مدل‌سازی توزیع‌های تقسیم‌پذیر نامتناهی با استفاده از توابع هم‌وردا و ناوردا

مهدی شمس[۱]

تاریخ دریافت: ۱۳۹۴/۲/۱۴
تاریخ پذیرش: ۱۳۹۵/۸/۳۰

چکیده:

قضیهٔ باسو یکی از نتایج زیبا در آمار کلاسیک است. به‌طور مختصر این قضیه بیان می‌کند که اگر آمارهٔ T برای یک خانواده از اندازه‌های احتمال بسنده باشد و V یک آمارهٔ کمکی باشد، T و V مستقل هستند. یکی از کاربردهای جدید قضیه باسو در اثبات تقسیم‌پذیر نامتناهی بودن آماره‌های مشخص است. علاوه بر این قضیه، برای به کارگیری این کاربرد یک نسخه از قانون گلدی-استیوتل مورد نیاز است. با استفاده از قضیهٔ باسو یک ردهٔ بزرگ توابعی از متغیرهای تصادفی که دو تا از آن‌ها نرمال استاندارد هستند، تقسیم‌پذیر نامتناهی‌اند. نتیجهٔ دوم یک نمایش از متغیرهای تصادفی نرمال فراهم می‌کند که به‌صورت حاصل‌ضرب دو متغیر تصادفی مستقل‌اند که یکی تقسیم‌پذیر نامتناهی است و دیگری نیست.

واژه‌های کلیدی: توزیع‌های تقسیم‌پذیر نامتناهی، قانون گلدی-استیوتل، تابع هم‌وردای مقیاسی، تابع ناوردای مقیاسی.

۱ مقدمه

توزیع‌های تقسیم‌پذیر نامتناهی[۲] برای اولین بار توسط دفینیتی [۸] در سال ۱۹۲۹ معرفی شدند و پس از آن به‌طور گسترده‌تری به‌وسیله لِوی [۲۲، ۲۳]، کولموگوروف [۲۱]، خین‌چین [۱۹]، فلر [۱۰] و ایتو [۱۸] توسعه یافتند [۳۹]. در مورد تاریخچهٔ این توزیع‌ها می‌توان به لوِئو [۲۵] و گندنکو [۱۴] مراجعه کرد. مقالات مروری فیسز [۱۱] و استیوتل [۳۷، ۳۸، ۴۰] می‌توانند مراجع خوبی برای علاقه‌مندان به این توزیع‌ها باشند. بوندسون [۶] یک حالت خاص را که حاوی تعمیم‌های جالبی است، مطرح کرده است. همچنین وارد و کتی [۴۱] توزیع‌های گسستهٔ تقسیم‌پذیر نامتناهی را مدل‌بندی کرده‌اند، که به‌عنوان نمونه می‌توان برای توزیع‌های زتا به سایتو و تاناکا [۳۰] مراجعه کرد. مک‌کرودن و والکر [۲۷، ۲۸] و یاسودا [۴۲] توزیع‌های تقسیم‌پذیر نامتناهی را در فضاهای مجرد بررسی کرده‌اند. توزیع‌های تقسیم‌پذیر نامتناهی و زیرردهٔ آن‌ها یعنی توزیع‌های پایدار، در شاخه‌های مختلف علوم، مخصوصاً اقتصاد و ریاضیات مالی کاربرد دارند. ماندلبروت [۲۶] و آفیسر [۲۹] این توزیع‌ها را برای مدل‌های سهام مورد استفاده قرار دادند. گامروفسکی و راچف [۱۲] به کاربردهایی در ارزش دارایی‌های طویل‌المدت مالی یا اعتباری اشاره کرده‌اند. در تحقیقات مالی و اقتصاد، روش‌هایی برای برآورد کردن پارامترهای توزیع پایدار بیان می‌شود که برای نمونه می‌توان به آراد [۲] در زمینه بازگشت سهام، لیو و برورسن [۲۴] در زمینه مدل‌های مضنهٔ ارز خارجی مراجعه کرد که در این راستا آدلر و همکاران [۱] حاوی اطلاع مفیدی در بارهٔ این کاربردها است. توزیع‌های تقسیم‌پذیر نامتناهی اغلب برای یافتن خانواده‌ای از توزیع‌های احتمال که ممکن است یک انتخاب طبیعی برای مدل‌های حتمی باشند کاربرد دارد.

تعریف ۱.۱. متغیر تصادفی X را تقسیم‌پذیر نامتناهی گوییم، هرگاه برای هر $n \in \mathbb{N}$، متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع $X_1, \dots, X_n$ وجود داشته باشند که $X \overset{d}{=} X_1, \dots, X_n$ [۳۱].

وجه تسمیهٔ این متغیر، آن است که X به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$ به مجموع n متغیر تصادفی مستقل و هم‌توزیع تقسیم می‌شود [۷]. می‌توان نشان داد توزیع‌های تباهیده،[۳] پایدار (مانند نرمال،

[۱] گروه آمار دانشگاه کاشان

[۲] infinite divisible

[۳] degenerate

[۴] extreme value

کوشی و لِوی)، مقادیر غائی، [۴] گاما (و نمایی و خی‌دو)، پوآسون، دوجمله‌ای منفی (و هندسی)، لگ نرمال، نمایی دوگانه، پارتو، لجستیک، استیودنت و فیشر تقسیم‌پذیر نامتناهی هستند. توزیع‌های دوجمله‌ای، فوق هندسی، یکنواخت، بتا و به‌طور کلی متغیرهای تصادفی غیرتباهیده کران‌دار تقسیم‌پذیر نامتناهی نیستند. همچنین ردهٔ توزیع‌های حدی متغیرهای تصادفی مستقل، با یک خانواده از توزیع‌های تقسیم‌پذیر نامتناهی منطبق است [۱۵]. برای روشن شدن موضوع، گزارهٔ زیر می‌تواند راه‌گشا باشد.

گزارهٔ ۲.۱. متغیر تصادفی X تقسیم‌پذیر نامتناهی است اگر و تنها اگر وقتی $n \to +\infty$،

$$X_{n,1} + \cdots + X_{n,k_n} \xrightarrow{d} X$$

که در آن $\lim_{n\to+\infty} k_n = +\infty$ و برای هر n، $\{X_{n,i}\}_{i=1}^{k_n}$ متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع‌اند [۱۵].

اگر $\varphi(t)$ تابع مشخصهٔ[5] یک توزیع تقسیم‌پذیر نامتناهی باشد، برای هر $n \in \mathbb{N}$، یک تابع مشخصهٔ $\varphi_n(t)$ وجود دارد به قسمی که $\varphi(t) = (\varphi_n(t))^n$. در ذیل به برخی خواص تابع مشخصه توزیع‌های تقسیم‌پذیر نامتناهی می‌پردازیم.

