

## طراحی و تجزیه و تحلیل آزمون عمر شتابیده تنش گام به گام برای داده‌های سانسور شده

نوشین حکمی‌پور<sup>۱</sup>

تاریخ دریافت: ۹۸/۲/۲۲

تاریخ پذیرش: ۹۹/۳/۸

چکیده:

آزمون طول عمر، اغلب به مدت زمان زیادی جهت انجام آزمایش نیازمند است؛ از این رو مهندسان و آمارشناسان به دنبال کاهش زمان اجرای این آزمون‌ها هستند. یک راه برای کوتاه شدن زمان شکست، افزایش سطح تنش، در واحدهای آزمودنی می‌باشد؛ که در این صورت واحدها زودتر از زمانی که تحت شرایط طبیعی قرار می‌گیرند، با شکست مواجه می‌شوند. این روش، آزمون عمر شتابیده نامیده می‌شود. یکی از انواع متداول این آزمون‌ها، آزمون عمر شتابیده تنش گام به گام است. در این روش تنش اعمال شده به واحدهای تحت آزمون، به‌طور گام به گام و در زمان‌های از پیش تعیین شده افزایش می‌یابد. مهم‌ترین گام در مواجهه با آزمون تنش گام به گام، بهینه کردن طرح این آزمون می‌باشد. منظور از بهینه کردن طرح آزمون، انتخاب بهترین زمان برای افزایش سطح تنش است. در این مقاله، ابتدا مراحل انجام آزمون تنش گام به گام، توضیح داده می‌شود. سپس این آزمون، برای توزیع نمایی به کار برده می‌شود. از آنجا که داده‌های طول عمر، اغلب به‌طور کامل مشاهده نمی‌شوند؛ این مدل را برای داده‌های سانسور شده نوع اول به کار می‌بریم و با به حداقل رساندن واریانس مجانبی برآورد قابلیت اطمینان در زمان  $t_0$  به بهینه‌سازی طرح آزمون، می‌پردازیم. نهایتاً، نتایج با استفاده از مطالعات شبیه‌سازی و داده واقعی، مورد بررسی قرار می‌گیرند. با توجه به آنالیز حساسیت، نتیجه می‌شود که طرح بهینه این آزمون پایدار می‌باشد.

**واژه‌های کلیدی:** آزمون عمر شتابیده، آنالیز حساسیت، تنش گام به گام، توزیع نمایی، سانسور نوع اول.

### ۱ مقدمه

محققین به منظور سرعت بخشیدن به روند تجزیه و تحلیل طول عمر

محصولات، به دنبال روش‌هایی هستند که شکست محصول نسبت به شرایط طبیعی زودتر انجام شود؛ آن‌ها این کار را با افزایش سطح تنش اعمال شده به محصول انجام می‌دهند.

آزمون‌های عمر شتابیده<sup>۲</sup>، متشکل از آزمون‌هایی است که برای تعیین ویژگی‌های طول عمر یک مؤلفه و یا یک سیستم تحت شرایط استفاده‌ی طبیعی و به دنبال آن، ارائه اطلاعات قابلیت اطمینان آن به کار می‌روند. اطلاعات مربوط به قابلیت اعتماد شامل پیش‌بینی متوسط طول عمر محصول و قابلیت اعتماد آن تحت شرایط استفاده طبیعی، پیش‌بینی بازده و هزینه‌های گارانتی می‌باشد. در مجموعه‌ی این آزمون‌ها واحدهای آزمودنی در معرض تنشی بالاتر از سطح معمول قرار می‌گیرند، تا به این وسیله واحدها سریع‌تر از بین بروند؛ تنش‌هایی از قبیل: درجه حرارت، ولتاژ، فشار و ارتعاش. اطلاعات به‌دست آمده از این آزمون‌ها، بر اساس نوع رابطه‌ای که بین طول عمر با تنش وجود دارد، تجزیه و تحلیل می‌شوند. در نهایت، نتایج به‌دست آمده برای برآورد توزیع طول عمر محصول تحت شرایط استفاده طبیعی تعمیم داده

امروزه تولیدکنندگان، درصد تولید کالاهایی با کیفیت و فن‌آوری بالاتر می‌باشند که این امر منجر به بهبود بهره‌وری محصولات می‌شود. به این دلیل، امروزه بهره‌گیری از آزمایش‌هایی برای ارتقاء کیفیت و فرایند تولید محصولات، بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرد.

از این رو، بهبود فرایند طراحی و تولید محصولات برای دستیابی به قابلیت اطمینان بیشتر، مورد توجه ویژه قرار گرفته است.

البته باید توجه داشت که برآورد طول عمر، برای محصولاتی با قابلیت اطمینان بالا کار دشواری است. اغلب محصولات مدرن طوری طراحی شده‌اند که شکست در آن‌ها سال‌ها، دهه‌ها یا مدت‌های طولانی به طول می‌انجامد. به‌عنوان مثال، طراحی و ساخت ماهواره‌های ارتباطی به گونه‌ای است که ممکن است، فقط ۸ ماه برای آزمون قطعات در اختیار داشته باشیم، این در حالی است که برای این قطعات به‌طور متوسط طول عمری معادل ۱۰ تا ۱۵ سال انتظار می‌رود.

<sup>۱</sup> مرکز آموزش عالی فنی و مهندسی بوئین زهرا، بوئین زهرا، قزوین، ایران. nooshin.hakami@aut.ac.ir

<sup>۲</sup> Accelerated Life Tests

می‌شوند.

آزمون‌های عمر شتابیده انواع مختلفی دارد؛ از قبیل: تنش ثابت<sup>۳</sup>، تنش گام به گام<sup>۴</sup>، تنش فزاینده<sup>۵</sup>، تنش دوره‌ای<sup>۶</sup> و تنش تصادفی<sup>۷</sup>.

در این مقاله قصد داریم به بررسی آزمون عمر شتابیده تنش گام به گام پردازیم، که متداول‌ترین نوع آزمون‌های عمر شتابیده است.

