وزنی به کران‌ها اختصاص داده نمی‌شود و میانگین برابر θ می‌شود و برای $n<1$، با کم شدن n میانگین با دخالت θ کاهش می‌یابد. در حالت‌های حدی، $n\downarrow 0$، میانگین به $1-\theta$ میل می‌کند.

توضیحات بالا را می‌توان با قضیه زیر دنبال کرد. سلطانی و حومئی [۲۰۰۹] ثابت کردند که

قضیه ۱.۲. *برای عدد صحیح $n\geq 1$، $X\sim STSP(\theta,n)$ است اگر و تنها اگر*

$$X\stackrel{d}{=}U_{(1)}+\theta(U_{(n)}-U_{(1)}),\quad 0<\theta<1.$$

که در آن $U_1,\cdots,U_n$ متغیرهای تصادفی $i.i.d$ توزیع یکنواخت $[0,1]$، $U_{(n)}=max(U_1,\cdots,U_n)$ و $U_{(1)}=min(U_1,\cdots,U_n)$ می‌باشد.

۲.۲ ویژگی‌های تابع توزیع تجمعی

مشابه توزیع بتا، توزیع $STSP$ نیز دارای ویژگی‌های به طور تصادفی صعودی و نزولی [4] است.

قضیه ۲.۲. *الف) تابع توزیع تجمعی (۲) به ازای $n>1$، به طور تصادفی صعودی می‌باشد یعنی*

$$\theta_1<\theta_2,\ x\in(0,1)\Rightarrow F(x\mid\theta_1,n)>F(x\mid\theta_2,n).$$

ب) تابع توزیع تجمعی (۲) به ازای $0<n<1$، به طور تصادفی نزولی می‌باشد یعنی

$$\theta_1<\theta_2,\ x\in(0,1)\Rightarrow F(x\mid\theta_1,n)<F(x\mid\theta_2,n).$$

اثبات. الف. فرض کنید $0<\theta_1<\theta_2<1$ و $n>1$ و $x\in(0,1)$. آنگاه سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم :

۱. $0<x<\theta_1$
۲. $\theta_2<x<1$
۳. $\theta_1<x<\theta_2$.

دو حالت اول به آسانی اثبات می‌شود، بنابراین فقط حالت ۳ را بحث می‌کنیم. از (۲) نتیجه می‌شود که

$$F(x\mid\theta_1,n)=1-\frac{(1-x)^n}{(1-\theta_1)^{n-1}},F(x\mid\theta_2,n)=\frac{x^n}{\theta_2^{n-1}}.$$

[4] $Increasing\ and\ Decreasing\ Stochastically$

برای $1 > \theta_2 > \theta_1 > 0$، داریم

$$\theta_1 < x < \theta_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\theta_1}{\theta_2} < \frac{x}{\theta_2} < 1, \\ 1 > \frac{1-x}{1-\theta_1} > \frac{1-\theta_2}{1-\theta_1}. \end{cases} \tag{6}$$

با استفاده از (۶) به ازای $n > 1, x \in (0, 1)$، داریم

$$\begin{cases} 1 - x < 1 - x(\frac{x}{\theta_2})^{n-1}, \\ (1-x)(\frac{1-x}{1-\theta_1})^{n-1} < (1-x). \end{cases} \tag{7}$$

بنابراین،

$$\frac{(1-x)^n}{(1-\theta_1)^{n-1}} < 1 - \frac{x^n}{\theta_2{}^{n-1}} \Leftrightarrow 1 - \frac{(1-x)^n}{(1-\theta_1)^{n-1}} > \frac{x^n}{\theta_2^{n-1}},$$

بنابراین اثبات قسمت الف کامل می‌شود. □

۳.۲ ویژگی‌های صدک

فرض کنید x_p، صدک p-ام باشد و $F(x_p \mid \theta, n) = p$. ویژگی‌های زیر می‌تواند برای برآورد پارامتر θ مورد استفاده قرار گیرد. ویژگی‌های ۳ و ۴ شامل دو رابطه جالب بین x_p و x_{1-p} می‌باشد.

ویژگی ۱: از تابع توزیع (۲) نتیجه می‌شود که: $x_p < p \Leftrightarrow p < \theta$.

