# برآورد و پیشگویی بیزی پارامترهای توزیع نمایی یک و دوپارامتری بر اساس نمونه‌های سانسور شده مضاعف نوع دوم از آماره‌های ترتیبی دنباله‌ای

مهرانگیز فلاحتی ناینی [۱]

چکیده:

در این مقاله، آماره‌های ترتیبی دنباله‌ای معرفی می‌شوند، سپس بر اساس نمونه سانسورشده مضاعف نوع دوم از آماره‌های ترتیبی دنباله‌ای، برآوردگر بیز برای پارامترهای توزیع نمایی یک و دو پارامتری تحت فرض توزیع پیشین گامای وارون و تابع زیان توان دوم خطا به‌دست آمده و هم‌چنین پیشگویی بیزی زمان‌های شکست آتی بررسی شده است. در ادامه، در مثالی کاربردی برآوردگر بیز و برآوردگرهای غیربیزی هم‌چون بهترین برآوردگر ناریب خطی (BLUE) و برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی تقریبی (AMLE) به‌دست آورده می‌شوند.

**واژه‌های کلیدی:** آماره‌های ترتیبی دنباله‌ای، سانسور مضاعف نوع دوم، برآورد بیز، پیشگویی بیز، بهترین برآوردگر نااریب خطی، برآوردگر ماکسیمم درستنمایی تقریبی.

## ۱ مقدمه

یک زیرمجموعه مهم از آماره‌های ترتیبی تعمیم‌یافته، آماره‌های ترتیبی دنباله‌ای است که برای مدل‌بندی ساختار نوعی سیستم $k$ از $n$ دنباله‌ای مورد استفاده قرار می‌گیرد. به‌صورت معمول سیستم $k$ از $n$ سیستمی است که با $n$ عنصر شروع به کار می‌کند و این سیستم تا زمانی که حداقل $k$ یا بیشتر از $k$ عنصر آن کار می‌کند، سالم است و به کار کردن ادامه می‌دهد. در اغلب موارد فرض می‌شود که عناصر این سیستم به‌صورت مستقل کار می‌کنند اما این فرض در همه سیستم‌ها به‌صورت کامل صدق نمی‌کند و در برخی مواقع ممکن است شکست و خرابی یک عنصر فشار بیشتر و یا خطری را برای عناصر باقی مانده به وجود آورد (در یک کار گروهی با کم شدن یکی از اعضا برای اتمام کار فشار بیشتری بر افراد باقی مانده وارد می‌شود).

سیستم $k$ از $n$ دنباله‌ای اولین بار توسط کَمپس [٦] در سال ۱۹۹۵ معرفی شد که در این سیستم بعد از هر شکست، توزیع طول عمر جدیدی بر عناصر باقی‌مانده تطبیق داده می‌شود. بنابراین در آماره‌های ترتیبی دنباله‌ای توزیع آماره‌ها با تعداد مؤلفه‌های درحال کار مرتبط است و این شرط توسط $\alpha_j$ اعمال می‌شود. در واقع توابع توزیع $F_1,...,F_n$ از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آیند:

$$F_j = 1-(1-F)^{\alpha_j},$$

که در آن، $\alpha_1,...,\alpha_n$ مقادیر حقیقی و مثبت هستند که پارامتر مدل نامیده می‌شوند و $F$ تابع توزیع مطلقاً پیوسته متناظر با تابع چگالی $f$ است. نرخ خطر عناصر باقی‌مانده بعد از $j$–امین شکست به‌صورت $\frac{\alpha_{j+1}f}{1-F}$ به‌دست می‌آید که در واقع $\alpha_{j+1}$ نشانگر اثر $j$ امین شکست بر روی $n-j$ عنصر باقی‌مانده در حال کار است.

در فرمول بالا اگر $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_n=1$ یا $F_1=F_2=...=F_n$، مدل به مدل آماره‌های ترتیبی معمولی تبدیل می‌شود.

**تعریف ۱.۱.** کَمپس [۵]. فرض کنید $Y_j^{(i)}$، $1\leqslant i<n$، $1\leqslant j\leqslant n-i+1$، متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع $F_i$ باشند که $F_1,...,F_n$ اکیداً صعودی و توابعی پیوسته هستند و $F_1^{-1}(1)\leq ...\leq F_n^{-1}(1)$. در این صورت اگر

$$X_j^{(1)}=Y_j^{(1)}, \quad 1\leqslant j\leqslant n,$$

و

$$X_*^{(1)}=\min\{X_1^{(1)},...,X_n^{(1)}\},$$

و برای $2\leqslant i\leqslant n$،

$$X_j^{(i)}=F_i^{-1}(F_i(Y_j^{(i)})(1-F_i(X_*^{(i-1)}))+F_i(X_*^{(i-1)})),$$

و

$$X_*^{(i)}=\min\{X_j^{(i)}, 1\leq j\leq n-i+1\},$$

[۱] دانشجوی کارشناسی ارشد

آنگاه متغیرهای تصادفی $X_*^{(1)},...,X_*^{(n)}$، آماره‌های ترتیبی دنباله‌ای نامیده می‌شوند.

با توجه به این تعریف، توزیع شرطی متغیر تصادفی $X_1^{(i)}$ برای $1 \leq i \leq n$، بنابر استقلال $Y_1^{(i)}$ و $X_*^{(i-1)}$، به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$P\left(X_1^{(i)} \leq t \middle| X_*^{(i-1)} = s\right) = P\left(F_i(Y_1^{(i)}) \leq \frac{F_i(t)-F_i(s)}{1-F_i(s)}\right) = \frac{F_i(t)-F_i(s)}{1-F_i(s)} = G_i(t|s).$$

این توزیع شرطی، نشان دهنده این است که بعد از $i$–امین خرابی در سیستم، شکست بعدی از $X_1^{(i)},...,X_{n-i+1}^{(i)}$ با توزیع $G_i(t|s)$ به‌دست می‌آید. بنابر تعریف

$$X_*^{(i)} = \min\{X_j^{(i)}, 1 \leq j \leq n-i+1\},$$

و همچنین تعریف $G_i(t|s)$، خواهیم داشت:

$$P(X_*^{(r)} > t \,|\, X_*^{(r-1)} = s) = (P(X_1^{(r)} > t \,|\, X_*^{(r-1)} = s))^{n-r+1} = \left(\frac{1-F_r(t)}{1-F_r(s)}\right)^{n-r+1},$$