اگر $\{\varphi_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ دنباله‌ای از توابع مشخصهٔ توزیع‌های تقسیم‌پذیر نامتناهی باشد:

۱. $\varphi_n(t)$ در هیچ نقطه‌ای صفر نیست.

۲. برای هر $\lambda > 0$، φ_n^λ یک تابع مشخصهٔ است و به‌علاوه $\overline{\varphi}_n$ (مزدوج مختلط φ_n) و $|\varphi_n|^2$ توابع مشخصهٔ مربوط به توزیع‌های تقسیم‌پذیر نامتناهی‌اند. همچنین $a, b \in \mathbb{R}$ وجود دارند که برای هر t، $|ln\ \varphi_n(t)| \le a + bt^2$.

۳. $\varphi_1(t)\varphi_2(t)$ تابع مشخصه یک توزیع تقسیم‌پذیر نامتناهی است.

۴. اگر $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \varphi(t)$، آن‌گاه $\varphi(t)$ تابع مشخصه یک توزیع تقسیم‌پذیر نامتناهی است.

با استفاده از خاصیت ۳ می‌توان نشان داد هر ترکیب خطی با ضرایب حقیقی از متغیرهای تصادفی مستقل یک توزیع تقسیم‌پذیر نامتناهی، خود یک توزیع تقسیم‌پذیر نامتناهی است (مثلاً با توجه به خاصیت ۲ و ۳ می‌توان نتیجه گرفت که اگر X_1 و X_2 متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع تقسیم‌پذیر نامتناهی باشند، $X_1 - X_2$ نیز تقسیم‌پذیر نامتناهی است). ولی توزیع آمیخته از توزیع‌های تقسیم‌پذیر نامتناهی لزومی ندارد تقسیم‌پذیر نامتناهی باشد. همچنین خاصیت ۴ بیان می‌کند که حد (همگرایی ضعیف) یک دنباله از توزیع‌های تقسیم‌پذیر نامتناهی، خودش تقسیم‌پذیر نامتناهی است.

مثال ۳.۱. تابع مشخصهٔ یک توزیع تباهیده در نقطهٔ a برابر است با $\varphi(t) = a^{ita}$ و در پی آن $\varphi(t) = (\varphi_n(t))^n$ که در آن $\varphi_n(t) = e^{it(a.n)}$ تابع مشخصهٔ یک توزیع تباهیده در نقطهٔ $a.n$ است.

مثال ۴.۱. تابع مشخصهٔ توزیع پوآسون با میانگین λ، یعنی $\varphi(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$ را می‌توان به‌صورت $\varphi(t) = (\varphi_n(t))^n$ نوشت که در آن $\varphi_n(t) = e^{\frac{\lambda}{n}(e^{it}-1)}$ تابع مشخصهٔ یک توزیع پوآسون با میانگین $\frac{\lambda}{n}$ است.

کولموگوروف [۲۱] قضیهٔ زیر را برای توصیف خانوادهٔ توزیع‌های تقسیم‌پذیر نامتناهی با واریانس متناهی ارائه کرد.

قضیهٔ ۵.۱. شرط لازم و کافی برای این که یک تابع توزیع با واریانس متناهی و تابع مشخصهٔ $\varphi(t)$، تقسیم‌پذیر نامتناهی باشد آن است که $ln\ \varphi(t) = i\gamma t + \int \{e^{itx} - 1 - itx\}\frac{1}{x^2}dG(x)$، که در آن γ یک عدد حقیقی ثابت و $G(x)$ یک تابع غیرنزولی با تغییرات کران‌دار است که در آن $G(-\infty) = 0$ است [۱۷].

به‌راحتی می‌توان نشان داد که در قضیهٔ ۵.۱، $EX = \gamma$ و $Var\ X = G(\mathbb{R})$ است [۱۸]. لِوی [۲۲، ۲۳]، خین‌چین [۲۰] و فلر [۹] این قضیه را در حالت کلی برای توزیع‌های تقسیم‌پذیر نامتناهی با واریانس نامتناهی نیز تعمیم دادند که گندنکو و کولموگوروف [۱۶] مرجع مناسبی برای مطالعه در این زمینه است.

مثال ۶.۱. در توزیع $N(\mu, \sigma^2)$ با قرار دادن $\gamma = \mu$ و $G(x) = \sigma^2 I_{(0,+\infty)}(x)$، داریم:

$$\begin{aligned} i\gamma t + &\int \{e^{itx} - 1 - itx\}\frac{1}{x^2}dG(x) \\ &= i\mu t + \lim_{u\to 0} \frac{e^{itu} - 1 - itu}{u^2}[G(u^+) - G(u^-)] \\ &= i\mu t - \frac{t^2\sigma^2}{2} \end{aligned} \tag{1}$$

[5] characteristic function

و از این رو طبق قضیهٔ ۵.۱ توزیع نرمال تقسیم‌پذیر نامتناهی است.

مثال ۷.۱. توزیع نمایی دوگانه با تابع چگالی احتمال $\frac{1}{2}e^{-|x|}$ و تابع مشخصهٔ $\frac{1}{1+t^2}$ تقسیم‌پذیر نامتناهی است؛ زیرا:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty}\{e^{itx}-1-itx\}\frac{1}{x^2}|x|e^{-|x|}dx
&= \int_{-\infty}^{0}\{e^{itx}-1-itx\}\frac{1}{-x}e^{x}dx \\
&\quad + \int_{0}^{+\infty}\{e^{itx}-1-itx\}\frac{1}{x}e^{-x}dx \\
&= \int_{0}^{+\infty}\{e^{itx}+e^{-itx}-2\}\frac{1}{x}e^{-x}dx \\
&= \int_{0}^{+\infty}\frac{2(cos\ tx-1)}{x}e^{-x}dx \\
&= -ln\ (1+t^2).
\end{aligned}$$

یکی از مباحث مورد علاقه در علم احتمال، ارتباط توزیع‌های تقسیم‌پذیر نامتناهی با فرایندهای تصادفی[6] به‌ویژه فرایند لِوی است. فرایند لِوی برای اولین بار توسط دفینیتی [۸] و لِوی [۲۲] معرفی شده است و در مورد ارتباط این فرایند با توزیع‌های تقسیم‌پذیر نامتناهی، برتوین [۵] و ساتو [۳۲] می‌توانند مفید باشند. بارندورف-نیلسن و همکاران [۳] فرایندهای مانای تقسیم‌پذیر نامتناهی را بررسی کرده‌اند.

تعریف ۸.۱. فرایند تصادفی $\{X_t\}_{t\geq 0}$ که مقادیر خود را در $\mathbb{R}^d$ اختیار می‌کند یک فرایند لِوی است هرگاه:

الف) فرایند از صفر شروع شود؛ یعنی تقریباً همه‌جا $X_0 = 0$.