مسئله مهم در طراحی محصول، قابلیت اعتماد آن می‌باشد. قوانین حمایت از مصرف‌کننده و مقررات مربوط به تعهدات محصول، الزامات قراردادی دولت و در نظر گرفتن زیان ناشی از هزینه‌های بالای شکست، تعمیر و برنامه ضمانت‌نامه از عوامل مهم تلاش برای تولید محصولات قابل اطمینان‌تر هستند. قابلیت اعتماد به عنوان احتمال عدم شکست یک جزء و یا سیستم در طول زمان تعریف می‌شود. پیش‌بینی دقیق و کنترل قابلیت اطمینان، نقش مهمی در برنامه‌ریزی، تعمیرات پیشگیرانه و تعیین شرایط گارانتی محصول دارد. هزینه‌های خدمات محصولات در دوره گارانتی از عوامل مهم در طراحی و فرآیند تولید است. انتخاب مناسب دوره گارانتی نیازمند اطلاعات دقیق در مورد قابلیت اعتماد محصول است. از این رو در این مقاله، تخمین قابلیت اطمینان جزء یا سیستم، تحت آزمون عمر شتابیده تنش گام به گام مورد بررسی قرار خواهد گرفت. به همین دلیل اولین قدم در تخمین قابلیت اطمینان جزء یا سیستم، تعیین تابع چگالی احتمال آن در شرایط استفاده طبیعی است. از این رو نیاز است در مورد رابطه تنش با طول عمر محصول اطلاعاتی کسب کنیم. با آگاهی از این رابطه می‌توان نتایج حاصل از آزمون عمر شتابیده را به شرایط استفاده طبیعی تعمیم داد. سپس به مدلی نیاز داریم تا بتوانیم تابع توزیع تحت آزمون تنش گام به گام را به دست آوریم. رایج‌ترین مدلی که در این زمینه مورد استفاده قرار می‌گیرد، مدل مجاورت تجمعی<sup>۸</sup> است که برای اولین بار توسط نلسون [۹] در سال ۱۹۸۰ ارائه شد. در زیر بخش ۳.۳، به توضیح این مدل که به اختصار با *CE* نمایش داده می‌شود، می‌پردازیم.

در بسیاری از موارد در آزمون‌های طول عمر از قبیل آزمایش‌های کلینیکی مربوط به تأثیر دوز سم‌ها، تحقیقات زیست‌شناسی، آنالیز بقا و دیگر زمینه‌های کاربردی علم آمار، نمونه‌هایی وجود دارند که همه مشاهدات ثبت‌نشده‌اند یا همه واحدهای نمونه به نتیجه نرسیده‌اند. این محدودیت‌ها ممکن است به صورت اختیاری توسط مشاهده‌گر اعمال شوند یا ماهیت آزمایش طوری باشد که خودبه‌خود محدودیتی را در مشاهدات به وجود آورد. بعضی از محدودیت‌ها عبارت‌اند از: فرصت کم برای اعلام نتایج، طولانی شدن مدت آزمایش، عدم دسترسی به همه واحدها و یا مایوس شدن

از نتیجه دادن همه واحدها. این محدودیت پیش‌آمده در نمونه‌ها، سانسور نامیده می‌شود.

تعداد مشاهدات سانسور شده ممکن است درصد بزرگی از کل مشاهدات موجود در نمونه تحت مطالعه را تشکیل دهند، از این رو در کاربردهای عملی نمی‌توان از سانسور صرف‌نظر کرد. با توجه به اینکه داده‌های طول عمر غالباً به‌طور کامل مشاهده نمی‌شوند، مدل مورد بررسی در این مقاله بر روی داده‌های سانسور شده اعمال می‌شود.

تاکنون مطالعات زیادی بر روی آزمون عمر شتابیده تنش گام به گام انجام گرفته است. اولین مطالعات مربوط به توزیع‌های طول عمر ساده از قبیل نمایی و وایبل می‌باشد. که در این زمینه می‌توان به خمیس [۶] در سال ۱۹۹۷ و خمیس و هیگینز [۷] در سال ۱۹۹۸ اشاره کرد. با گذشت زمان این آزمون برای داده‌های سانسور شده نیز به کار برده شد؛ از قبیل لی و پن [۸] و عبدالحمیدا و الحسینی [۱]. اخیراً مقالات زیادی در این زمینه ارائه شده که این آزمون را برای محصولات با توزیع‌های طول عمر پیچیده‌تر و تحت سانسورهای مختلف به کار برده‌اند و با در نظر گرفتن معیارهای مختلف به بهینه کردن طرح آزمون حاصل پرداخته‌اند؛ که در این مورد نیز می‌توان به مقالات حکمی پور و رضایی [۴، ۳] در سال‌های ۲۰۱۵ و ۲۰۱۷ اشاره کرد.

در بخش ۲، به توضیح آزمون عمر شتابیده تنش گام به گام پرداخته می‌شود. در بخش ۳، مراحل طراحی این آزمون مورد بررسی قرار می‌گیرد. در بخش ۴ آزمون تنش گام به گام، برای محصولاتی که طول عمر آن‌ها از توزیع نمایی تبعیت می‌کند، مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این قسمت برای نمایش نتایج و آنالیز حساسیت، از مطالعات شبیه‌سازی شده و یک مثال کاربردی بهره‌گیری شده است. نهایتاً در بخش ۵، نتایج به‌دست آمده بیان می‌شود.

## ۲ آزمون عمر شتابیده تنش گام به گام

در آزمون عمر شتابیده تنش گام به گام، که به اختصار با *SSALT* نمایش داده می‌شود، یک نمونه به‌طور پی‌درپی در معرض سطح تنشی بالاتر از حد طبیعی قرار می‌گیرد. به این صورت که یک نمونه در گام اول برای مدت زمان از پیش تعیین‌شده، در معرض تنش ثابت و مشخصی قرار می‌گیرد و اگر آن نمونه در این مدت با شکست مواجه نشد، آن را در سطح تنشی بالاتر برای زمان مشخص قرار می‌دهند. بنابراین تنش در نمونه‌ها به‌طور گام به گام افزایش

<sup>3</sup>Constant Stress

<sup>4</sup>Step Stress

<sup>5</sup>Progressive Stress

<sup>6</sup>Cyclic Stress

<sup>7</sup>Random Stress

<sup>8</sup>Cumulative Exposure Model

پس از انتخاب توزیع پایه‌ای مناسب، که با توجه به ماهیت محصولات انجام می‌شود، مرحله دوم، انتخاب کردن رابطه‌ی مناسب بین تنش و طول عمر است.

## ۲.۳ مرحله دوم: انتخاب مناسب رابطه تنش و طول عمر

از طریق فاکتور شتاب می‌توان نتایج حاصل از بررسی محصول در شرایط آزمون عمر شتابیده را به حالت استفاده در شرایط طبیعی تعمیم داد. به این صورت که اگر فاکتور شتاب را با  $AF$  و طول عمر محصول تحت شرایط شتابیده و شرایط طبیعی را به ترتیب با  $t'$  و  $t$  نمایش دهیم؛ رابطه زیر بین آن‌ها برقرار می‌شود:

$$t = AF \times t'$$

به بیان دیگر می‌توان گفت، هر ساعت کارکرد در شرایط شتابیده معادل  $AF$  ساعت کارکرد محصول در شرایط طبیعی است.