و

$$P(X_*^{(r)} < t \,|\, X_*^{(r-1)} = s) = 1 - \left(\frac{1-F_r(t)}{1-F_r(s)}\right)^{n-r+1}.$$

با مشتق گیری نسبت به $t$ داریم:

$$f_{X_*^{(r)}|X_*^{(r-1)}}(t|s) = (n-r+1)\frac{f_r(t)}{1-F_r(s)} \times \left(\frac{1-F_r(t)}{1-F_r(s)}\right)^{n-r}.$$

بنابراین تابع چگالی توأم $X_*^{(1)},...,X_*^{(r)}$ با استفاده از خاصیت مارکف به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$f_{X_*^{(1)},...,X_*^{(r)}}(x_1,...,x_r) = \frac{n!}{(n-r)!}\prod_{i=1}^{r}\left(\frac{1-F_i(x_i)}{1-F_i(x_{i-1})}\right)^{n-i}\frac{f_i(x_i)}{1-F_i(x_{i-1})}.$$

**مثال ۲.۱** اگر $F(x_i) = 1 - e^{-x_i}$، آنگاه با استفاده از رابطه‌ی $F_i(x_i) = 1 - (1-F(x_i))^{\alpha_i}$ و رابطه‌ی بالا، تابع چگالی توأم $X_*^{(1)},...,X_*^{(n)}$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$f_{X_*^{(1)},...,X_*^{(n)}}(x_1,...,x_n) = n!\prod_{i=1}^{n}\alpha_i e^{-(x_i-x_{i-1})(n-i+1)\alpha_i}.$$

به‌صورت معمول در آزمایش‌های مختلف تمامی زمان‌های شکست قابل دسترس و یا قابل استفاده نیستند. به عنوان مثال ممکن است در یک آزمون طول عمر برای ذخیره هزینه و زمان، آزمون بعد از تعداد مشخصی از شکست‌های مشاهده شده متوقف شود. در چنین مواردی در استنباط آماری نمی‌توان تمام زمان‌های شکست را مشاهده و بنابراین باید انتخاب این زمان‌ها را محدود کرد. در این صورت زمان لازم برای رسیدن به $q$–امین شکست، یک متغیر تصادفی است.

مدل آماره‌های ترتیبی دنباله‌ای نیز برای چنین داده‌هایی می‌تواند مورد استفاده قرار بگیرد. فرض کنید $j_1$ تا $j_q$–امین مشاهده رخ دهد ($x^{(j_1)} \leq ... \leq x^{(j_q)}$) و باقی داده‌ها در دسترس نباشند، متغیرهای تصادفی متناظر با این مشاهدات را با نماد

$$X_*^{(j_1)} \leq ... \leq X_*^{(j_q)},\ 1 < j_1 < ... < j_q < n,$$

نشان داده و آماره‌های ترتیبی دنباله‌ای سانسورشده مضاعف نوع دوم نامیده می‌شود.

اگر تنها $p+1$–امین تا $q$–امین زمان شکست مشاهده شود و $p$ تا از کوچکترین و $n-q$ تا از بزرگترین زمان‌های شکست سانسورشده باشند، متغیرهای تصادفی متناظر را با

$$X_*^{(p+1)} \leq X_*^{(p+2)} \leq ... \leq X_*^{(q)},$$

نشان داده و آماره‌های ترتیبی دنباله‌ای سانسورشده دوگانه نوع دوم نامیده می‌شود. در حالت خاص اگر $p = 0$، متغیرهای تصادفی $X_*^{(1)} \leq X_*^{(2)} ... \leq X_*^{(q)}$ آماره‌های ترتیبی دنباله‌ای سانسورشده نوع دوم را تشکیل می‌دهند.

در این مقاله بر روی نمونه‌هایی از داده‌های سانسورشده مضاعف نوع دوم از آماره‌های ترتیبی دنباله‌ای با توزیع $Exp(\mu, \sigma_i)$ کار می‌شود که در واقع $q_i$ مشاهده از $i$–امین نمونه به‌طوری که $1 \leq i \leq s$، گرفته شده است. در این روش همه نمونه‌ها دارای پارامتر مکان یکسان $\mu$ و پارامترهای مقیاس $\sigma_1,...,\sigma_s$ هستند. به‌صورت کلی مجموعه داده‌ها را می‌توان به‌صورت زیر نمایش داد:

$$\mu = x_i^{(j_{i0})} \leq x_i^{(j_{i1})} \leq ... \leq x_i^{(j_{iq_i})},$$
$$j_{i0} = 0 < j_{i1} < ... < j_{iq_i} \leq n_i, \qquad 1 \leq i \leq s,$$

و آماره‌های ترتیبی دنباله‌ای متناظر نیز با نماد $X_{*i}^{(j_{ik})}$ که $1 \leq k \leq q_i$، $1 \leq i \leq s$، نشان داده می‌شود.

## ۲ تابع چگالی آماره‌های ترتیبی دنباله‌ای سانسور شده مضاعف نوع دوم

**قضیه ۱.۲.** فواصل متوالی استانداردشده آماره‌های ترتیبی دنباله‌ای، تحت توزیع نمایی استاندارد، متغیرهای مستقل و هم‌توزیع با توزیع نمایی استاندارد هستند؛ در واقع

$$\begin{aligned} W_{*i}^{(1)} &= \frac{\gamma_{i1}}{\sigma_i}(X_{*i}^{(1)}-\mu), \qquad 1\le i\le s,\\ W_{*i}^{(j)} &= \frac{\gamma_{ij}}{\sigma_i}(X_{*}^{(j)}-X_{*}^{(j-1)}),\ 2\leqslant j\leqslant n_i, \end{aligned}$$

با $\gamma_{ij}=\alpha_{ij}(n_i-j+1)$، به‌صورت نمایی استاندارد توزیع شده‌اند.