ب) فرایند دارای نموهای مانا[7] باشد؛ یعنی برای هر $s < t$، $X_t - X_s \overset{d}{=} X_{t-s}$.

ج) فرایند دارای نموهای مستقل[8] باشد؛ یعنی برای هر $0 \leq t_1 < \cdots < t_n$، متغیرهای تصادفی $X_{t_n} - X_{t_{n-1}}, \cdots, X_{t_2} - X_{t_1}$ مستقل‌اند.

د) فرایند به‌طور تصادفی پیوسته[9] باشد؛ یعنی برای هر $\varepsilon > 0$، $\lim_{s\to 0} P(||X_{t+s} - X_t|| > \varepsilon) = 0$.

هـ) فرایند دارای خاصیت مسیر[10] باشد؛ یعنی مسیرهای نمونه‌ای[11] $t \mapsto X_t$ از راست پیوسته باشند و تقریباً همه‌جا دارای حد چپ باشند.

اگر $\{X_t\}_{t\geq 0}$ یک فرایند لِوی باشد، برای هر $t \geq 0$، متغیر تصادفی X_t تقسیم‌پذیر نامتناهی است. در نتیجه حرکت براونی،[12] فرایند پوآسون[13] و همچنین برای هر $s < t$، نمو $X_t - X_s$ تقسیم‌پذیر نامتناهی هستند. برعکس، متناظر با هر توزیع تقسیم‌پذیر نامتناهی می‌توان یک فرایند لِوی ساخت. به‌عنوان نمونه حرکت براونی، فرایند لِوی متناظر با توزیع نرمال و به‌طور مشابه فرایند پوآسون، فرایند لِوی متناظر با توزیع پوآسون است.

در بخش بعد، خاصیت تقسیم‌پذیر نامتناهی ردهٔ بزرگی از توزیع‌ها بررسی می‌شود. همچنین با استفاده از توابع هم‌وردا و ناوردا توابعی از متغیرهای تصادفی نرمال مورد بررسی قرار خواهند گرفت که تقسیم‌پذیر نامتناهی هستند یا به‌صورت حاصل‌ضرب دو متغیر تصادفی مستقل تجزیه می‌شوند که یکی از آن‌ها تقسیم‌پذیر نامتناهی است.

---

[6] stochastic processes

[7] statinary increments

[8] independent increments

[9] stochastic continuous

[10] path property

[11] sample paths

[12] brownian motion

[13] poisson process

[14] independence

[15] basu's theorem

۲ مدل‌سازی توزیع‌های تقسیم‌پذیر نامتناهی با استفاده از توابع هم‌وردا و ناوردا

در بسیاری از مسائل آماری مثل نظریهٔ برآورد و آزمون فرضیه‌ها نیاز به وجود اثبات استقلال[۱۴] دو آماره داریم. با استفاده از قضیهٔ باسو[۱۵] بدون این که توزیع توأم دو آماره محاسبه شود، با داشتن شرایط لازم، وجود این استقلال ثابت می شود. این قضیه باعث کشف ارتباط بین بسندگی، [۱۶] آماره‌های کمکی[۱۷] و استقلال می‌شود. چنانچه آمارهٔ بسنده‌ای، کامل[۱۸] باشد علاوه بر داشتن همه اطلاع لازم در بارهٔ پارامتر هیچ اطلاع بیشتری در بارهٔ آن ندارد. پس چنین آماره‌ای نمی‌تواند ارتباطی با یک آمارهٔ کمکی داشته باشد که شامل هیچ اطلاعی دربارهٔ پارامتر نیست. از این رو استقلال آمارهٔ کمکی از آمارهٔ بسنده کامل طبیعی به نظر می‌رسد.

قضیهٔ ۱.۲ (قضیهٔ باسو)**.** اگر آمارهٔ T برای خانوادهٔ توزیع‌های $P=\{P_\theta:\theta\in\Theta\}$ بسنده و به‌طور کران‌دار کامل باشد و آمارهٔ U یک آمارهٔ کمکی باشد، T و U به‌ازای هر $\theta\in\Theta$ مستقل‌اند [۴].

در این بخش می‌خواهیم به یکی از کاربردهای قضیهٔ باسو، یعنی اثبات تقسیم پذیری نامتناهی برخی آماره‌ها توسط این قضیه اشاره کنیم.

تشخیص تقسیم‌پذیر نامتناهی بودن یک متغیر تصادفی مفروض در برخی مواقع مشکل است. گلدی [۱۳] نشان داد که آمیخته‌های توزیع نمایی، تقسیم‌پذیر نامتناهی هستند [۳۱، ۳۶]. شان‌بهاگ و سریهاری [۳۳، ۳۴] و همچنین شان‌بهاگ و همکاران [۳۵] نتایج گلدی را به آمیختهٔ توزیع گاما تعمیم دادند.

تعریف ۲.۲. تابع را به‌طور کامل یکنوا[۱۹] گوییم هر گاه پیوسته و نزولی باشد و مشتقات از مرتبه‌های متوالی آن دارای علامت‌های متفاوت باشند؛ یعنی برای هر $n\in\mathbb{N}$ و هر $x\in D_f$:

$$\frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n}\frac{\partial^{n+۱} f(x)}{\partial x^{n+۱}}<۰.$$

قانون گلدی- استیوتل[۲۰] می‌تواند برای تشخیص تقسیم‌پذیر نامتناهی بودن توزیع‌ها مفید باشد.

گزارهٔ ۳.۲ (قانون گلدی- استیوتل)**.** متغیر تصادفی مثبت X با تابع چگالی f که به‌طور کامل یکنواست، تقسیم‌پذیر نامتناهی است [۳۸].

دو نتیجهٔ مهم زیر از پیامدهای این قانون هستند:

لم ۴.۲. فرض می کنیم متغیر تصادفی U دارای توزیع نمایی با میانگین ۱ باشد و متغیر تصادفی W مستقل از U باشد. آن‌گاه متغیر تصادفی UW تقسیم‌پذیر نامتناهی است [۳۸].

لم ۵.۲. اگر متغیر تصادفی V دارای توزیع نمایی با میانگین ۱ باشد، V^α که در آن $\alpha>۰$ است، به‌صورت $V^\alpha=UW$ تجزیه می‌شود که U دارای توزیع نمایی با میانگین ۱ و مستقل از W است (و از این رو با توجه به لم ۴.۲، V^α تقسیم‌پذیر نامتناهی است) [۳۸].