اگر مقدار فاکتور شتاب نامعلوم باشد، می‌توان قیاس ذکر شده در فوق را از طریق یک رابطه مناسب بین تنش و طول عمر، انجام داد.

اکنون باید رابطه مناسب بین سطح تنش و طول عمر محصول را تعیین کرد. با استفاده از این مدل فیزیکی، می‌توان طول عمر محصول را در سطوح مختلف تنش مورد بررسی قرار داد. مدل‌های مختلفی هستند که این رابطه را به خوبی بیان می‌کنند. مدل‌هایی که تنها برای یک سطح تنش مفید هستند، عبارت‌اند از: مدل آرهنیوس، مدل ایرینگ، مدل قدرت معکوس؛ و مدل‌هایی که برای زمانی مفیدند که چند عامل تنش به سیستم اعمال می‌شوند، عبارت‌اند از: مدل دما-رطوبت، مدل دما-غیرحرارتی، مدل لگ خطی و مدل مخاطره متناسب.

انتخاب مناسب این مدل، با توجه به نوع تنش می‌باشد. به عنوان مثال، مدل آرهنیوس برای درجه حرارت، مدل ایرینگ برای رطوبت، مدل قدرت معکوس برای بارهای غیرحرارتی از قبیل ولتاژ؛ و مدل مخاطره متناسب اغلب در زمینه پزشکی استفاده می‌شود.

این موضوع تاکنون در مقالات زیادی مورد بررسی قرار گرفته است. که از مهم‌ترین آن‌ها می‌توان به نلسون [۱۰] و ژائو و السید [۱۲] اشاره کرد.

شایع‌ترین مدلی که برای رابطه طول عمر و تنش مورد استفاده قرار می‌گیرد؛ مدل لگ خطی است، که به صورت زیر می‌باشد:

$$\log(\lambda_i) = \beta_0 + \beta_1 V_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

<sup>9</sup>Simple Step Stress

<sup>10</sup>Multi-Step Stress

<sup>11</sup>Multivariate Step Stress

می‌باید تا زمانی که محصولات با شکست مواجه شوند یا آزمون با اعمال نوعی سانسور به پایان برسد. در این نوع بارگذاری تنش، چند الگوی پرکاربرد وجود دارد: تنش گام به گام ساده<sup>۹</sup>، تنش گام به گام چند مرحله‌ای<sup>۱۰</sup> و تنش گام به گام چند متغیره<sup>۱۱</sup>.

□ تنش گام به گام ساده: در این روش، آزمون عمر شتابیده تنها در دو سطح تنش مختلف انجام می‌شود.

□ تنش گام به گام چند مرحله‌ای: در این روش برخلاف تنش گام به گام ساده، واحدهای آزمودنی در  $k$  سطح تنش مختلف، مورد آزمون قرار می‌گیرند.

□ تنش گام به گام چند متغیره: واحدهای آزمودنی در معرض  $m$  عامل تنش، آزمون می‌شوند.

شکل ۱ الگوی تنش گام به گام را در سه سطح تنش  $V_1$ ،  $V_2$  و  $V_3$  نمایش می‌دهد. در این شکل نماد  $(\times)$  بیانگر محصولی است که با شکست مواجه شده است.

## ۳ مراحل عمومی طراحی آزمون عمر شتابیده تنش گام به گام

هدف اصلی تجزیه و تحلیل داده‌های طول عمر، تعیین تابع چگالی احتمال در شرایط استفاده‌ی طبیعی می‌باشد. با استفاده از تابع چگالی احتمال می‌توان معیارهای ارزیابی قابلیت اعتماد محصول را به دست آورد؛ از قبیل احتمال خرابی محصول در مدت ضمانت و تجزیه و تحلیل تابع نرخ شکست.

در تجزیه و تحلیل داده‌های طول عمر شتابیده نیز، در اولین قدم باید تابع چگالی احتمال در شرایط استفاده طبیعی را تعیین کرد. به این منظور به یک توزیع طول عمر پایه‌ای و رابطه تنش با طول عمر نیاز داریم. در زیر مراحل طراحی SSALT را بیان می‌کنیم.

## ۱.۳ مرحله اول: انتخاب توزیع طول عمر پایه‌ای

مرحله اول در طراحی آزمون عمر شتابیده گام به گام، انتخاب یک توزیع طول عمر مناسب برای هر مرحله از تنش گام به گام است. متداول‌ترین توزیع‌های طول عمر، شامل توزیع نمایی و وایبل می‌باشند؛ که در قابلیت اعتماد از اهمیت ویژه‌ای برخوردار هستند.

توزیع تجمعی  $SSALT$  حاصل از قطعه‌قطعه کردن آن به چندین تابع توزیع تجمعی آزمون عمر شتابیده با تنش ثابت، می‌باشد [۱۱].

هم‌اکنون نحوه به دست آوردن  $F_0(t)$  را توضیح می‌دهیم.

یک آزمون عمر شتابیده گام به گام را در نظر بگیرید که به محصولات در مرحله  $i$ ام تنش  $V_i$  اعمال می‌شود و این تنش از زمان  $t_{i-1}$  ( $t_0 = 0$ ) شروع می‌شود و تا زمان  $t_i$  نیز ادامه می‌یابد. تابع توزیع تجمعی زمان شکست واحدها در تنش ثابت  $V_i$  با  $F_i(t)$  نمایش داده می‌شود.