اثبات. به کمپس [۵] رجوع شود. □

با درنظر گرفتن تعداد نمونه‌ها برابر با 1، قضیه زیر بیان می‌شود:

**قضیه ۲.۲.** الف) تابع چگالی آماره‌های ترتیبی دنباله‌ای سانسورشده مضاعف نوع دوم

$$X_*^{(j_1)}\le ...\le X_*^{j_q},\ 1\le j_1<j_2<...<j_q\le n,$$

تحت توزیع $Exp(\mu,\sigma)$، به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$f_{\boldsymbol{X}_*}(\boldsymbol{x})=\sigma^{-q}\left(\prod_{p=1}^{q}\prod_{k=j_{p-1}+1}^{j_p}\gamma_k\right)\times\prod_{p=1}^{q}\left(\sum_{k=j_{p-1}+1}^{j_p}a_k^{(j_{p-1})}(j_p)\exp(\frac{-\gamma_k}{\sigma}(x^{j_p}-x^{j_{p-1}})\right),$$

که در آن، $\boldsymbol{X}_*=(X_*^{(j_1)},...,X_*^{j_q})$، $\boldsymbol{x}_*=(x_*^{(j_1)},...,x_*^{j_q})$، $\mu=X_*^{(j_0)}\le X_*^{(j_1)}\le...\le X_*^{j_q}$، $j_0=0$ و

$$a_k^{(j_{p-1})}(j_p)=\prod_{\substack{l=j_{p-1}+1\\ l\neq k}}^{j_p}\frac{1}{\gamma_l-\gamma_k},$$

که $j_{p-1}+1\le k\le j_p, 1\le p\le q$.

ب) تابع چگالی شرطی $X_*^{j_r}$ به شرط $\boldsymbol{X}_*=\boldsymbol{x}_*$ برابر است با:

$$f_{X_*^{(j_r)}|\boldsymbol{X}_*}(x^{(j_r)}|\boldsymbol{x})=\frac{1}{\sigma}\left(\prod_{k=j_q+1}^{j_r}\gamma_k\right)\sum_{j=j_q+1}^{j_r}a_j^{j_q}(j_r)\exp\left(\frac{-\gamma_j}{\sigma}(x^{(j_r)}-x^{(j_q)})\right),$$

که $j_q<j_r$ و $x^{(j_q)}<x^{(j_r)}$.

## ۳ برآورد و پیشگویی بیزی

در سال‌های اخیر مطالعات زیادی بر روی روش‌های بیزی با نمونه‌های سانسورشده نوع دوم و هم‌چنین نمونه‌های سانسورشده پیش‌رونده نوع دوم بر اساس آماره‌های ترتیبی دنباله‌ای و یا آماره‌های تعمیم‌یافته، توسط جاهین [۴]، احمدی و دوست پرست [۱] و سلطان [۸] انجام گرفته است. شنک و همکاران [۷] به محاسبه برآورد و پیشگویی‌های بیزی بر اساس نمونه‌های سانسورشده مضاعف نوع دوم از آماره‌های ترتیبی دنباله‌ای در توزیع نمایی یک و دو پارامتری پرداختند. در این قسمت با استفاده از یافته‌های بخش قبل، برآوردگر بیزی برای پارامترهای توزیع نمایی یک و دو پارامتری به‌دست می‌آید و هم‌چنین پیشگویی بیز برای زمان شکست آینده ارائه می‌گردد.

### ۱.۳ توزیع نمایی یک پارامتری

اگر $\sigma=\sigma_1=...=\sigma_s=\sigma$ و $\sigma$ به صورت گامای وارون توزیع شده باشد، آنگاه برآورد بیزی $\sigma$ و پیشگویی بیزی زمان شکست آینده با فرض وجود نمونه‌هایی از آماره‌های ترتیبی سانسورشده مضاعف نوع دوم به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند.

#### برآورد پارامتر مقیاس

**لم ۱.۳.** فرض کنید

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{X}_{*i}=(X_{*i}^{(j_{i1})},...,X_{*i}^{(j_{iq_i})}), i=1,...,s,\\ &\boldsymbol{x}_{*i}=(x_{*i}^{(j_{i1})},...,x_{*i}^{(j_{iq_i})}), i=1,...,s,\\ &\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{X}_{*1},...,\boldsymbol{X}_{*s}),\\ &\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x}_1,...,\boldsymbol{x}_s), \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} \boldsymbol{K} &= \{\boldsymbol{k}=(k_{11},...,k_{sq_s})|k_{ip}\in\{j_{i,p-1}+1,...,j_{ip}\},\\ &\quad 1\le p\le q_i, 1\le i\le s\}, \end{aligned}$$

$$\Psi(\boldsymbol{k})=\prod_{i=1}^{s}\prod_{p=1}^{q_i}a_{k_{ip}}^{(j_{i,p-1})}(j_{ip}),\ Q=\sum_{i=1}^{s}q_i,$$

$$V_{\boldsymbol{k}}=\sum_{i=1}^{s}\sum_{p=1}^{q_i}V_{ik_{ip}}^p,\ V_{ik_{ip}}^p=\gamma_{ik}(x_i^{(j_{ip})}-x_i^{(j_{i,p-1})}),$$

و

$$\pi_\Sigma(\sigma)\propto\sigma^{-(b+1)}\,e^{-\frac{a}{\sigma}},\qquad \sigma>0, a>0, b>0.$$

در این صورت چگالی پسین $\Sigma$ به شرط $\boldsymbol{x}$ با فرض $Q+b>0$، برابر است با:

$$\pi_{\Sigma|\boldsymbol{X}}(\sigma|\boldsymbol{x}) = c^{-1}\,\sigma^{-(Q+b+1)}\sum_{\boldsymbol{k}\in\boldsymbol{K}}\Psi(\boldsymbol{k})\,e^{-\frac{V_{\boldsymbol{k}}+a}{\sigma}},$$

که در آن، مقدار ثابت $c$ از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$c = \Gamma(Q+b)\sum_{\boldsymbol{k}\in\boldsymbol{K}}\Psi(\boldsymbol{k})\,(V_{\boldsymbol{k}}+a)^{-(Q+b)}.$$

بنابراین با استفاده از فرضیات لم پیشین، برآوردگر بیز تحت تابع زیان توان دوم خطا و $k$-امین گشتاور پسین $\sigma$ برای $Q+b-1>0$، به ترتیب برابرند با:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma} &= E(\Sigma|\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x})\\ &= c^{-1}\sum_{\boldsymbol{k}\in\boldsymbol{K}}\Psi(\boldsymbol{k})\frac{\Gamma(Q+b-1)}{(V_{\boldsymbol{k}}+a)^{Q+b-1}},\end{aligned} \qquad (۱)$$

$$\begin{aligned}\widehat{\sigma^k} &= E(\Sigma^k|\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x})\\ &= c^{-1}\sum_{\boldsymbol{k}\in\boldsymbol{K}}\Psi(\boldsymbol{k})\frac{\Gamma(Q+b-k)}{(V_{\boldsymbol{k}}+a)^{Q+b-k}}.\end{aligned} \qquad (۲)$$