مثال ۶.۲. فرض می کنیم X دارای توزیع پارتو با تابع چگالی احتمال $f(x)=\frac{\alpha}{\mu}(\frac{\mu}{x+\mu})^{\alpha+۱}$ باشد. از این‌که f به‌طور کامل یکنوا است، گزارهٔ ۳.۲ تقسیم‌پذیر نامتناهی بودن X را تضمین می‌کند. با استفاده از لم ۴.۲ و انتخاب متغیر تصادفی W با توزیع گاما نیز می‌توان به این نتیجه رسید. به‌طور مشابه توابع چگالی احتمال زیر تقسیم‌پذیر نامتناهی هستند:

$$f(x)=\frac{۲ln\ (|x|)}{\pi^۲(x^۲-۱)},$$
$$f(x)=\frac{۱}{۲(۱+|x|)^۲},$$
$$f(x)=\frac{|x|-\sqrt{۲\pi}e^{\frac{۱}{۲x^۲}}\Phi(-\frac{۱}{|x|})}{\sqrt{۲\pi}|x|^۳},$$
$$f(x)=\frac{۱-\sqrt{۲\pi}|x|e^{\frac{x^۲}{۲}}\Phi(-|x|)}{\sqrt{۲\pi}},$$

که در آن Φ تابع توزیع نرمال استاندارد است.

یک تعمیم از قانون گلدی-استیوتل به این صورت است که اگر تابع چگالی متغیر تصادفی X را بتوان به‌صورت $f(x)=\int_۰^{+\infty}e^{-xt}g(t)dt$ نوشت که در آن تابع g یک بار تغییر

[۱۶] sufficiency

[۱۷] ancillary statistics

[۱۸] complete sufficient statistic

[۱۹] completely monotone

[۲۰] Goldie-Steutel Law

علامت می‌دهد، آن‌گاه X تقسیم‌پذیر نامتناهی است. همچنین شرط لازم و کافی برای این که متغیر تصادفی $X > 0$ با تابع چگالی f تقسیم‌پذیر نامتناهی باشد آن است که تابع غیرصعودی τ روی $[0, +\infty]$ با شرط $\int_1^{+\infty} u^{-1} d\tau(u) < +\infty$ وجود داشته باشد به قسمی که $f(x) = x^{-1} \int_0^x f(x-u) d\tau(u)$ [۳۸]. بررسی شرایط برقراری این گزارهٔ مشکل است و از این رو گزارهٔ زیر پیشنهاد می‌شود.

گزارهٔ ۷.۲. فرض می‌کنیم متغیر تصادفی مثبت X دارای تابع چگالی مثبت اکیداً نزولی و مشتق‌پذیر مرتبهٔ دوم پیوسته باشد. در این صورت X تقسیم‌پذیر نامتناهی است هرگاه برای هر $0 < y \leq x$:

$$\frac{f'(y)}{f(y)} \leq \frac{1}{x} + \frac{f''(x)}{f'(x)}.$$

به‌عنوان نمونه به‌راحتی می‌توان بررسی کرد که تابع چگالی توزیع نمایی در نامساوی گزارهٔ ۷.۲ صدق می‌کند. بنابراین این توزیع تقسیم‌پذیر نامتناهی است.

تعریف ۸.۲. تابع n-متغیرهٔ g را همگن[۲۱] یا هم‌وردای مقیاسی[۲۲] و تابع h را ناوردای مقیاسی[۲۳] گوییم هرگاه برای هر $c > 0$ و هر $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$،

$$g(cx_1, \cdots, cx_n) = c^n g(x_1, \cdots, x_n),$$
$$h(cx_1, \cdots, cx_n) = h(x_1, \cdots, x_n).$$

اکنون به دو نتیجهٔ اصلی مقاله می‌پردازیم. در قضیهٔ اول، تقسیم‌پذیر نامتناهی بودن یک ردهٔ بزرگ از آماره‌ها متناظر با متغیرهای تصادفی که دو تا از آن‌ها نرمال استاندارد مستقل هستند مطرح می‌شود.

قضیهٔ ۹.۲. فرض می‌کنیم Z_1 و Z_2 متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع $N(0,1)$ باشند و متغیرهای تصادفی $Z_3, \ldots, Z_n$ به‌گونه‌ای انتخاب شوند که بردارهای تصادفی $(Z_1, Z_2)^T$ و $(Z_3, \ldots, Z_n)^T$ مستقل باشند و همچنین g یک تابع دومتغیرهٔ هم‌وردای مقیاسی باشد. در این صورت برای هر $k \in \mathbb{N}$ و هر تابع دلخواه اندازه‌پذیر h، $g^k(Z_1, Z_2) h(Z_3, \ldots, Z_n)$ تقسیم‌پذیر نامتناهی است.

اثبات. قرار می‌دهیم $g(Z_1, Z_2) = TW$، به‌طوری که

$$T = \frac{Z_1^2 + Z_2^2}{2},$$
$$W = \frac{2g(Z_1, Z_2)}{Z_1^2 + Z_2^2}.$$

برای این که نشان دهیم آمارهٔ W کمکی است، تابع مشخصهٔ آن را تشکیل می دهیم:

$$\begin{aligned}
\varphi_W(t) &= E(e^{itW}) \\
&= E\left[exp\left(it\frac{2g(Z_1, Z_2)}{Z_1^2 + Z_2^2}\right)\right] \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{z_2} \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{it\frac{2g(z_1,z_2)}{z_1^2+z_2^2}} e^{-\left(\frac{z_1^2+z_2^2}{2\sigma^2}\right)} dz_1 dz_2 \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{z_2} \frac{1}{2\pi} e^{\frac{2it}{\sigma^2}\frac{g(\sigma z_1.\sigma, \sigma z_2.\sigma)}{(z_1.\sigma)^2 + (z_2.\sigma)^2}} \\
&\qquad e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{z_1}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{z_2}{\sigma}\right)^2\right]} d\left(\frac{z_1}{\sigma}\right) d\left(\frac{z_2}{\sigma}\right) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{y} \frac{1}{2\pi} e^{\frac{2it}{\sigma^2}\frac{g(\sigma x, \sigma y)}{x^2+y^2}} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dx dy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{y} \frac{1}{2\pi} e^{2it\frac{g(x,y)}{x^2+y^2}} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dx dy
\end{aligned}$$

که در تساوی آخر از هم‌وردای مقیاسی بودن تابع g (یعنی $g(\sigma x, \sigma y) = \sigma^2 g(x, y)$) استفاده کردیم. از این‌که $\varphi_W(t)$ و در پی آن توزیع W به پارامتر σ^2 بستگی ندارد، می‌توان کمکی بودن آمارهٔ W را تضمین کرد. بنابراین با به کارگیری قضیه باسو آمارهٔ کمکی W از آمارهٔ T که برای خانوادهٔ توزیع‌های $\{N(0, \sigma^2) : \sigma^2 > 0\}$ یک آمارهٔ بسنده کامل است، مستقل است. از این رو برای $\sigma = 1$، متغیرهای تصادفی W و T از هم مستقل‌اند. از این‌که T دارای توزیع نمایی با میانگین ۱ است، لم ۵.۲ نتیجه می‌دهد $T^k = UV$، که در آن U دارای توزیع نمایی با میانگین ۱ است و از V مستقل است. با به‌کارگیری لم ۴.۲،

$$\begin{aligned}
g^k(Z_1, Z_2) h(Z_3, \ldots, Z_n) &= T^k W^k h(Z_3, \ldots, Z_n) \\
&= UVW^k h(Z_3, \ldots, Z_n)
\end{aligned}$$