ویژگی ۲: به طور مشابه، با صرف نظر از مقدار n، $x_p = \theta \Leftrightarrow p = \theta$. در نتیجه برای همه توزیع‌های $STSP$ جرم احتمال در θ به θ و $1 - \theta$ جدا می‌شود. ویژگی ۳: مقادیری از p را در نظر بگیرید که در آن $p < min(\theta, 1 - \theta)$ باشد. با استفاده از (۲) و ویژگی ۱ داریم،

$$\frac{x_p^n}{\theta^{n-1}} = \frac{(1 - x_{1-p})^n}{(1-\theta)^{n-1}} \Leftrightarrow \frac{x_p}{1 - x_{1-p}} = (\frac{\theta}{1-\theta})^{\frac{n-1}{n}}.$$

در نتیجه نسبت $\frac{x_p}{1-x_{1-p}}$ برای $p < min(\theta, 1 - \theta)$، به p وابسته نیست.

ویژگی ۴: به طور مشابه، برای $p > max(\theta, 1 - \theta)$

$$\frac{x_{1-p}}{1 - x_p} = (\frac{\theta}{1-\theta})^{\frac{n-1}{n}}$$

مستقل از p است.

۴.۲ توزیع‌های حدی

اگر $X \sim STSP(\theta, n)$ باشد با فرض اینکه $\theta = 0$ و $n \to \infty$ میل کند، از (۴) و (۵) نتیجه می‌شود که توزیع X به توزیع تباهیده [5] در صفر همگرا می‌شود. به طور مشابه، با فرض اینکه $\theta = 1$ و $n \to \infty$ میل کند، توزیع X به توزیع تباهیده در یک همگرا و بالاخره با فرض اینکه $0 < \theta < 1$ و $n \to \infty$ میل کند، توزیع X به توزیع تباهیده در θ همگرا می‌شود. زمانی که $n \downarrow 0$ و $0 < \theta < 1$ باشد از (۳) نتیجه می‌شود که به ازای تمامی kها $lim_{n\downarrow 0} E(X^k) = (1 - \theta)$. در نتیجه زمانی که $n \downarrow 0$، $E(X^k)$ به گشتاورهای یک توزیع برنولی با جرم $1 - \theta$ در یک همگرا می‌شود. هر دوی X و متغیر تصادفی برنولی تکیه گاه متناهی دارند، بنابراین با استفاده از قضیه یکتایی برای توزیع‌های با تکیه گاه متناهی نتیجه می‌شود که توزیع برنولی با جرم $1 - \theta$ در یک، زمانی که $n \downarrow 0$ و $0 < \theta < 1$، توزیع حدی X است. این توزیع‌های حدی منطبق با توزیع‌های حدی توزیع بتا است و به عبارت دیگر انعطاف پذیری کلاس $STSP(\theta, n)$ قابل مقایسه با خانواده بتا می‌باشد.

توزیع حدی جالب دیگری می‌تواند با استفاده از ویژگی خطی زیر به دست آید.

$$Y = (n-1)A(\frac{X-\theta}{\theta}), \tag{8}$$

که در آن $A > 0$ یک ثابت مثبت دلخواه می‌باشد. از (۱) و (۸) نتیجه می‌شود که به ازای $n > 1$، $f(y \mid \theta, n, A)$ به صورت زیر خواهد بود

$$\begin{cases} \frac{n\theta}{(n-1)A}(1 + \frac{1}{(n-1)}\frac{Y}{A})^{n-1} & -(n-1)A < Y \leq 0 \\ \frac{n\theta}{(n-1)A}(1 - \frac{1}{(n-1)}\frac{\theta Y}{(1-\theta)A})^{n-1} & 0 \leq Y < \frac{(1-\theta)(n-1)A}{\theta} \end{cases}$$

با فرض اینکه $n \to \infty$ میل می‌کند، داریم : $f(y \mid \theta, n, A) \to f(y|\theta, A)$ و

$$f(y|\theta, A) = \begin{cases} \frac{\theta}{A}exp(\frac{Y}{A}) & Y \leq 0 \\ \frac{\theta}{A}exp(-\frac{\theta}{1-\theta}\frac{Y}{A}) & Y \geq 0. \end{cases}$$

در نتیجه $f(y|\theta, n, A)$ به چگالی لاپلاس نا متقارن [6] همگرا می‌شود که در آن جرم احتمالش صرف نظر از مقدار پارامتر A، در 0 به θ و $1 - \theta$ جدا می‌شود.