و واریانس پسین برآورد بیز $\sigma$ تحت تابع زیان توان دوم خطا به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}Var(\hat{\sigma}|\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}) &= E(\Sigma^2|\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}) - E^2(\Sigma|\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x})\\ &= (\widehat{\sigma^2}-\hat{\sigma}^2).\end{aligned}$$

## پیشگویی زمان شکست آینده

در نظر بگیرید

$$x_i^{(j_{i1})} \le x_i^{(j_{i2})} \le \dots \le x_i^{(j_{iq_i})}, \qquad i=1,\dots,s,$$

$\sum_{i=1}^{s} q_i$ زمان‌های شکست مشاهده شده و $x_i^{(j_{iq_i}+1)} \le \dots \le x_i^{(n_i)}$ نمونه‌ی مرتب شده‌ای از مشاهدات آینده $i$– امین نمونه باشد.

**لم ۲.۳.** فرض کنید $r\in\mathbb{N}$، $r\geqslant 2$ و برای $l,j\in\{1,\dots,r\}$، $\gamma_l>0$ و اگر $l\neq j$، آنگاه $\gamma_l\neq\gamma_j$ و

$$a_j(r) = a_j^{(0)}(r) = \prod_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{r}\frac{1}{\gamma_l-\gamma_j},\ r\ge 2,\ a_j(1)=1.$$

در این صورت برای $k=l_0\in\mathbb{N}$ و $l_r=0$ داریم:

$$\left(\prod_{j=1}^{r}\gamma_j\right)\sum_{j=1}^{r}\frac{1}{{\gamma_j}^{k+1}}a_j(r) = \sum_{l_1=0}^{k}\sum_{l_2=0}^{l_1}\dots\sum_{l_{r-1}}^{l_{r-2}}\left(\gamma_1{}^{l_{r-1}}\dots\gamma_{r-1}{}^{l_1-l_2}\,\gamma_r{}^{k-l_1}\right)^{-1},$$

و برای حالت خاص $k=0$، $k=1$ و $k=2$ به‌ترتیب خواهیم داشت:

$$\left(\prod_{j=1}^{r}\gamma_j\right)\sum_{j=1}^{r}\frac{1}{\gamma_j}a_j(r)=1, \qquad (۳)$$

$$\left(\prod_{j=1}^{r}\gamma_j\right)\sum_{j=1}^{r}\frac{1}{{\gamma_j}^2}a_j(r)=\sum_{j=1}^{r}\frac{1}{\gamma_j}, \qquad (۴)$$

$$\left(\prod_{j=1}^{r}\gamma_j\right)\sum_{j=1}^{r}\frac{1}{{\gamma_j}^3}a_j(r)=\sum_{j=1}^{r}\frac{1}{{\gamma_j}^2}+\sum_{\substack{l,k=1\\ l<k}}^{r}\frac{1}{\gamma_l\gamma_k}. \qquad (۵)$$

**قضیه ۳.۳.** اگر فرضیات لم ۱.۳ برقرار باشد، پیشگویی‌کننده زمان شکست $r_i$ امین آماره ترتیبی دنباله‌ای برابر است با:

$$\hat{X}_{*i}^{(r_i)} = x_i^{(j_{iq_i})} + \hat{\sigma}\sum_{k=j_{iq_i}+1}^{r_i}\frac{1}{\gamma_{ik}},\ j_{iq_i}<r_i, \qquad (۶)$$

که $\hat{\sigma}$ برآوردگر بیز به‌دست آمده است.

فرض کنید نمونه‌ها دارای پارامترهای مقیاس متفاوت $\sigma_1,\dots,\sigma_s$ هستند و چگالی پیشین $\Sigma_i$ به‌صورت زیر است:

$$\pi_{\Sigma_i}(\sigma_i) \propto \sigma_i^{-(b_i+1)}\exp\left(-\frac{a_i}{\sigma_i}\right),$$

$$\pi_{\boldsymbol{\Sigma}}(\boldsymbol{\sigma}) = \prod_{i=1}^{s}\pi_{\Sigma_i}(\sigma_i),\ \boldsymbol{\sigma}=(\sigma_1,\dots,\sigma_s),$$

و علاوه بر تعاریف موجود در لم ۱.۳ داشته باشیم:

$$\boldsymbol{K}_i = \{\boldsymbol{k}=(k_{i1},\dots,k_{iq_i})|k_{ip}\in\{j_{i,p-1}+1,\dots,j_{ip}\},\ 1\le p\le q_i\},$$

$$V_{i\boldsymbol{k}} = \sum_{p=1}^{q_i}V^{p}_{ik_{ip}},$$

$$\Psi_i(\boldsymbol{k}) = \prod_{p=1}^{q_i}a_{k_{ip}}^{(j_i,p-1)}(j_{ip}),$$

$$c_i = \sum_{\boldsymbol{k}\in\boldsymbol{K}_i}\Psi_i(\boldsymbol{k})\frac{\Gamma(q_i+b_i)}{(V_{i\boldsymbol{k}}+a_i)^{q_i+b_i}},$$

در این صورت برآوردگر بیز و $k$-امین گشتاور پسین $\sigma_i$ برای $q_i+b_i-k>0$به ترتیب برابر است با:

$$\hat{\sigma}_i = {c_i}^{-1}\sum_{\boldsymbol{k}\in\boldsymbol{K}_i}\Psi_i(\boldsymbol{k})\frac{\Gamma(q_i+b_i-1)}{(V_{i\boldsymbol{k}}+a_i)^{q_i+b_i-1}},$$

$$\widehat{\sigma_i^k} = c_i^{-1} \sum_{\boldsymbol{k}\in \boldsymbol{K}_i} \Psi_i(\boldsymbol{k}) \frac{\Gamma(q_i+b_i-k)}{(V_{i\boldsymbol{k}}+a_i)^{q_i+b_i-k}}.$$