در **مرحله اول** یعنی از زمان شروع تا زمان  $t_1$  تابع  $F_0$  از رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$F_0(t) = F_1(t), \quad 0 \leq t \leq t_1.$$

در **مرحله دوم**، یک زمان شروع  $\tau_1$  وجود دارد که معادل با زمان شروع تابع توزیع در سطح تنش  $V_2$  است و با استفاده از تابع توزیع تجمعی تا لحظه  $t_1$  محاسبه می‌شود. همان‌طور که در شکل ۲ ( $b$ ) مشخص شده است، زمان  $\tau_1$  از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$F_2(\tau_1) = F_1(t_1),$$

و تابع  $F_0(t)$  در مرحله دوم از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$F_0(t) = F_2[(t - t_1) + \tau_1], \quad t_1 \leq t \leq t_2.$$

به‌طور مشابه در **مرحله سوم**، زمان شروع  $\tau_2$  وجود دارد که از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$F_3(\tau_2) = F_2(t_2 - t_1 + \tau_1),$$

و تابع  $F_0(t)$  در مرحله سوم از رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$F_0(t) = F_3[(t - t_2) + \tau_2], \quad t_2 \leq t.$$

طبق مطالب گفته‌شده در بالا، به‌طور کلی تابع توزیع  $SSALT$  در مرحله  $i$ ام از روابط زیر حاصل می‌شود:

$$F_i(\tau_{i-1}) = F_{i-1}(t_{i-1} - t_{i-2} + \tau_{i-2})$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود تابع توزیع در مرحله  $i$ ام از زمان  $\tau_{i-1}$  شروع می‌شود؛ که این زمان با توجه به تابع توزیع تجمعی به‌دست‌آمده در مرحله قبل از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$F_0(t) = F_i[(t - t_{i-1}) + \tau_{i-1}], \quad t_{i-1} \leq t \leq t_i.$$

در این رابطه،  $V_i$  بیانگر مقدار تنش در مرحله  $i$ ام و  $\lambda_i$  بیانگر هر مشخصه‌ای از طول عمر مانند میانگین، میانه یا چندک مرتبه  $p$ ام در مرحله  $i$ ام می‌باشد.  $\beta$  و  $\beta_i$  پارامترهای مجهول این مدل هستند.

### ۳.۳ مرحله سوم: انتخاب مدلی برای دستیابی به مدل تنش گام به گام

در  $SSALT$  داده‌ها از تابع توزیع تجمعی تنش گام به گام به دست می‌آیند. به‌طور معمول، ما طول عمر محصول را در شرایط طبیعی با این فرض محاسبه می‌کنیم که تنش ثابت به محصول اعمال می‌شود. پس برای تجزیه و تحلیل داده‌های حاصل از تنش گام به گام، به مدلی نیاز داریم که تابع توزیع تحت تنش گام به گام را به تابع توزیع تحت تنش ثابت مرتبط کند.

بنابراین مرحله سوم در طراحی آزمون تنش گام به گام، انتخاب مدل مناسب برای تعیین چگونگی ارتباط تابع توزیع تحت شرایط تنش گام به گام با شرایط تنش ثابت می‌باشد.

رایج‌ترین مدل مورداستفاده در این زمینه، مدل  $CE$  است. در این مدل فرض بر این است که طول عمر نمونه‌های باقی‌مانده، تنها به کسری از توزیع تجمعی واحدهایی که در حال حاضر با شکست مواجه شدند و تنش کنونی اعمال شده وابسته است؛ صرف‌نظر از چگونگی انباشته شدن این کسر تجمعی [۱۱].

شکل ۲ مدل مجاورت تجمعی را با سه سطح تنش توصیف می‌کند. شکل ۲ ( $a$ )، الگوی تنش گام به گام را با سه سطح تنش  $V_1$ ،  $V_2$  و  $V_3$  نمایش می‌دهد. همان‌طور که در شکل نشان داده‌شده، تمامی واحدهای تحت آزمایش در گام اول تا زمان از پیش تعیین‌شده  $t_1$  در معرض سطح تنش  $V_1$  قرار می‌گیرند. پس از زمان  $t_1$  واحدهای باقی‌مانده را تحت سطح تنش بالاتر  $V_2$  قرار می‌دهیم و اگر تا زمان از قبل تعیین‌شده  $t_2$  واحدهایی وجود داشتند که هنوز با شکست مواجه نشدند؛ بار دیگر سطح تنش را به  $V_3$  افزایش می‌دهیم تا همه واحدها با شکست مواجه شوند یا یکی از انواع سانسورها را اعمال کنیم. شکل ۲ ( $b$ )، تابع توزیع تجمعی را برای هر یک از سطوح تنش ثابت  $V_1$ ،  $V_2$  و  $V_3$  نمایش می‌دهد. همان‌طور که در شکل ۲ ( $c$ ) نشان داده‌شده، واحدهای تحت آزمایش در ابتدای آزمون تا رسیدن به زمان  $t_1$  از تابع توزیع تجمعی مربوط به  $V_1$  تبعیت می‌کنند و زمانی که تنش از  $V_1$  به  $V_2$  افزایش می‌یابد، واحدهای باقی‌مانده از تابع توزیع تجمعی مربوط به  $V_2$  پیروی می‌کنند. به‌طور مشابه، زمانی که تنش از  $V_2$  به  $V_3$  افزایش یابد، داده‌های باقی‌مانده از تابع توزیع تجمعی مربوط به  $V_3$  تبعیت می‌کنند.

شکل ۲ ( $c$ ) تابع توزیع تجمعی  $SSALT$  را به تصویر می‌کشد که از اینجا به بعد آن را با نماد  $F_0(t)$  نمایش می‌دهیم؛ همان‌طور که در شکل مشخص شده، تابع

۳.  $\theta_i$  که عبارت است از میانگین طول عمر محصولات در سطح تنش نام، دارای رابطه لگ خطی با تنش می‌باشد، به عبارت دیگر

$$\log(\theta_i) = \beta_0 + \beta_1 S_i \quad (2)$$

برای  $i = 0, 1, 2, \dots, k$  که  $\beta_0$  و  $\beta_1$  پارامترهای مجهولی هستند که باید برآورد شوند.

۴. مدل CE برای تعیین چگونگی ارتباط تابع توزیع، تحت شرایط تنش گام به گام با شرایط تنش ثابت استفاده می‌شود.

۵. طول عمر محصولات مورد آزمایش، متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع می‌باشند.