(که به‌صورت حاصل‌ضرب دو متغیر تصادفی مستقل U و $VW^k h(Z_3, \ldots, Z_n)$ تجزیه شده و U دارای توزیع نمایی با میانگین ۱ است) تقسیم‌پذیر نامتناهی است. □

[۲۱] homogeneous

[۲۲] scale equivariant

[۲۳] scale invariant

مثال ۱۰.۲. فرض می‌کنیم $Z_1,\dots,Z_n$ یک نمونهٔ تصادفی ازتوزیع $N(0,1)$ باشد. اختیار می‌کنیم:

$$\begin{aligned} g(a_1,a_2)&=a_1a_2,\\ h_1(a_3,\dots,a_n)&=\prod_{i=3}^{n}a_i,\\ h_2(a_3,\dots,a_n)&=\frac{a_3\dots a_k}{a_{k+1}\dots a_n},\quad n\geq 3\ ,\ 2\leq k\leq n-1. \end{aligned}$$

در این حالت، طبق قضیهٔ ۹.۲ آماره‌های

$$\begin{aligned} g(Z_1,Z_2)h_1(Z_3,\dots,Z_n)&=Z_1Z_2\dots Z_n,\\ g(Z_1,Z_2)h_2(Z_3,\dots,Z_n)&=\frac{Z_1Z_2\dots Z_k}{Z_{k+1}\dots Z_n} \end{aligned}$$

تقسیم‌پذیر نامتناهی هستند.

مثال ۱۱.۲. فرض می‌کنیم $X_n,\dots,X_1$ یک نمونهٔ تصادفی از توزیع کوشی استاندارد $C(0,1)$ باشد. در این صورت متغیرهای تصادفی مستقل $Z_n,\dots,Z_1$ با توزیع نرمال استاندارد وجود دارند به‌طوری که به‌ازای هر $i=1,\dots,n$ داریم:

$$X_i=\frac{Z_{2i-1}}{Z_{2i}}.$$

حال اگر اختیار کنیم:

$$\begin{aligned} g(a_1,a_3)&=a_1a_3,\\ h_1(a_2,a_4,\cdots,a_n)&=\frac{a_5\cdots a_{2n-1}}{a_2a_4\cdots a_{2n}},\\ h_2(a_3,\cdots,a_n)&=\frac{a_5\cdots a_{2k-1}a_{2k+2}\cdots a_{2n}}{a_2a_4\cdots a_{2k}a_{2k+1}\cdots a_{2n-1}};\\ &\forall n\geq 3,\quad 2\leq k\leq n-1 \end{aligned}$$

طبق قضیهٔ ۹.۲ آماره‌های

$$\begin{aligned} g(Z_1,Z_3)h_1(Z_2,Z_4,\dots,Z_{2n})&=\frac{Z_1Z_3Z_5\dots Z_{2n-1}}{Z_2Z_4\dots Z_{2n}}\\ &=\frac{Z_1}{Z_2}\frac{Z_3}{Z_4}\dots\frac{Z_{2n-1}}{Z_{2n}}\\ &=X_1\dots X_n \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} &g(Z_1,Z_3)h_2(Z_2,Z_4,\dots,Z_{2n})\\ &\quad=\frac{Z_1Z_3\dots Z_{2k-1}Z_{2k+2}\dots Z_{2n}}{Z_2Z_4\dots Z_{2k}Z_{2k+1}\dots Z_{2n-1}}\\ &\quad=\frac{\frac{Z_1}{Z_2}\frac{Z_3}{Z_4}\dots\frac{Z_{2k-1}}{Z_{2k}}}{\frac{Z_{2k+1}}{Z_{2k+2}}\dots\frac{Z_{2n-1}}{Z_{2n}}}\\ &\quad=\frac{X_1\dots X_k}{X_{k+1}\dots X_n} \end{aligned}$$

تقسیم‌پذیر نامتناهی هستند.

مثال ۱۲.۲. فرض می‌کنیم X_1,X_2,X_3 یک نمونهٔ تصادفی ازتوزیع $N(0,1)$ باشد. اختیار می‌کنیم:

$$\begin{aligned} g(a)&=a,\\ h(a,b)&=a\pm b. \end{aligned}$$

به‌طور مشابه، قضیهٔ ۹.۲ برای توابع همگن یک‌متغیره نیز بر قرار است. بنابراین متغیر تصادفی

$$g(X_2)h(X_1,X_3)=X_1X_2\pm X_2X_3$$

تقسیم‌پذیر نامتناهی است.

نتیجهٔ دوم مقاله در مورد توابعی از متغیرهای تصادفی نرمال است که به‌صورت حاصل‌ضرب دو متغیر تصادفی غیرتباهیده مستقل نوشته می‌شوند، که یکی از آن‌ها تقسیم‌پذیر نامتناهی است و دیگری این خاصیت را ندارد.

قضیهٔ ۱۳.۲. فرض می‌کنیم $X_1,\dots,X_n$ یک نمونهٔ تصادفی از توزیع $N(0,1)$ باشد. تابع n–متغیرهٔ هم‌وردای مقیاسی g و توابع ناوردای مقیاسی h_i را برای هر $i=1,\dots,n$ در نظر می‌گیریم. اگر $||\mathbf{X}||$ نُرم اقلیدسی بردار $\mathbf{X}=(X_1,\dots,X_n)^T$ باشد، متغیر تصادفی

$$\begin{aligned} k(X_1,\dots,X_n)=&g(||\mathbf{X}||h_1(X_1,\dots,X_n),\\ &\dots,||\mathbf{X}||h_n(X_1,\dots,X_n)) \end{aligned}\qquad (2)$$

به‌صورت $k(X_1,\dots,X_n)=YZ$ تجزیه می‌شود، که Y تقسیم‌پذیر نامتناهی است و Z این خاصیت را ندارد و همچنین Y از Z مستقل است.