به این ترتیب با همان روش قضیه قبل ثابت می‌شود که پیشگوییکننده زمان شکست $r_i$ امین آماره ترتیبی دنباله‌ای برابر است با:

$$\hat{X}_{*i}^{(r_i)} = x_i^{(j_{iq_i})} + \hat{\sigma}_i \sum_{k=j_{iq_i}+1}^{r_i} \frac{1}{\gamma_{ik}}, \qquad j_{iq_i} < r_i.$$

## ۲.۳ توزیع نمایی دو پارامتری

اگر $\sigma_1 = ... = \sigma_s = \sigma$ و پارامترهای مکان و مقیاس $\mu$ و $\sigma$، دارای چگالی پیشین توأم زیر باشند:

$$\pi_{(\Sigma,\Delta)}(\sigma,\mu) \propto \sigma^{-(b+1)} \exp\left(-\frac{a-c\mu}{\sigma}\right) I_{[0,M]}(\mu),$$

و علاوه بر شرایط لم ۱.۳ داشته باشیم:

$$\begin{aligned}
z &= min\{x_1^{(j_{11})},...,x_s^{(j_{s1})}\},\\
M_0 &= min\{z, M\},\\
x_i^{(j_{i0})} &= 0,\ 1\le i\le s,\\
V_{ik}^p &= \gamma_{ik}(x_i^{(j_{ip})} - x_i^{(j_{i,p-1})}),\\
V_{\boldsymbol{k}} &= \sum_{i=1}^{s}\sum_{p=1}^{q_i} V_{ik_{ip}}^p,\\
c &\ne -\sum_{i=1}^{s}\gamma_{i1},\\
H_{\boldsymbol{k}}(t) &= V_{\boldsymbol{k}} + a - t(c+\sum_{i=1}^{s}\gamma_{i1}),\\
& \quad H_{\boldsymbol{k}}(M_0) > 0,\ \boldsymbol{k}\in K,
\end{aligned}$$

آنگاه چگالی پسین توأم $(\Sigma,\Delta)$ به شرط $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{X}_{*1},...,\boldsymbol{X}_{*s})$ برای $Q+b-1>0$، به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\pi_{(\Sigma,\Delta)|\boldsymbol{X}}((\sigma,\mu)|\boldsymbol{x}) = c^{-1}\sum_{\boldsymbol{k}\in\boldsymbol{k}} \Psi(\boldsymbol{k}) \sigma^{-(Q+b-1)} \exp\left(-\frac{H_{\boldsymbol{k}}(\mu)}{\sigma}\right) I_{[0,M_0]}(\mu),$$

که $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_1,...\boldsymbol{x}_s)$ و مقدار ثابت $c$ نیز برابر است با:

$$c = \frac{\Gamma(Q+b-1)}{c+\sum_{i=1}^{s}\gamma_{i1}} \sum_{\boldsymbol{k}\in\boldsymbol{K}} \Psi(\boldsymbol{k}) \Big( (H_{\boldsymbol{k}}(M_0))^{-(Q+b-1)} - (H_{\boldsymbol{k}}(0))^{-(Q+b-1)} \Big).$$

و بنابراین برآوردگر بیز $\sigma$ و $\mu$ تحت تابع زیان توان دوم خطا برابر با مقادیر زیر است:

$$\hat{\sigma} = E(\Sigma|\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(Q+b-2)}\Big\{ \sum_{\boldsymbol{k}\in\boldsymbol{K}} \Psi(\boldsymbol{k}) \Big( (H_{\boldsymbol{k}}(M_0))^{-(Q+b-2)} - (H_{\boldsymbol{k}}(0))^{-(Q+b-2)} \Big) \Big/ \sum_{\boldsymbol{k}\in\boldsymbol{K}} \Psi(\boldsymbol{k}) \Big( (H_{\boldsymbol{k}}(M_0))^{-(Q+b-1)} - (H_{\boldsymbol{k}}(0))^{-(Q+b-1)} \Big)\Big\}$$

و

$$\hat{\mu} = E(\Delta|\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}) = \Big\{ M_0 \sum_{\boldsymbol{k}\in\boldsymbol{K}} \Psi(\boldsymbol{k})\,(H_{\boldsymbol{k}}(M_0))^{-(Q+b-1)} \Big/ \sum_{\boldsymbol{k}\in\boldsymbol{K}} \Psi(\boldsymbol{k}) \Big( (H_{\boldsymbol{k}}(M_0))^{-(Q+b-1)} - (H_{\boldsymbol{k}}(0))^{-(Q+b-1)} \Big)\Big\} - \hat{\sigma}\,(c+\sum_{i=1}^{s}\gamma_{i1})^{-1}.$$

اثبات. با توجه به روابط قبلی و این نکته که

$$I_{[\mu,\infty)}(z) I_{[0,M]}(\mu) = I_{\{\mu\le z\}} I_{\{\mu\le M\}} = I_{\{\mu\le M_0\}} = I_{[0,M_0]}(\mu),$$

چگالی پسین و برآوردگرهای بیز به‌راحتی محاسبه می‌شود. □

## پیشگویی زمان شکست آینده

فرض کنید

$$V_{\boldsymbol{k}}(t,\mu) = \gamma_{ij}(t - x_i^{(j_{iq_i})}) + H_{\boldsymbol{k}}(\mu),\ t\in[x_i^{(r_i)},\infty).$$

در این صورت چگالی پسین پیشگوییکننده $X_{*i}^{(r_i)}$ به شرط $\boldsymbol{X}$ برابر:

$$f_{X_{*i}^{(r_i)}|\boldsymbol{X}}(x_i^{r_i}|\boldsymbol{x}) = c^{-1}\left(\prod_{k=j_{iq_i}+1}^{r_i}\gamma_{ik}\right) \sum_{k=j_{iq_i}+1}^{r_i} a_l^{j_{iq_i}}(r_i) \sum_{\boldsymbol{k}\in\boldsymbol{K}} \Psi(\boldsymbol{k}) \frac{\Gamma(Q+b)}{c+\sum_{i=1}^{s}\gamma_{i1}} \Big( (V_{\boldsymbol{k}}(x_i^{(r_i)}, M_0))^{-(Q+b)} - (V_{\boldsymbol{k}}(x_i^{(r_i)}, 0))^{-(Q+b)} \Big),$$