۵.۲ رابطه آنتروپی

رابطه آنتروپی [7] تابع چگالی احتمال پیوسته مطلق [8] نسبت به تابع جرم احتمال $g(x)$ به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$E(f : g|\Theta) = \int log\frac{f(x|\Theta)}{g(x)}\, dF(y|\Theta), \tag{9}$$

[5] *Distribution Degenerate*

[6] *Laplace Asymmetric*

[7] *Entropy Relative*

[8] *Continuous Absolute*

این رابطه یک معیار اندازه گیری برای مقایسه اطلاع واقع در توزیع‌ها است.

از روی عبارت بالا به آسانی دیده می‌شود که $E(f:g|\Theta)\geq ۰$ است و برابری برقرار می‌باشد اگر و تنها اگر در همه جا، [۹] $f(x|\Theta)=g(x)$ باشد.

ما اطلاعات واقع در توزیع‌های $STSP$ در بازه $[۰,۱]$ را بااطلاعات واقع در توزیع یکنواخت $[۰,۱]$ مقایسه می‌کنیم. رابطه آنتروپی توزیع‌های بتا نسبت به توزیع یکنواخت $[۰,۱]$ قبلا به وسیله سوفی و و رتزر[۱۰] [۴] مطالعه و بررسی شده و به نتایج زیر دست یافتند.

$$E(f:g|\alpha,\beta)=log(B(\alpha,\beta))-(\alpha-۱)(\psi(\alpha)$$
$$-\psi(\alpha+\beta))-(\beta-۱)(\psi(\beta)-\psi(\alpha+\beta))$$

که در آن

$$f(x|\alpha,\beta)=\frac{۱}{B(\alpha,\beta)}x^{\alpha-۱}(۱-x)^{\beta-۱}, \qquad (۱۰)$$

و $\alpha>۰$ و $\beta>۰$ و $B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$ و g تابع چگالی احتمال یکنواخت $[۰,۱]$ و $\psi(.)=\Gamma'(.)$ می‌باشد.

رابطه آنتروپی توزیع‌های $STSP$ نسبت به توزیع یکنواخت $[۰,۱]$ با استفاده از (۱) و (۹) به صورت زیر خواهد بود

$$E(f:g|\theta,n)=log\, n-\frac{n-۱}{n}, \qquad (۱۱)$$

که در آن f چگالی $STSP$ داده شده با (۱) است. $E(f:g|\theta,n)$ زمانی که $n=۱$ است به حداقل مقدار صفر می‌رسد و به ازای n ثابت صرف نظر از مقدار θ ثابت است یعنی هیچ اطلاعی از اطلاع واقع در توزیع $STSP$ با تغییر مقدار θ اضافه یا کم نشده است. در نتیجه رابطه آنتروپی توزیع مثلثی در بازه $[۰,۱]$ صرف نظر از موقعیت θ برابر با $log(۲)+\frac{۱}{۲}-$ می‌باشد. این موضوع خیلی ارزشمند است با توجه به اینکه توزیع $STSP$ به θ وابسته می‌باشد.

۳ روش MLE برای پارامترهای توزیع $STSP$

در این بخش روش MLE را برای برآورد پارامترهای $STSP$ بحث می‌کنیم. فرض کنید برای یک نمونه تصادفی $X=(X_۱,\cdots,X_s)$، آماره‌های ترتیبی $X_{(۱)}<\cdots<X_{(s)}$ باشند. با استفاده از تعریف، تابع ماکسیمم درستنمایی برای X به صورت زیر خواهد بود

$$L(X;\theta,n)=n^s\Big\{\frac{\prod_{i=۱}^{r}X_{(i)}\prod_{i=r+۱}^{s}(۱-X_{(i)})}{\theta^r(۱-\theta)^{s-r}}\Big\}^{n-۱}, \qquad (۱۲)$$

که در آن $X_r\leq\theta<X_{(r+۱)}$ و $X(۰)\equiv ۰$ و $X_{(S+۱)}\equiv ۱$ می‌باشد.