اثبات. با توجه به خاصیت هم‌وردای مقیاسی بودن تابع g،

$$\begin{aligned} k(X_1,\dots,X_n)=&g(||X||h_1(X_1,\dots,X_n),\\ &\dots,||\mathbf{X}||h_n(X_1,\dots,X_n))\\ =&||\mathbf{X}||^n g(h_1(X_1,\dots,X_n),\\ &\dots,h_n(X_1,\dots,X_n)). \end{aligned}$$

با توجه به این که گروه ضربی اعداد حقیقی مثبت روی فضای بُرد متغیر تصادفی به‌صورت انتقالی عمل می‌کند، آمارهٔ ناوردای مقیاسی $Z\ =$

$g(h_۱(X_۱,\ldots,X_n),\ldots,h_n(X_۱,\ldots,X_n))$ کمکی است. آمارهٔ $Y=||\mathbf{X}||^n$ که توانی از توزیع $\mathcal{X}^۲_{(n)}$ است، تقسیم‌پذیر نامتناهی و برای خانوادهٔ توزیع‌های

$$N(۰,\sigma^۲):\sigma^۲>۰$$

بسندهٔ کامل می‌باشد و از این رو طبق قضیهٔ باسو برای هر σ دلخواه به‌ویژه $\sigma=۱$، از آمارهٔ کمکی Z مستقل است. از طرف دیگر با توجه به خاصیت ناوردای مقیاسی بودن توابع h_i، تابع پیوستهٔ g توسط مقادیرش روی کرهٔ واحد تعیین می‌شود و در پی آن کران‌دار است و از این رو نمی‌تواند تقسیم‌پذیر نامتناهی باشد. بنابراین تجزیهٔ YZ شامل حاصل‌ضرب دو متغیر تصادفی مستقل است که Y تقسیم‌پذیر نامتناهی و Z فاقد این خاصیت است. $\square$

مثال ۱۴.۲. فرض می‌کنیم $X_۱,\ldots,X_n$ یک نمونهٔ تصادفی از توزیع $N(۰,۱)$ باشد. آن‌گاه متغیرهای تصادفی زیر دارای یک تجزیه به‌صورت داده‌شده در قضیهٔ ۱۳.۲ هستند:

الف) $T_۱(X_۱,\ldots,X_n)=\prod_{i=۱}^n X_i$

ب) $T_۲(X_۱,\ldots,X_n)=\sum_{i=۱}^n X_i^n$

ج) $T_۳(X_۱,\ldots,X_n)=\left(\sum_{i=۱}^n X_i^۲\right)^{\frac{n}{۲}}$

د) $T_۴(X_۱,\ldots,X_n)=\dfrac{\prod_{i=۱}^n X_i^۲}{\left(\sum_{i=۱}^n X_i^۲\right)^{\frac{n}{۲}}}$

هـ) $T_۵(X_۱,\ldots,X_n)=\dfrac{\sum_{i=۱}^n X_i^{۲n}}{\left(\sum_{i=۱}^n X_i^۲\right)^{\frac{n}{۲}}}$.

برای استفاده از قضیهٔ ۱۳.۲، به‌عنوان نمونه توابع ناوردا و هم‌وردای زیر می‌توانند در هر مورد به کار روند (البته هر یک از این حالت‌ها می‌تواند یکی از انتخاب‌ها برای حل مسئلهٔ باشد).

الف)

$$h_j(x_۱,\ldots,x_n)=\begin{cases}\frac{\prod_{i=۱}^n x_i}{\left(\sum_{i=۱}^n x_i^۲\right)^{\frac{n}{۲}}}, & j=۱\\ ۱, & j=۲,\ldots,n\end{cases}$$

$$g_۱(x_۱,\ldots,x_n)=\prod_{i=۱}^n x_i$$

و در پی آن

$$k(X_۱,\ldots,X_n)=\prod_{i=۱}^n(||\mathbf{X}||h_i(X_۱,\ldots,X_n))$$
$$=||\mathbf{X}||^n\frac{\prod_{i=۱}^n X_i}{||\mathbf{X}||^n}=\prod_{i=۱}^n X_i.$$

ب)

$$h_i(x_۱,\ldots,x_n)=\frac{x_i^n}{||\mathbf{x}||^n},\quad i=۱,\ldots,n,$$

$$g_۲(x_۱,\ldots,x_n)=\sum_{i=۱}^n x_i^n$$

و از این رو

$$k(X_۱,\ldots,X_n)=\sum_{i=۱}^n(||\mathbf{X}||h_i(X_۱,\ldots,X_n))^n$$
$$=||\mathbf{X}||^n\sum_{i=۱}^n\frac{X_i^n}{||\mathbf{X}||^n}=\sum_{i=۱}^n X_i^n.$$

ج)

$$h_i(x_۱,\ldots,x_n)=\begin{cases}\frac{x_i}{x_{i+۱}}, & i=۱,\ldots,n-۱\\ \frac{x_n}{x_۱}, & i=n\end{cases}$$

$$g_۳(x_۱,\ldots,x_n)=\prod_{i=۱}^n x_i$$

و بنابراین

$$k(X_۱,\ldots,X_n)=\prod_{i=۱}^n(||\mathbf{X}||h_i(X_۱,\ldots,X_n))$$
$$=||\mathbf{X}||^n\left(\prod_{i=۱}^{n-۱}\frac{X_i}{X_{i+۱}}\right)\frac{X_n}{X_۱}=\left(\sum_{i=۱}^n X_i^۲\right)^{\frac{n}{۲}}.$$

د)

$$h_j(x_۱,\ldots,x_n)=\frac{x_j^۲}{\sum_{i=۱}^n x_i^۲},\quad j=۱,\ldots,n,$$

$$g_۴(x_۱,\ldots,x_n)=\prod_{i=۱}^n x_i$$

و لذا

$$k(X_۱,\ldots,X_n)=\prod_{j=۱}^n(||\mathbf{X}||h_j(X_۱,\ldots,X_n))$$
$$=||\mathbf{X}||^n\prod_{j=۱}^n\frac{X_j^۲}{\sum_{i=۱}^n X_i^۲}$$
$$=\left(\sum_{i=۱}^n X_i^۲\right)^{\frac{n}{۲}}\frac{\prod_{j=۱}^n X_j^۲}{\left(\sum_{i=۱}^n X_i^۲\right)^n}$$
$$=\frac{\prod_{j=۱}^n X_j^۲}{\left(\sum_{i=۱}^n X_i^۲\right)^{\frac{n}{۲}}}.$$

هـ)

$$h_j(x_۱,\ldots,x_n)=\frac{x_j^۲}{\sum_{i=۱}^n x_i^۲},$$

$$g_۵(x_۱,\ldots,x_n)=\sum_{i=۱}^n x_i^۲$$

و در نتیجه

$$\begin{aligned}
k(X_1,\dots,X_n) &= \sum_{j=1}^{n}\left(||\mathbf{X}||h_j(X_1,\dots,X_n)\right)^n \\
&= ||\mathbf{X}||^n \sum_{j=1}^{n} \frac{X_j^{2n}}{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)^n} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)^{\frac{n}{2}} \frac{\sum_{j=1}^{2n} X_j^{2n}}{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)^n} \\
&= \frac{\sum_{j=1}^{n} X_j^{2n}}{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)^{\frac{n}{2}}}.
\end{aligned}$$

نتیجه ۱۵.۲. اگر $X_1,\dots,X_n$ یک نمونهٔ تصادفی از توزیع $N(0,1)$ باشد و g یک تابع n-متغیرهٔ هموردای مقیاسی باشد، آن‌گاه $g(X_1,\dots,X_n)$ به‌صورت $g(X_1,\dots,X_n) = YZ$ تجزیه می‌شود، که Y تقسیم‌پذیر نامتناهی است و Z این خاصیت را ندارد و همچنین Y از Z مستقل است.