است و از آنجایی که پیشگوییکننده $X_{*i}^{(r_i)}$ برابر با میانگین $X_{*i}^{(r_i)}$ به شرط $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}$ است، با انتگرال‌گیری جزء‌به‌جزء مقدار زیر به‌دست می‌آید:

$$\hat{X}_{*i}^{(r_i)} = x_i^{(j_{iq_i})} + \hat{\sigma} \sum_{k=j_{iq_i}+1}^{r_i} \frac{1}{\gamma_{ik}}, \qquad j_{iq_i} < r_i.$$

اگر نمونه‌ها دارای پارامترهای مقیاس متفاوت $\sigma_1,...,\sigma_s$ و چگالی پیشین توأم $\boldsymbol{\sigma}$ و $\mu$ برای $\sigma_1,...,\sigma_s > 0$ به‌صورت زیر باشد:

$$\pi_{(\boldsymbol{\Sigma},\Delta)}(\boldsymbol{\sigma},\mu) \propto \prod_{i=1}^{s}\left(\sigma_i^{-(b_i+1)}\exp\left(-\frac{a_i-c_i\mu}{\sigma_i}\right)\right),$$

آنگاه با فرض این که $V_{i,\boldsymbol{k}} = V_{i,\boldsymbol{k}}$ و $H_{i,\boldsymbol{k}}(t) = V_{i,\boldsymbol{k}} + a_i - t(c_i+\gamma_{i1})$ ، $\sum_{p=1}^{q_i} V^p_{ik_{ip}}$ ، چگالی پسین $(\boldsymbol{\Sigma},\Delta)$ به شرط $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{X}_{*1},...\boldsymbol{X}_{*s})$ برابر:

$$\pi_{(\boldsymbol{\Sigma},\Delta)|\boldsymbol{X}}((\boldsymbol{\sigma},\mu)|\boldsymbol{x}) \propto \sum_{\boldsymbol{k}\in\boldsymbol{K}} \Psi(\boldsymbol{k})\left(\prod_{i=1}^{s} {\sigma_i}^{-(q_i+b_i+1)} \exp\left(-\frac{H_{i,\boldsymbol{k}}(\mu)}{\sigma_i}\right)\right) I_{[0,M_0]}(\mu).$$

است. یا می‌توان گفت

$$\pi_{(\boldsymbol{\Sigma},\Delta)|\boldsymbol{X}}((\boldsymbol{\sigma},\mu)|\boldsymbol{x}) = c^{-1}\sum_{\boldsymbol{k}\in\boldsymbol{K}} \Psi(\boldsymbol{k})\left(\prod_{i=1}^{s} {\sigma_i}^{-(q_i+b_i+1)} \exp(-\frac{H_{i,\boldsymbol{k}}(\mu)}{\sigma_i})\right) I_{[0,M_0]}(\mu),$$

که $c$ برابر است با:

$$c = \sum_{\boldsymbol{k}\in\boldsymbol{K}} \Psi(\boldsymbol{k}) \int_0^{M_0} \prod_{i=1}^{s} \frac{\Gamma(q_i+b_i)}{(H_{i,\boldsymbol{k}}(\mu))^{q_i+b_i}} d\mu.$$

انتگرال بالا مقدار روشن و صریحی ندارد و بایستی به روش‌های عددی محاسبه گردد و بنابراین برآوردگر بیز $\sigma_i$ و $\mu$ برابر با میانگین توزیع پسین به‌دست آمده هستند.

# ۴ بهترین برآوردگر ناااریب خطی$(BLUE)$

در این بخش، بهترین برآورد نااریب خطی برای پارامترهای توزیع نمایی یک و دو پارامتری با فرض پارامترهای مقیاس یکسان به‌دست آمده است.

**قضیه ۱.۴.** فرض کنید $B \in \Re^{n\times n}$ یک ماتریس معین مثبت متقارن، $A \in \Re^{n\times(k+1)}$ یک ماتریس طرح با رتبه $k+1$ و $\boldsymbol{X}$ و $\boldsymbol{\Delta} \in \Re^n$ دو بردار تصادفی باشند. در این صورت اگر

$$\boldsymbol{X} = A\boldsymbol{\beta} + \sigma,$$

یک مدل خطی با شرایط $E(\boldsymbol{X}) = A\boldsymbol{\beta}$، $Cov(\boldsymbol{X}) = Cov(\Delta) = B$ و $E(\Delta) = 0$ باشد، آنگاه بهترین برآوردگر نااریب خطی $\boldsymbol{\beta}$ برابر:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \left(A^t B^{-1} A\right)^{-1} A^t B^{-1}\boldsymbol{X}$$

است.

اگر $X^{(j_{ik})}_{*i}$، $j_k$–امین آماره ترتیبی دنباله‌ای از $i$–امین نمونه با توزیع $Exp(\mu,\sigma_i)$ باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} E(X^{(j_{ik})}_{*i}) &= \mu + \sigma_i \sum_{j=1}^{j_{ik}} \frac{1}{\gamma_{ij}} =: \mu + \sigma_i S_1(i,k), \\ Var(X^{(j_{ik})}_{*i}) &= \sigma_i^2 \sum_{j=1}^{j_{ik}} \frac{1}{\gamma_{ij}^2} =: \sigma_i^2 S_2(i,k), \\ Cov(X^{(j_{ik})}_{*i}, X^{(j_{il})}_{*i}) &= Var(X^{(j_{ik})}_{*i}) =: \sigma_i^2 S_2(i,k). \end{aligned}$$

تعاریف زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X}_i &= (X^{(j_{i1})}_{*i}, ..., X^{(j_{ir_i})}_{*i})^t,\ 1\le i\le s, \\ \boldsymbol{X} &= (\boldsymbol{X}_1^t, ..., \boldsymbol{X}_s^t)^t, \\ \boldsymbol{1}_{r_i} &= (1,...,1)^t \in \Re^{r_i},\ i=1,...,s, \\ \boldsymbol{1} &= (1,...,1)^t \in \Re^{\sum_{i=1}^{s} r_i}, \\ \boldsymbol{X}_{iv} &= \boldsymbol{X}_i - v\boldsymbol{1}_{r_i},\ v\in\Re, \\ \boldsymbol{X}_v &= X - v\boldsymbol{1},\ v\in\Re, \\ \boldsymbol{\alpha}_i &= (S_1(i,1), ..., S_1(i,r_i))^t, 1\le i\le s, \\ \boldsymbol{\alpha} &= (\alpha_1^t, ..., \alpha_s^t)^t \in \Re^{\sum_{i=1}^{s} r_i}, \\ B_i &= (S_2(i,k,l))_{1\le k,l\le r_i}, 1\le i\le s, \\ B &= \mathrm{diag}(B_1, ..., B_s), \in \Re^{\sum_{i=1}^{s} r_i \times \sum_{i=1}^{s} r_i}. \end{aligned}$$