قضیه ۱.۰۳ *فرض کنید* $X=(X_۱,X_۲...,X_s)$ *یک نمونه تصادفی* $i.i.d$ *از توزیع* $STSP(\theta,n)$ *باشد. برآوردگرهای* MLE*،* θ *و* n *در (۱۲) به شکل زیر هستند*

$$\begin{cases}\hat{\theta}=X_{(\hat{r})}\\ \hat{n}=-\frac{s}{log\,M(\hat{r})},\end{cases} \qquad (۱۳)$$

که درآن $\hat{r}=arg\,max_{r\in\{۱,\cdots,s\}}M(r)$ *و*

$$M(r)=\prod_{i=۱}^{r-۱}\frac{X_{(i)}}{X_{(r)}}\prod_{i=r+۱}^{s}\frac{۱-X_{(i)}}{۱-X_{(r)}}. \qquad (۱۴)$$

اثبات. با استفاده از (۱۲) داریم،

$$\max_{n>۰,۰\leq\theta\leq۱}L(X;\theta,n)=\max_{n>۰}[n^s.\hat{M}^{n-۱}], \qquad (۱۵)$$

که در آن $\hat{M}$ به شکل زیر است.

$$\hat{M}=\max_{۰\leq\theta\leq۱}\Big[\frac{\prod_{i=۱}^{r}X_{(i)}\prod_{i=r+۱}^{s}(۱-X_{(i)})}{\theta^r(۱-\theta)^{s-r}}\Big], \qquad (۱۶)$$

و $X_{(r)}\leq\theta<X_{(r+۱)}$ و $X_{(۰)}\equiv ۰$ و $X_{(s+۱)}\equiv ۱$. در ادامه

$$Log[n^s\hat{M}^{n-۱}]=(n-۱)\;Log\hat{M}+s\;Log\;n\;, \qquad (۱۷)$$

$$\frac{d}{dn}log[n^s\hat{M}^{n-۱}]=log\;\hat{M}+\frac{s}{n}\;. \qquad (۱۸)$$

با برابر صفر قرار دادن معادله (۱۸)، $\hat{n}=-(\frac{s}{log\,\hat{M}})$ می‌باشد. از (۱۸) نتیجه می‌شود که

$$\frac{d}{dn}log[n^s\hat{M}^{n-۱}]>۰\Leftrightarrow\hat{n}<-\frac{s}{log\;\hat{M}}\;. \qquad (۱۹)$$

توجه کنید که به ازای $r<i$، $۱>\frac{X_{(i)}}{\theta}>۰$ و به ازای $r>i$، $۱>\frac{(۱-X_{(i)})}{(۱-\theta)}>۰$ است. در نتیجه، $۰<\hat{M}<۱$

[9] $WhereAlmost\;Every$

[10] $and\;Retzer\;Soofi$

و بنابراین $\hat{n} > ۰$ می‌باشد. با استفاده از (۱۶) می‌توانیم بنویسیم $\hat{M} = \max_{r\in\{۰,\cdots,s\}} H(r)$، که در آن

$$H(r) = \max_{X_{(r)}\le\theta\le X_{(r+۱)}} \Big[\frac{\prod_{i=۱}^{r} X_{(i)} \prod_{i=r+۱}^{s}(۱-X_{(i)})}{\theta^r(۱-\theta)^{s-r}}\Big]. \qquad (۲۰)$$

ما به طور مجزا روی سه حالت زیر بحث می‌کنیم: $r \in \{۱,\cdots,s-۱\}$ و $r=۰$ و $r=s$.