اثبات. تابع (۲) داده شده در قضیهٔ ۱۳.۲، خود یک تابع هموردای مقیاسی است؛ زیرا به‌ازای هر $c > 0$ داریم:

$$\begin{aligned}
k(cx_1,\dots,cx_n) =& g(||c\mathbf{x}||h_1(cx_1,\dots,cx_n), \\
&\dots, ||c\mathbf{x}||h_n(cx_1,\dots,cx_n)) \\
=& g(c||\mathbf{x}||h_1(x_1,\dots,x_n), \\
&\dots, c||\mathbf{x}||h_n(x_1,\dots,x_n)) \\
=& c^n g(||\mathbf{x}||h_1(x_1,\dots,x_n), \\
&\dots, ||\mathbf{x}||h_n(x_1,\dots,x_n)) \\
=& c^n k(x_1,\dots,x_n).
\end{aligned}$$

از طرف دیگر، تابع

$$h_i(x_1,\dots,x_n) = \frac{x_i}{||\mathbf{x}||}, \quad i = 1,\dots,n$$

ناوردای مقیاسی؛ است زیرا به‌ازای هر $c > 0$ و هر i داریم:

$$h_i(cx_1,\dots,cx_n) = \frac{cx_i}{||c\mathbf{x}||} = \frac{x_i}{||\mathbf{x}||} = h_i(x_1,\dots,x_n).$$

بنابراین طبق قضیهٔ ۱۳.۲ با اختیار کردن تابع ناوردای h_i و انتخاب تابع دلخواه هموردای مقیاسی g،

$$\begin{aligned}
k(X_1,\dots,X_n) =& g(||\mathbf{X}||h_1(X_1,\dots,X_n), \\
&\dots, ||\mathbf{X}||h_n(X_1,\dots,X_n)) \\
=& g(X_1,\dots,X_n)
\end{aligned}$$

به‌صورت حاصل‌ضرب دو متغیر تصادفی مستقل تجزیه می‌شود که یکی تقسیم‌پذیر نامتناهی است و دیگری این خاصیت را ندارد. □

مثال ۱۶.۲. در مثال ۱۴.۲، اگر اختیار کنیم:

$$h_i(x_1,\dots,x_n) = \frac{x_i}{||\mathbf{x}||}, \quad i = 1,\dots,n,$$

$$g_i(x_1,\dots,x_n) = T_i(x_1,\dots,x_n), \quad i = 1,\dots,5$$

با استفاده از نتیجهٔ ۱۵.۲ از این‌که همهٔ متغیرهای تصادفی داده‌شده هموردای مقیاسی هستند، برای $i = 1,\dots,5$ همهٔ $g_i(X_1,\dots,X_n) = T_i(X_1,\dots,X_n)$ها دارای یک تجزیه به‌صورت داده شده در قضیهٔ ۱۳.۲ هستند.

نتیجه ۱۷.۲. اگر $X_1,\dots,X_n$ یک نمونهٔ تصادفی از توزیع $N(0,1)$ باشد و h یک تابع ناوردای مقیاسی باشد، آن‌گاه $||\mathbf{X}||^n h(X_1,\dots,X_n)$ به‌صورت حاصل‌ضرب دو متغیر تصادفی Y و Z تجزیه می‌شود که Y تقسیم‌پذیر نامتناهی است و Z این خاصیت را ندارد.

اثبات. با توجه به این که گروه ضربی اعداد حقیقی مثبت روی فضای بُرد متغیر تصادفی به‌صورت انتقالی عمل می‌کند، آمارهٔ ناوردای مقیاسی $h(X_1,\dots,X_n)$ کمکی است و از این رو مشابه اثبات قضیهٔ ۱۳.۲ از آمارهٔ بسنده کامل $Y = ||\mathbf{X}||^n$ مستقل است که در آن تجزیهٔ $||\mathbf{X}||^n h(X_1,\dots,X_n) = YZ$، شامل حاصل‌ضرب دو متغیر تصادفی مستقل است که Y تقسیم‌پذیر نامتناهی و Z فاقد این خاصیت است. □

مثال ۱۸.۲. در مثال ۱۴.۲ با در نظر گرفتن توابع ناوردای مقیاسی مناسب زیر می‌توان متغیرهای تصادفی مفروض را به‌صورت حاصل‌ضرب دو متغیر تصادفی مستقل تجزیه کرد که یکی تقسیم‌پذیر نامتناهی و دیگری فاقد این خاصیت است:

الف) $h_1(X_1,\dots,X_n) = \dfrac{\prod_{i=1}^{n} X_i}{||\mathbf{X}||^n}$

ب) $h_2(X_1,\dots,X_n) = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i^n}{||\mathbf{X}||^n}$

ج) $h_3(X_1,\dots,X_n) = 1$

د) $h_4(X_1,\dots,X_n) = \dfrac{\prod_{i=1}^{n} X_i^2}{||\mathbf{X}||^{2n}}$

هـ) $h_5(X_1,\dots,X_n) = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i^{2n}}{||\mathbf{X}||^{2n}}$.

۳ نتیجه‌گیری

در این مقاله پس از معرفی توزیع‌های تقسیم‌پذیر نامتناهی، این خاصیت در یک ردهٔ بزرگ از آماره‌ها مطرح شد. همچنین توابعی از متغیرهای تصادفی نرمال مورد بررسی قرار گرفت که این متغیرها به‌صورت حاصل‌ضرب دو متغیر تصادفی مستقل تجزیه می‌شوند که یکی از آن‌ها تقسیم‌پذیر نامتناهی است. برای رسیدن به دو نتیجهٔ اصلی مقاله از توابع ناوردا و هم‌وردای مقیاسی استفاده شد. اکنون این سؤال مطرح می‌شود که آیا این نتایج را می‌توان در مورد توابع ناوردا و هم‌وردا برای یگ گروه عمومی از تبدیلات نیز تعمیم داد. برای رسیدن به این منظور می‌توان در حالت کلی، توزیع‌های تقسیم‌پذیر نامتناهی چندمتغیره را در نظر گرفت و نتایج این مقاله را برای هر گروه دلخواه و توابع ناوردا و هم‌وردا نسبت به آن گروه تعمیم داد، که این مهم نیاز به تحقیقات بیشتری دارد و علاقه‌مندان می‌توانند به نوآوری‌های دیگری دست یابند.