**قضیه ۲.۴.** با فرض وجود نمونه سانسورشده مضاعف نوع دوم از توزیع نمایی یک پارامتری، اگر $\sigma_1 = ... = \sigma_s = \sigma$، آنگاه بهترین برآوردگر نااریب خطی $\sigma$ برابر:

$$\sigma^* = \frac{\boldsymbol{\alpha}^t B^{-1}\boldsymbol{X}_\mu}{\boldsymbol{\alpha}^t B^{-1}\boldsymbol{\alpha}},$$

است و بنابراین واریانس این برآوردگر نیز برابر با مقدار زیر خواهد شد:

$$Var(\sigma^*) = \frac{\sigma^2}{\boldsymbol{\alpha}^t B^{-1}\boldsymbol{\alpha}}.$$

به‌طور ساده‌تر می‌توان گفت بهترین برآوردگر نااریب خطی $\sigma$ برابر است با:

$$\sigma^* = \left(\sum_{i=1}^{s}\sum_{k=1}^{r_i} \frac{s_1^2(i,k)}{s_2(i,k)}\right)^{-1} \sum_{i=1}^{s}\sum_{k=1}^{r_i} \frac{s_1(i,k)}{s_2(i,k)} (X^{(j_{ik})}_{*i} - X^{(j_{i,k-1})}_{*i}), \quad X^{(j_{i0})}_{*i} = \mu$$

که در آن،

$$\begin{aligned} s_1(i,k) &= S_1(i,k) - S_1(i,k-1) \\ &= \sum_{j=1}^{j_{ik}} \frac{1}{\gamma_{ij}} - \sum_{j=1}^{j_{i,k-1}} \frac{1}{\gamma_{ij}}, \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} s_2(i,k) &= S_2(i,k)-S_2(i,k-1) \\ &= \sum_{j=j_{i,k-1}+1}^{j_{ik}} \frac{1}{\gamma_{ij}^2}, \end{aligned}$$

$S_1(i,0)=S_2(i,0)=0$ و $j_{i0}=0, i=1,...,s$.

**قضیه ۳.۴.** با فرض وجود نمونه سانسورشده مضاعف نوع دوم از توزیع نمایی دو پارامتری، اگر $\sigma_1=...=\sigma_s=\sigma$ ، آنگاه بهترین برآوردگر نااریب خطی $\mu$ و $\sigma$ به ترتیب برابر

$$\mu^*=\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}^tB^{-1}\boldsymbol{\alpha}\mathbf{1}^tB^{-1}-\boldsymbol{\alpha}^tB^{-1}\mathbf{1}\boldsymbol{\alpha}^tB^{-1}}{(\boldsymbol{\alpha}^tB^{-1}\boldsymbol{\alpha})(\mathbf{1}^tB^{-1}\mathbf{1})-(\boldsymbol{\alpha}^tB^{-1}\mathbf{1})^2}\right)\boldsymbol{X},$$

$$\sigma^*=\left(\frac{\mathbf{1}^tB^{-1}\mathbf{1}\boldsymbol{\alpha}^tB^{-1}-\mathbf{1}^tB^{-1}\boldsymbol{\alpha}\mathbf{1}^tB^{-1}}{(\boldsymbol{\alpha}^tB^{-1}\boldsymbol{\alpha})(\mathbf{1}^tB^{-1}\mathbf{1})-(\boldsymbol{\alpha}^tB^{-1}\mathbf{1})^2}\right)\boldsymbol{X}.$$

هستند که واریانس و کواریانس این دو برآوردگر برابر با مقادیر زیر است:

$$Var(\mu^*)=\frac{\sigma^2(\boldsymbol{\alpha}^tB^{-1}\boldsymbol{\alpha})}{(\boldsymbol{\alpha}^tB^{-1}\boldsymbol{\alpha})(\mathbf{1}^tB^{-1}\mathbf{1})-(\boldsymbol{\alpha}^tB^{-1}\mathbf{1})^2}\ ,$$
$$Var(\sigma^*)=\frac{\sigma^2(\mathbf{1}^tB^{-1}\mathbf{1})}{(\boldsymbol{\alpha}^tB^{-1}\boldsymbol{\alpha})(\mathbf{1}^tB^{-1}\mathbf{1})-(\boldsymbol{\alpha}^tB^{-1}\mathbf{1})^2}\ ,$$
$$Cov(\mu^*,\sigma^*)=\frac{-\sigma^2(\boldsymbol{\alpha}^tB^{-1}\mathbf{1})}{(\boldsymbol{\alpha}^tB^{-1}\boldsymbol{\alpha})(\mathbf{1}^tB^{-1}\mathbf{1})-(\boldsymbol{\alpha}^tB^{-1}\mathbf{1})^2}\ .$$

بهترین برآوردگر نااریب خطی $\sigma$ و $\mu$ به‌صورت ساده‌تر برابر:

$$\begin{aligned} \sigma^* &= \frac{1}{K}\Bigg[\left(\sum_{i=1}^{s}\frac{1}{s_2(i,1)}\right)\Bigg(\sum_{i=1}^{s}\sum_{k=1}^{r_i}\frac{s_1(i,k)}{s_2(i,k)} \\ &\qquad (X_{*i}^{(j_{ik})}-X_{*i}^{(j_{i,k-1})})\Bigg)- \\ &\qquad \left(\sum_{i=1}^{s}\frac{s_1(i,1)}{s_2(i,1)}\right)\left(\sum_{i=1}^{s}\frac{1}{s_2(i,1)}X_{*i}^{(j_1)}\right)\Bigg], \\ \mu^* &= \frac{1}{\sum_{i=1}^{s}\frac{1}{s_2(i,1)}}\Bigg(\sum_{i=1}^{s}\frac{1}{s_2(i,1)}X_{*i}^{(j_1)} \\ &\qquad -\sum_{i=1}^{s}\frac{s_1(i,1)}{s_2(i,1)}\sigma^*\Bigg), \end{aligned}$$