با بهره‌گیری از فرضیات فوق و جزئیات ارائه‌شده در بخش قبل در مورد مدل CE، تابع توزیع تجمعی یک واحد از محصول مورد آزمایش، تحت آزمون تنش گام به گام به صورت زیر می‌باشد:

$$G(t) = \begin{cases} 1 - \exp\left(-\frac{t}{\theta_1}\right), & 0 \leq t < \tau_1, \\ 1 - \exp\left(-\frac{\tau_1}{\theta_1} - \frac{t - \tau_1}{\theta_2}\right), & \tau_1 \leq t < \tau_2, \\ \vdots \\ 1 - \exp\left(-\frac{\tau_1}{\theta_1} - \frac{\tau_2 - \tau_1}{\theta_2} - \dots - \frac{t - \tau_{k-1}}{\theta_k}\right), & \tau_{k-1} \leq t \leq T. \end{cases}$$

اکنون برای راحتی، آزمون تنش گام به گام ساده را در نظر می‌گیریم. که تابع توزیع و تابع چگالی احتمال آن در زیر ارائه می‌شود:

$$G(t) = \begin{cases} 1 - \exp\left(-\frac{t}{\theta_1}\right), & 0 \leq t < \tau_1, \\ 1 - \exp\left(-\frac{\tau_1}{\theta_1} - \frac{t - \tau_1}{\theta_2}\right), & \tau_1 \leq t \leq T, \end{cases} \quad (3)$$

$$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{\theta_1} \exp\left(-\frac{t}{\theta_1}\right), & 0 \leq t < \tau_1, \\ \frac{1}{\theta_2} \exp\left(-\frac{\tau_1}{\theta_1} - \frac{t - \tau_1}{\theta_2}\right), & \tau_1 \leq t < T. \end{cases} \quad (4)$$

### ۲.۴ برآوردگر ماکسیمم درستنمایی

در این بخش برای برآورد پارامترهای مجهول  $\theta_1$  و  $\theta_2$  از روش برآورد ماکسیمم درستنمایی استفاده می‌کنیم. برای این کار به تابع درستنمایی تحت سانسور نوع اول نیاز می‌باشد که این تابع به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$L(\theta_1, \theta_2; t) \propto \prod_{j=1}^{n_1} g(t_{1j}) \prod_{j=1}^{n_2} g(t_{2j}) [1 - G(T)]^{n_c}.$$

## ۴ آزمون عمر شتابیده تنش گام به گام برای توزیع نمایی

در این بخش، قصد داریم آزمون عمر تنش گام به گام را برای محصولاتی که طول عمر آن‌ها از توزیع نمایی تبعیت می‌کند، به کار ببریم و به تحلیل مدل حاصل بپردازیم. نتایج این بخش برگرفته‌شده از پایان‌نامه چن هوا [۲] که در سال ۲۰۰۹ ارائه شد، می‌باشد. توزیع نمایی یکی از مهم‌ترین توزیع‌های آماری است که به دلیل خواصی همچون فقدان حافظه و تابع نرخ خطر ثابت، نقش مهمی را در مدل‌سازی داده‌های بقا دارد.

در نظر بگیرید، ابتدا نمونه‌ای به حجم  $n$  از محصولات، در سطح تنش  $S_1$  که مورد آزمون قرار داده می‌شوند، این کار تا زمان از پیش تعیین شده  $\tau_1$  انجام می‌شود و پس از آن، برای محصولاتی که سالم هستند، میزان تنش به  $S_2$  افزایش می‌یابد. این مرحله نیز تا زمان از پیش تعیین شده  $\tau_2$  ادامه می‌یابد. با رسیدن به این زمان، محصولاتی که هنوز دچار شکست نشده‌اند، سطح تنش بالاتری را تجربه می‌کنند و این روند به همین ترتیب ادامه می‌یابد؛ تا زمانی که محصولات سالم باقی‌مانده در سطح تنش  $S_k$  قرار می‌گیرند؛ این مرحله نیز تا زمان سانسور از پیش تعیین شده  $T$  ادامه پیدا می‌کند.  $S_0$  سطح تنش در وضعیت اجرای معمول است.

به‌طور کلی  $n_i$  شکست در زمان‌های  $t_{ij}$  و در سطح تنش  $S_i$  مشاهده می‌شوند که  $i = 1, 2, \dots, k$ ،  $j = 1, 2, \dots, n_i$  و  $n_c$  تعداد محصولات باقیمانده در این آزمایش است که با شکست مواجه نشده‌اند و سانسور می‌شوند، یعنی  $n_c = n - \sum_{i=1}^k n_i$

### ۱.۴ فرضیات پایه‌ای

فرضیات پایه‌ای عبارت‌اند از:

۱. سطوح تنش  $S_1 < S_2 < \dots < S_k$  در این آزمایش مورد استفاده قرار می‌گیرند. که برای استاندارد کردن آن‌ها از تبدیل زیر استفاده می‌کنیم:

$$x_i = \frac{S_i - S_0}{S_k - S_0}, \quad i = 1, 2, \dots, k; \quad (1)$$

که  $x_i$  در بازه  $[0, 1]$  قرار می‌گیرد.

۲. در هر سطح تنش، طول عمر محصولات مورد آزمایش از توزیع نمایی با تابع توزیع و تابع احتمال زیر تبعیت می‌کنند:

$$F(t) = 1 - \exp\left(-\frac{t}{\theta}\right), \quad t > 0$$

$$f(t) = \frac{1}{\theta} \exp\left(-\frac{t}{\theta}\right), \quad t > 0$$

که  $\theta$  پارامتر مقیاس است.

از منفی مشتقات جزئی مرتبه دوم لگاریتم تابع درستنمایی نسبت به پارامترها، امید ریاضی گرفت. که این ماتریس برای مدل مورد بررسی به صورت زیر می‌باشد:

$$F = n \begin{bmatrix} A_1(\tau) & \circ \\ \circ & A_2(\tau) \end{bmatrix}, \quad (5)$$

که

$$A_1(\tau) = \frac{1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\theta_1}\right)}{\theta_1^2},$$

$$A_2(\tau) = \frac{\exp\left(-\frac{\tau}{\theta_1}\right) \left(1 - \exp\left(-\frac{T-\tau}{\theta_2}\right)\right)}{\theta_2^2},$$

#### ۴.۴ طراحی آزمون بهینه

معیارهای مختلفی برای بهینه‌سازی طرح این آزمون مورد استفاده قرار می‌گیرند که همه آن‌ها بر مبنای ماتریس اطلاع فیشر می‌باشند. به دلیل این که پیش‌بینی قابلیت اطمینان، فاکتور مهمی در طراحی محصول است. معیاری که در این مقاله برای بهینه‌سازی در نظر گرفته شده است، عبارت است از به حداقل رساندن واریانس مجانبی برآورد قابلیت اطمینان در زمان  $t_0$  و تحت شرایط عملیاتی معمول. این معیار زمانی مورد استفاده قرار می‌گیرد که می‌خواهیم قابلیت اطمینان محصول را پیش‌بینی کنیم.