مراجع

[1] Adler, R. J., Feldman, R. E., and Taqqu, M. S. (1998). *A Practical Guide to Heavy Tails: Statistical Techniques for Analysing Heavy Tailed Distributions*, Birkhauser, Boston.

[2] Arad, R. W. (1980). Parameter estimation for symmetric stable distributions, *International Economic Review*, **21**, 209-220.

[3] Barndorff-Nielsen, O. E., Lunde, A., Shephard, N., and Veraart, A. E. D. (2014). Integer-valued trawl processes: A class of stationary infinitely divisible processes, *Scandinavian Journal of Statistics*, **41**, 693-724.

[4] Basu, D. (1955). On statistics independent of a complete sufficient statistic, *Sankhya*, **15**, 377-380.

[5] Bertoin, J. (1998). *Levy processe*s, **121**, Cambridge University Press, Cambridge.

[6] Bondesson, L. (1992). Generalized gamma convolutions and related classes of distributions and densities, *Lecture Notes in Statistics*, **76**, Springer, Berlin.

[7] Chung, K. L. (1974). *A Course in Probability Theory*, Academic Press.

[8] De Finetti, B. (1929). Sulle funzioni ad incremento aleatorio, *Rendiconti Accademia Nazionale dei Lincei*, **10**, 163-168.

[9] Feller, W. (1939). Neuer Beweis fur die Kolmogoroff-P. Levysche Charakterisierung der unbeschrankt teilbaren Verteilungsfunktionen, *Bulletin international de l'Académie Yougoslave des Sciences et des beaux-arts. Classe des sciences mathématiques et naturelles*, **32**, 1–8.

[10] Feller, W. (1971). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, 2nd Edn, Wiley, New York.

[11] Fisz, M. (1962). Infinitely divisible distributions: recent results and applications, *Annals of Mathematical Statistics*, **33**, 68–84.

[12] Gamrowski, B. and Rachev, S. T. (1994). *Stable models in testable asset pricing, In Approximation, Probability, and Related fields (Santa Barbara, 1993)*, Plenum Press, New York.

[13] Goldie, C. M. (1967). A Class of Infinitely Divisible Distributions, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **63**, 1141–1143.

[14] Gnedenko, B. V. (1954). *The theory of probability*, 4th ed, Translated from the Russian by B.D. Seckler. Chelsea Publishing Company, New York.

[15] Gnedenko, B.V. (1991), *Einfuhrung in die Wahrscheinlichkeitstheorie*, Mathematische Lehrbucher und Monographien, I. Abteilung 39, Akademie, Berlin.

[16] Gnedenko, B. V. and Kolmogorov, A. N. (1968). *Limit distributions for sums of independent random variables*, 2nd ed. Addison-Wesley, Reading.

[17] Gut, A. (2005). *Probability: A Graduate Course*, Springer, New York.

[18] Ito, K. (1942). On stochastic processes I (Infinitely divisible laws of probability), *Japanese Journal of Mathematics*, **18**, 261–301.

[19] Khintchine, A. Y. (1937a). Zur Theorie der unbeschrankt teilbaren Verteilungsgesetze, *Recueil Mathématique. Matematicheskiĭ Sbornik. Moscow* , **2**, 79–117.

[20] Khintchine, A. Y. (1937b). Deduction nouvelle dune formule de M. Paul Levy, *Bulletin of Mathematical University Moscow*, **1**, 6-17.

[21] Kolmogorov, A. N. (1932). Sulla forma generale di un processo stocastico omogeneo, *Rendiconti Accademia Lincei*, **15**, 805–808, 866–869.

[22] Levy, P. (1934). Sur les integrales dont les elements sont des variables aleatoires independantes, *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze*, **3**, 337–366.

[23] Levy, P. (1937). *Theorie de l'Addition des Variables Aletoires*, Gauthier Villiers, Paris.

[24] Liu, S.M. and Brorsen, B.W. (1995). Maximum likelihood estimation in GARCH-stable model, *Journal of Applied Econometrics*, **10**, 273-285.

[25] Loeve, M. (1973). Paul Levy, 1886–1971, *Annals of Probability*, **1**, 1–18.

[26] Mandelbrot, B. B. (1963). The variation of certain speculative prices, *Journal of Business*, **36**, 394-419.

[27] McCrudden, M. and Walker, S. (1999), Infinitely divisible probabilities on linear p-adic groups, *Proceedings Indian Academy of Sciences-Mathematical*, **109**, 299–302.

[28] McCrudden, M. and Walker, S. (2000). Embedding infinitely divisible probabilities on subsemigroups of Lie groups, *Contemporary Mathematics*, **261**, 43–58.

[29] Officer, R. R. (1972). The distributin of stock returns, *Journal of the American Statistical Association*, **67**, 807-812.

[30] Saito. S. and Tanaka, T. A. (2012). Note on Infinite Divisibility of Zeta Distributions, *Applied Mathematical Sciences*, **30**, 1455 – 1461.

[31] Satheesh, S.A. (2003). *Supplement to the Bose-DasGupta-Rubin (2002) Review of Infinitely Divisible Laws and Processes*, arXiv preprint math.0305126.

[32] Sato, K. (1999). Levy processes and infinitely divisible distributions, *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*, 68.

[33] Shanbhag, D. N. and Sreehari, M. (1977). On certain self-decomposable distributions, *Z. Wahr. Verw. Geb.*, **38**, 217 – 222.

[34] Shanbhag, D. N. and Sreehari, M. (1979). An extension of Goldie's result and further results in infinite divisibility, *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, **47**(**1**), 19–25.

[35] Shanbhag, D. N., Pestana, D. and Sreehari, M (1977). Some further results in infinite divisibility, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **82**, 289 – 295.

[36] Steutel, F. W. (1967). Note on the Infinite Divisibility of Exponential Mixtures, *Annals of Mathematical Statistics*, **38**, 1303-1305.

[37] Steutel, F. W., (1973). Some recent results in infinite divisibility, *Stochastic Processes and their Applications*, **1**, 125–143.

[38] Steutel, F. W. (1979). Infinite divisibility in theory and practice, *Scandinavian Journal of Statistics*, **6**, 57–64.

[39] Steutel, F. W. (1983). *Infinite Divisibility*, Encyclopedia of Statistical Sciences.

[40] Steutel, F. W. and Van Harn, K (2003). *Infinite divisibility of probability distributions on the real line*, CRC *Press.*

[41] Warde, W. D. and Katti, S. K. (1967). On the infinite divisibility of discrete distributions, Annals of Mathematical Statistics, ***38****, 1306-1308.*

[42] Yasuda, K. (2000). On infinitely divisible distributions on locally compact abelian groups, Journal of Theoretical Probability, ***13****, 635–657.*