حالت $r \in \{۱,\cdots,s-۱\}$: اینجا $X_{(r)} \le \theta \le X_{(r+۱)}$ است. تابع $g(\theta) = \theta^r(۱-\theta)^{s-r}$ متناسب با چگالی بتای تک مدی[11] می‌باشد. بنابراین

$$\min_{X_{(r)}\le\theta\le X_{(r+۱)}} g(\theta) = \min_{\theta\in\{X_{(r)},X_{(r+۱)}\}} g(\theta) \qquad (۲۱)$$

و از (۲۰) داریم،

$$H(r) = \max_{r'\in\{r,r+۱\}} \prod_{i=۱}^{r'-۱} \frac{X_{(i)}}{X_{(r')}} \prod_{i=r'+۱}^{s} \frac{۱-X_{(i)}}{۱-X_{(r')}} . \qquad (۲۲)$$

حالت $r=۰$: اینجا $X_{(۱)} \le \theta \le ۰$ است. از (۲۰) داریم،

$$H(۰) = \max_{۰\le\theta\le X_{(۱)}} \Big[\prod_{i=۱}^{s} \frac{۱-X_{(i)}}{۱-\theta}\Big]. \qquad (۲۳)$$

بنابراین

$$H(۰) = \prod_{i=۱}^{s} \frac{۱-X_{(i)}}{۱-X_{(۱)}} = \prod_{i=۲}^{s} \frac{۱-X_{(i)}}{۱-X_{(۱)}}. \qquad (۲۴)$$

حالت $r=s$: اینجا $X_{(s)} \le \theta \le ۱$ است. از (۲۰) داریم،

$$H(s) = \max_{X_{(s)}\le\theta\le ۱} \Big[\prod_{i=۱}^{s} \frac{X_{(i)}}{\theta}\Big]. \qquad (۲۵)$$

بنابراین

$$H(s) = \prod_{i=۱}^{s} \frac{X_{(i)}}{X_{(s)}} = \prod_{i=۱}^{s-۱} \frac{X_{(i)}}{X_{(s)}}. \qquad (۲۶)$$

از (۲۲)، (۲۴) و (۲۶) نتیجه می‌شود که $\hat{M} = max_{r\in\{۱,\cdots,s\}} M(r)$ است، که در آن

$$M(r) = \prod_{i=۱}^{r-۱} \frac{X_{(i)}}{X_{(r)}} \prod_{i=r+۱}^{s} \frac{۱-X_{(i)}}{۱-X_{(r)}} . \qquad (۲۷)$$

باید به این نکته اشاره کنیم زمانی که $\hat{r} = arg\ max_{r\in\{۱,\cdots,s\}} M(r)$، $\hat{M}$ به $\hat{\theta} = X_{(\hat{r})}$ می‌رسد.

□

حال روش برآورد MLE برای توزیع $STSP(\theta,n)$ را با استفاده از آماره‌های ترتیبی ساختگی $(X_{(۱)},\cdots,X_{(۱۰)})$ زیر توضیح می‌دهیم.

(۰/۳۴۰، ۰/۳۹۵، ۰/۴۱۳، ۰/۴۲۰،۰/۴۲۳،
۰/۴۲۹، ۰/۴۶۵، ۰/۵۱۳، ۰/۵۶۴، ۰/۵۸۸)

ماتریس $A = [a_{i,r}]$ را در نظر بگیرید که در آن

$$a_{i,r} = \begin{cases} \frac{x_{(i)}}{x_{(r)}} & i < r \\ \frac{۱-x_{(i)}}{۱-x_{(r)}} & i \ge r. \end{cases}$$

جدول ۱ خلاصه‌ای از محاسبه ماتریس A را برای آماره‌های ترتیبی $(X_{(۱)},\cdots,X_{(۱۰)})$ ارائه می‌دهد. ردیف آخر جدول شامل حاصلضرب عناصر واقع در r امین ستون ماتریس می‌باشد که برابر مقادیر $M(r)$ داده شده بوسیله (۲۷) می‌باشند. محاسبات عددی نتیجه می‌دهد که

$$\hat{\mu} = ۰/۳۰۴, \hat{r} = ۵$$

$$\hat{\theta} = X_{(\hat{r})} = ۰/۴۲۳$$

$$\hat{n} = \frac{-۱۰}{log(\hat{M})} = ۸/۳۹۹$$

برآورد ماکسیمم درستنمایی برای توزیع $X \sim STSP(\theta,n)$ می‌تواند به برآورد ماکسیمم درستنمائی دو پارامتر برای $Z \sim TSP(a,m,b,n)$ که در آن $Z=(b-a)X+a$ می‌باشد، تبدیل شود. در اینجا پارامترهای a و b ثابت هستند و پارامتر $m=(b-a)\theta+a$ است.