برآورد ماکسیمم درستنمایی قابلیت اطمینان در زمان  $t_0$  برای توزیع نمایی و در شرایط عملیاتی عادی، یعنی اعمال تنش  $\sigma_0$  که در زیر ارائه شده است:

$$\hat{R}_{S_0}(\xi) = \exp\left(-\frac{\xi}{\hat{\theta}_0}\right). \quad (6)$$

با توجه به رابطه بین میانگین طول عمر محصولات با تنش که در رابطه (۲) به آن اشاره شد و همچنین با توجه به سطح تنش استاندارد شده، در رابطه (۱)، می‌توان نشان داد:

$$\log \hat{\theta}_0 = \frac{\log \hat{\theta}_1 - x_1 \log \hat{\theta}_2}{1 - x_1} \quad (7)$$

با جایگذاری رابطه (۷) در رابطه (۶) داریم:

$$\hat{R}_{S_0}(\xi) = \exp\left(-\xi \exp\left(-\frac{\log \hat{\theta}_1 - x_1 \log \hat{\theta}_2}{1 - x_1}\right)\right).$$

واریانس مجانبی برآورد قابلیت اطمینان در زمان  $t_0$  و تحت شرایط عملیاتی معمول، با استفاده از روش دلتا، به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$AVar\left[\hat{R}_{S_0}(\xi)\right] = HF^{-1}H', \quad (8)$$

که  $F$ ، ماتریس اطلاع فیشر ارائه شده در (۵) می‌باشد و  $H$  عبارت است از بردار مشتقات مرتبه اول از  $\hat{R}_{S_0}(\xi)$  نسبت به  $\hat{\theta}_1$  و  $\hat{\theta}_2$ ، یعنی

که با جایگذاری توابع  $G(t)$  و  $g(t)$  از روابط (۳) و (۴)، تابع زیر حاصل می‌شود.

$$L(\theta_1, \theta_2; t) \propto \left(\frac{1}{\theta_1}\right)^{n_1} \left(\frac{1}{\theta_2}\right)^{n_2} \exp\left(-\sum_{j=1}^{n_1} \frac{t_{1j}}{\theta_1}\right) \exp\left(-\sum_{j=1}^{n_2} \left(\frac{\tau}{\theta_1} + \frac{t_{2j} - \tau}{\theta_2}\right)\right) \exp\left(-n_c \left(\frac{\tau}{\theta_1} + \frac{T - \tau}{\theta_2}\right)\right).$$

به‌طور معمول، برای تسهیل در محاسبات بهتر است از لگاریتم تابع درستنمایی به جای خود تابع درستنمایی استفاده شود. به همین دلیل، لگاریتم تابع درستنمایی محاسبه شده است، که در زیر ارائه می‌شود:

$$\ell = \log L(\theta_1, \theta_2; t) \propto -\left(n_1 \log \theta_1 + n_2 \log \theta_2 + \frac{U_1}{\theta_1} + \frac{U_2}{\theta_2}\right)$$

که

$$U_1 = \sum_{j=1}^{n_1} t_{1j} + (n_2 + n_c)\tau,$$

$$U_2 = \sum_{j=1}^{n_2} (t_{2j} - \tau) + n_c(T - \tau).$$

اگر حداقل یک شکست در بازه‌های زمانی  $[\tau, T]$  رخ دهد، برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی  $\theta_1$  و  $\theta_2$  وجود دارد. در این مورد، برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترهای  $\beta_1$  و  $\beta_2$  با استفاده از برآورد پارامترهای  $\theta_1$  و  $\theta_2$  و همچنین ویژگی پایایی برآورد ماکسیمم درستنمایی، قابل محاسبه می‌باشد.

برای به دست آوردن برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترهای  $\theta_1$  و  $\theta_2$  باید، مشتقات جزئی مرتبه اول تابع درستنمایی نسبت به پارامترهای  $\theta_1$  و  $\theta_2$  را برابر صفر قرار داد. این معادلات در زیر ارائه شده است:

$$\frac{\partial \ell}{\partial \theta_1} = -\frac{n_1}{\theta_1} + \frac{U_1}{\theta_1^2} = 0$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \theta_2} = -\frac{n_2}{\theta_2} + \frac{U_2}{\theta_2^2} = 0.$$

بنابراین، برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترهای  $\theta_1$  و  $\theta_2$  عبارت‌اند از:

$$\hat{\theta}_2 = \frac{U_2}{n_2} \text{ و } \hat{\theta}_1 = \frac{U_1}{n_1}$$

#### ۳.۴ ماتریس اطلاع فیشر

همان‌طور که می‌دانیم، یکی از ویژگی‌های برآورد خوب این است که باید واریانس این برآورد، کمترین مقدار را داشته باشد. از کاربردهای ماتریس اطلاع فیشر، تعیین واریانس برآوردگر و رفتار مجانبی برآورد ماکسیمم درستنمایی است. معکوس این ماتریس برآوردی برای ماتریس واریانس-کواریانس مجانبی می‌باشد. برای به دست آوردن ماتریس اطلاع فیشر، باید

ازای  $\eta_1 = 0.6$ ،  $\eta_2 = 0.4$ ،  $\tau^* = 0.4$  و  $x_1 = 1$  و  $x_2 = 1$  محاسبه شده است. نتایج نشان می دهد که به ازای افزایش در مقدار  $\eta_1$ ،  $\tau^*$  به آرامی افزایش می یابد و به ازای افزایش در مقدار  $\eta_2$ ،  $\tau^*$  به آرامی کاهش می یابد. به طوری که می توان گفت  $\tau^*$  نسبت به پارامترهای اولیه چندان حساس نمی باشد.

$$\frac{\partial \hat{R}_S(\xi)}{\partial \theta_1} = \frac{\xi}{\theta_1(1-x_1)} \exp(-\xi \exp(-B) - B),$$

$$\frac{\partial \hat{R}_S(\xi)}{\partial \theta_2} = -\frac{\xi x_1}{\theta_2(1-x_1)} \exp(-\xi \exp(-B) - B),$$

$$B = \frac{\log \theta_1 - x_1 \log \theta_2}{1-x_1} \quad \text{که}$$

## ۶.۴ مثال کاربردی

در این قسمت مطالب توضیح داده شده در قسمت های قبل را برای یک مجموعه داده واقعی مهندسی، مورد بررسی قرار می دهیم. داده ها از مقاله هان و بای [۵] برگرفته شده است. در این آزمون تعداد  $n = 30$  نمونه اولیه، تحت آزمون عمر شتابیده تنش گام به گام ساده، قرار می گیرند. سطوح تنش استاندارد شده برای این آزمون عبارت است از:  $x_1 = 0.8$  و  $x_2 = 0.5$  نمونه ها تا زمان سانسور  $T = 20$  مورد آزمون قرار می گیرند. با توجه به داده های به دست آمده و با استفاده از روش برآورد ماکسیمم درستنمایی، برآورد پارامترها به این صورت ارائه شده است:  $\hat{\beta}_1 = 36597$  و  $\hat{\beta}_2 = -24131$ . که با استفاده از رابطه ۲ داریم:  $\theta_1 = 34184$  و  $\theta_2 = 24531$ . در صورتی که این پارامترها را با روش ذکر شده استاندارد کنیم، داریم:  $\eta_1 = 0.1709$  و  $\eta_2 = 0.1227$ .

با توجه به معیار بهینه سازی مورد بررسی در این مقاله که در زیر بخش ۴.۴ به آن اشاره شد و با در نظر گرفتن  $\xi = 40$ ، زمان بهینه تغییر سطح تنش  $\tau^* = 98234$  محاسبه می شود. در جدول های ۱ و ۲ آنالیز حساسیت برای پارامترهای اولیه استاندارد شده  $\eta_1$  و  $\eta_2$  ارائه شده است. با توجه به جدول های ۱ و ۲، می توان نتیجه گرفت که نتیجه بررسی داده های واقعی مورد مطالعه، مشابه با داده های شبیه سازی شده است و مشاهده می شود که زمان بهینه شده، با تغییر در مقادیر اولیه، به آرامی تغییر می یابد. به عبارت دیگر می توان گفت، زمان بهینه شده،  $\tau^*$  نسبت به پارامترهای اولیه برآورد شده، چندان حساس نمی باشد.

## ۵ بحث و نتیجه گیری

در این مقاله، مراحل انجام آزمون عمر شتابیده تنش گام به گام در حالت کلی توضیح داده شده است. سپس این آزمون، برای محصولاتی با طول عمر نمایی و تحت سانسور نوع اول به کار برده شده است. برای برآورد پارامترها از روش ماکسیمم درستنمایی استفاده شده و به منظور بهبود برآورد پارامترهای مدل به بهینه سازی طرح آزمون پرداخته شده است. معیاری که در اینجا برای بهینه سازی استفاده می شود عبارت است از به حداقل رساندن واریانس مجانبی برآورد قابلیت اطمینان در زمان  $t_0$ . به علاوه با توجه به مطالعات شبیه سازی و

## ۵.۴ مطالعات شبیه سازی

در این قسمت، برای نشان دادن روند بهینه کردن طرح آزمون تنش گام به گام، از یک مثال عددی به صورت زیر استفاده شده است.

داده ها از توزیع نمایی تحت تنش گام به گام ساده به ازای مقادیر  $\theta_1 = 750$  و  $\theta_2 = 600$  و با در نظر گرفتن سانسور نوع اول در زمان  $T = 1000$  دقیقه، به منظور برآورد قابلیت اطمینان در زمان  $t_0 = 10000$  دقیقه و تحت ولتاژ ۲۰ کیلووات، تولید می شوند. به علاوه، سطوح تنش  $S_1 = 24$  و  $S_2 = 30$  کیلووات در آزمون مورد استفاده قرار می گیرند. برای اینکه بهتر بتوانیم روند طرح آزمون بهینه را به نمایش بگذاریم از مدل استاندارد، استفاده می کنیم. با بهره گیری از مدل استاندارد، زمان سانسور از مقادیر ورودی حذف می شود و تأثیر آن در پارامتر مقیاس استاندارد شده گنجانده می شود.

برای دستیابی به زمان بهینه تغییر سطح تنش که با نماد  $\tau^*$  مشخص می شود، به صورت زیر عمل می کنیم:

۱. طبق مقادیر اولیه در نظر گرفته شده سطوح تنش استاندارد شده،

$$\text{عبارت اند از: } x_1 = 0.4, x_2 = 1 \text{ و } x_0 = 0$$

۲. پارامترهای استاندارد شده مدل نیز عبارت اند از:

$$\eta_1 = \frac{\theta_1}{T} = 0.75 \text{ و } \eta_2 = \frac{\theta_2}{T} = 0.6$$

۳. با بهره گیری از نرم افزار میپل<sup>۱۲</sup> برای بهینه کردن تابع هدف (۸)، زمان بهینه استاندارد شده برای تغییر سطح تنش  $0.5840$  محاسبه می شود.

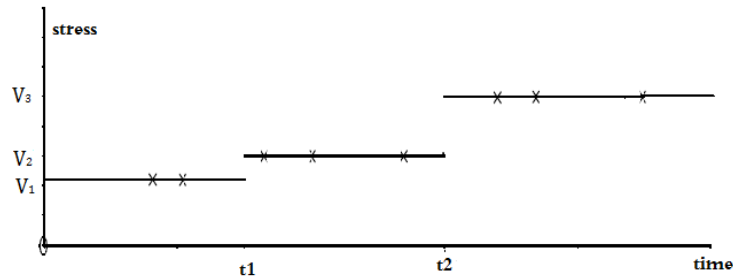
۴. با توجه به مراحل ۲ و ۳، زمان بهینه تغییر سطح تنش  $\tau^* = 584$  دقیقه محاسبه می شود.

اکنون آنالیز حساسیت را برای پارامترهای مدل انجام می دهیم. منظور از آنالیز حساسیت، بررسی تأثیر تغییر در مقادیر ورودی  $\theta_1$  و  $\theta_2$  روی زمان بهینه شده، می باشد. هدف از این تحلیل، مشخص کردن پارامترهای حساس است که برای به حداقل رساندن خطر به دست آوردن جواب بهینه نادرست، نیاز است این پارامترها با دقت بیشتری برآورد شوند. شکل ۳ نتایج آنالیز حساسیت را برای پارامترهای استاندارد شده  $\theta_1$  و  $\theta_2$  نشان می دهد.