تابع چگالی احتمال z را به شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$f(z|a,m,b,n) = \begin{cases} \frac{n}{(b-a)}(\frac{z-a}{m-a})^{n-۱} & a < z \le m \\ \frac{n}{(b-a)}(\frac{b-z}{b-m})^{n-۱} & m \le z \le b. \end{cases} \qquad (۲۸)$$

برآوردگرهای ماکسیمم درستنمائی برای پارامترهای m و n در (۲۸) با استفاده از آماره‌های ترتیبی $(Z_{(۱)},\cdots,Z_{(s)})$ به شکل زیر به دست آمده است

$$\begin{cases} \hat{m}(a,b) = Z_{(\hat{r}(a,b))} \\ \hat{n}(a,b) = -\frac{s}{logM(a,b,\hat{r}(a,b))}, \end{cases} \qquad (۲۹)$$

که در آن همانند بالا

$$\hat{r}(a,b) = arg\ max_{r\in\{۱,\cdots,s\}}\ M(a,b,r), \qquad (۳۰)$$

و

$$M(a,b,r) = \prod_{i=۱}^{r-۱} \frac{Z_{(i)}-a}{Z_{(r)}-a} \prod_{i=r+۱}^{s} \frac{b-Z_{(i)}}{b-Z_{(r)}} . \qquad (۳۱)$$

[11] $Unimodal$

جدول ۱. مثالی از برآورد MLE برای $STSP(\theta, n)$

i	$X_{(i)}$ \ r	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	$X_{(r)}$	0.340	0.395	0.413	0.420	0.423	0.429	0.465	0.513	0.564	0.588
1	0.340	1.000	0.861	0.823	0.810	0.804	0.793	0.731	0.663	0.603	0.578
2	0.395	0.917	1.000	0.956	0.940	0.934	0.921	0.849	0.770	0.700	0.672
3	0.413	0.889	0.970	1.000	0.983	0.976	0.963	0.888	0.805	0.732	0.702
4	0.420	0.879	0.959	0.988	1.000	0.993	0.979	0.903	0.819	0.745	0.714
5	0.423	0.874	0.954	0.983	0.995	1.000	0.986	0.910	0.825	0.750	0.719
6	0.429	0.865	0.944	0.973	0.984	0.990	1.000	0.923	0.836	0.761	0.730
7	0.465	0.811	0.884	0.911	0.922	0.927	0.937	1.000	0.906	0.824	0.791
8	0.513	0.738	0.805	0.830	0.840	0.844	0.853	0.910	1.000	0.910	0.872
9	0.564	0.661	0.721	0.743	0.752	0.756	0.764	0.815	0.895	1.000	0.959
10	0.588	0.624	0.681	0.702	0.710	0.714	0.722	0.770	0.846	0.945	1.000
	$M_{(r)}$	0.134	0.252	0.293	0.303	0.304	0.299	0.239	0.159	0.093	0.068

مراجع

[1] Johnson, N.L., Kotz, S., Balakrishnan, N.(1994). *Continuous univariate distribution- 1* (2nd ed.), New York: Wiley.

[2] Nadarajah, S.(2005). On the two-sided power distribution, *Metrika*, **61**, 309-321.

[3] Perez, J.G., Rambaud, S.C., Garcia, L.G.(2005). The two-sided power distribution for the treatment of the uncertainty in PERT, *Stat. Methods Appl.*, **14,** 209-222.

[4] Soofi, E.S. and Retzer, J.J.(2002). "Information indices: unification and applications, " J*ournal of Econometrics*, **107,** 17-40.

[5] Soltani, A.R. and Homei, H.(2009). A generalization for two-sided power distributions and adjusted method of moments, *Statistics*, **43,** 611-620.

[6] Van Dorp, J.R. and Kotz, S.(2002). The standard two-sided power distribution and its properties:with applications in financial engineering, *The Amer. Statist.*, **56,** 9099.

[7] Van Dorp, J.R. and Kotz, S.(2002). A novel extension of the triangular distribution and its parameter estimation,*The Statistician* , **51,** 63-79.

[8] Williams, T.M.(1992). "Practical use of distribution in network analysis,Practical use of distribution in network analysis, "*Journal of Operations Research Society*, **43**, 265-270.