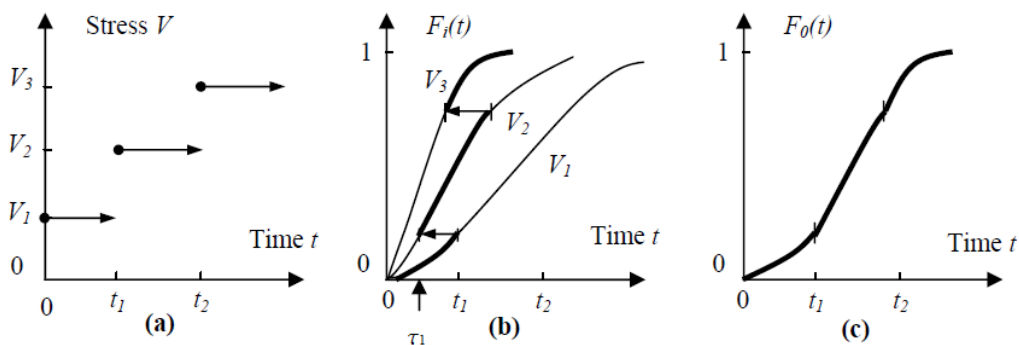
با دقت در شکل ۳، متوجه می شویم که پارامترهای  $\eta_1$  و  $\eta_2$  پارامترهای حساسی نمی باشند. در این نمودارها،  $\tau^*$  به ازای تغییر در پارامترهای اولیه به

<sup>12</sup>Maple

مثال کاربردی بحث شده، دریافتیم که زمان بهینه تغییر سطح تنش نسبت به پارامترهای مدل چندان حساس نمی‌باشد، در نتیجه طرح پیشنهادی استوار<sup>۱۳</sup> است. نتایج نشان می‌دهند که مدل آزمون عمر شتابیده تنش گام به گام، مدلی معتبر و قابل اعتماد است که در صورت استفاده از آن دیگر نیاز به بررسی تمامی محصولات نمی‌باشد و این امر منجر به صرفه‌جویی در زمان و هزینه می‌شود.



شکل ۱: مدل تنش گام به گام در سه سطح تنش



شکل ۲: مدل مجاورت تجمعی برای آزمون عمر شتابیده تنش گام به گام

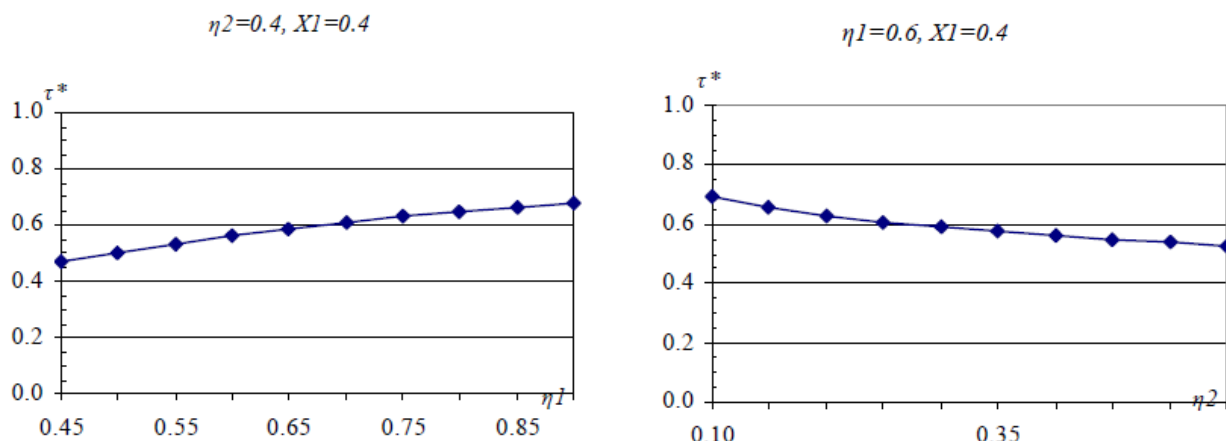
جدول ۱. زمان بهینه استاندارد شده تغییر سطح تنش در مقابل تغییر در مقدار  $\eta_1$ .

$\eta_1$	۰/۱۵	۰/۱۶	۰/۱۷	۰/۱۸	۰/۱۹	۰/۲
$\tau^*$	۹۸۸۱۹۳	۹۹۱۱۱۲	۹۹۱۱۵۶	۹۹۲۲۴۸	۹۹۳۰۰۱	۹۹۳۴۴۵

## مراجع

- [1] Abdel-Hamidas, A. H. and AL-Hussaini, E. A. (2009). Estimation in step-stress accelerated life tests for the exponential distribution with type I censoring, *Computational Statistics and Data Analysis*, **53**(4),1328–1338.





شکل ۳: زمان بهینه استاندارد شده تغییر سطح تنش در مقابل تغییر در مقادیر  $\eta_1$  و  $\eta_2$

جدول ۲. زمان بهینه استاندارد شده تغییر سطح تنش در مقابل تغییر در مقدار  $\eta_2$ .

۰/۱۵	۰/۱۴	۰/۱۳	۰/۱۲	۰/۱۱	۰/۱۰	$\eta_2$
۹/۹۰۱۸	۹/۹۱۳۸	۹/۹۲۲۸	۹/۹۲۵۴	۹/۹۳۲۱	۹/۹۴۴۲	$\tau^*$

[2] Chenhua, Li (2009). Optimal step-stress plans for accelerated life testing considering reliability/life prediction, PhD thesis, Boston, Massachusetts, Northeastern University.

[3] Hakamipour, N. and Rezaei, S. (2015). Optimal design for a bivariate simple step stress accelerated life testing model with type-II censoring and gompertz distribution, *International Journal of Information Technology & Decision Making*, **14**(6), 1243–1262.

[4] Hakamipour, N. and Rezaei, S. (2017). Optimizing the simple step stress accelerated life test with type I censored fréchet data, *REVSTAT - Statistical Journal*, **15**(1), 1–23.

[5] Han, D. and Bai, T. (2020). Design optimization of a simple step-stress accelerated life test -Contrast between continuous and interval inspections with non-uniform step durations, *Reliability Engineering & System Safety*, **199**, 106876.

[6] Khamis, I. H. (1997). Optimum m-step, step stress design with k stress variables, *Communications in Statistics- Simulation and Computation*, **26**(4), 1301–1313.

[7] Khamis, I. H. and Higgins, J. J. (1998). A new model for step-stress testing, *IEEE Transactions on Reliability*, **47**(2), 131–134.

[8] Lee, J. and Pan, R. (2008). Bayesian inference model for step-stress accelerated life testing with type II censoring, *2008 Annual Reliability and Maintainability Symposium*, 91–96, IEEE.

[9] Nelson, W. (1980). Accelerated life testing-step-stress models and data analyses, *Accelerated testing: statistical models, test plans and data analysis Reliability*, *IEEE Transactions on Reliability*, **29**(2), 103–108.

[10] Nelson, W. (1990). *Accelerated testing: statistical models, test plans and data analysis*, John Wiley & Sons.

- [11] Rinne, H. (2008). *The Weibull distribution: a handbook*, Chapman & Hall/CRC.
- [12] Zhao, W. and Elsayed, E. A. (2005). A general accelerated life model for step-stress testing, *IIE Transactions*, **37**(11), 1059–1069.