است که در آن،

$$\begin{aligned} K &= \left(\sum_{i=1}^{s}\sum_{k=1}^{r_i}\frac{s_1^2(i,k)}{s_2(i,k)}\right)\left(\sum_{i=1}^{s}\frac{1}{s_2(i,1)}\right) \\ &\quad -\left(\sum_{i=1}^{s}\frac{s_1(i,1)}{s_2(i,1)}\right)^2>0. \end{aligned}$$

بنابراین برای واریانس و کواریانس این دو برآوردگر نیز مقادیر زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} Var(\sigma^*) &= \sigma^2\frac{\sum_{i=1}^{s}\frac{1}{s_2(i,1)}}{K}, \\ Var(\mu^*) &= \sigma^2\frac{\sum_{i=1}^{s}\sum_{k=1}^{r_i}\frac{s_1^2(i,k)}{s_2(i,k)}}{K}, \\ Cov(\mu^*,\sigma^*) &= -\sigma^2\frac{\sum_{i=1}^{s}\frac{s_1(i,1)}{s_2(i,1)}}{K}. \end{aligned}$$

# ۵ برآوردگر ماکسیمم درستنمایی$(MLE)$

هدف این قسمت به‌دست آوردن برآورد ماکسیمم درستنمایی برای نمونه سانسورشده مضاعف نوع دوم است، به‌این ترتیب طریقه محاسبه این برآوردگر را برای حالت ساده آماره‌های ترتیبی دنباله‌ای، یعنی $\alpha=1$ (آماره‌های ترتیبی معمولی) بررسی می‌کنیم. فرض کنید نمونه‌ی تصادفی سانسورشده مضاعف نوع دوم به صورت زیر باشد:

$$Y_1=X^{(j_1)},Y_2=X^{(j_2)},...,Y_q=X^{(j_q)}.$$

در این صورت، با در نظرگرفتن توزیع نمایی یک پارامتری با تابع چگالی و تابع توزیع

$$f(x)=\frac{1}{\sigma}e^{-x/\sigma},$$
$$F(x)=1-e^{-x/\sigma},$$

تابع درستنمایی بر اساس نمونه سانسورشده مضاعف، به‌صورت زیر است:

$$L=const\times\sigma^{-q}\left[1-e^{-\frac{y_1}{\sigma}}\right]^{j_1-1} e^{\frac{\left[\sum_{i=1}^{q}y_i+(n-j_q)y_q\right]}{\sigma}}\times\prod_{i=1}^{q-1}\left[e^{-\frac{y_i}{\sigma}}-e^{-\frac{y_{i+1}}{\sigma}}\right]^{j_{i+1}-j_i-1}.$$

با برابر صفر قرار دادن مشتق لگاریتم این تابع براساس $\sigma$ داریم:

$$q\sigma+(j_1-1)y_1\frac{e^{-\frac{y_1}{\sigma}}}{[1-e^{-\frac{y_1}{\sigma}}]}-\sum_{i=1}^{q}y_i-(n-j_q)y_q$$
$$-\sum_{i=1}^{q-1}[j_{i+1}-j_i-1]\left\{\frac{-y_{i+1}e^{-\frac{y_{i+1}}{\sigma}}+y_ie^{-\frac{y_i}{\sigma}}}{-e^{-\frac{y_{i+1}}{\sigma}}+e^{-\frac{y_i}{\sigma}}}\right\}=0.$$

با توجه به این که این معادله، معادله یکنوا بر حسب $\sigma$ است، برآورد ماکسیمم درستنمایی یکتایی را نتیجه می‌دهد اما به دلیل این که جواب صریحی از این معادله به‌دست نمی‌آید با تقریبی بر روی این تابع برآورد ماکسیمم درستنمایی تقریبی را محاسبه می‌کنیم.

برای تقریب زدن از روش بالاکریشنان که در مرجع [۲] معرفی شده است، استفاده می‌کنیم:

$$\frac{-y_{i+1}e^{-\frac{y_{i+1}}{\sigma}}+y_ie^{-\frac{y_i}{\sigma}}}{-e^{-\frac{y_{i+1}}{\sigma}}+e^{-\frac{y_i}{\sigma}}}\approx\gamma_i+\delta_i\frac{y_i}{\sigma}+(1-\delta_i)\frac{y_{i+1}}{\sigma},$$

که در آن،

$$\begin{aligned} p_i^* &= \frac{j_i}{n+1}, \qquad q_i^*=1-p_i^*, \\ \delta_i &= \frac{q_i^*}{q_i^*-q_{i+1}^*}-\frac{q_i^*q_{i+1}^*}{(q_i^*-q_{i+1}^*)^2}\log(\frac{q_i^*}{q_{i+1}^*}), \\ \gamma_i &= \frac{q_{i+1}^*\log q_{i+1}^*-q_i^*\log q_i^*}{q_i^*-q_{i+1}^*}+ \\ &\qquad \delta_i\log q_i^*+(1-\delta_i)\log q_{i+1}^*, \end{aligned}$$

و بنابراین برآورد ماکسیمم درستنمایی تقریبی $\sigma$ برابر خواهد شد با:

$$\bar{\sigma}=\left\{\sum_{i=1}^{q}y_i+\sum_{i=0}^{q-1}[j_{i+1}-j_i-1]\right.$$
$$\left.\delta_i y_i+(1-\delta_i)y_{i+1}+(n-j_q)y_q\right\}\Big/\left\{q-\sum_{i=0}^{q-1}[j_{i+1}-j_i-1]\gamma_i\right\}.$$

با در نظر گرفتن توزیع نمایی دو پارامتری با تابع چگالی و تابع توزیع

$$f(x)=\frac{1}{\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)}{\sigma}},\quad x\geq\mu,\sigma>0,$$
$$F(x)=1-e^{-\frac{(x-\mu)}{\sigma}},\quad x\geq\mu,\sigma>0,$$

تابع درستنمایی بر اساس نمونه سانسورشده مضاعف، به‌صورت زیر است:

$$L=const\times\sigma^{-q}[1-e^{-\frac{y_1-\mu}{\sigma}}]^{j_1-1}$$
$$e^{\frac{\mu}{\sigma}(n-j_1+1)}e^{-\frac{[\sum_{i=1}^{q}y_i+(n-j_q)y_q]}{\sigma}}$$
$$\times\prod_{i=1}^{q-1}\left[e^{-\frac{y_i}{\sigma}}-e^{-\frac{y_{i+1}}{\sigma}}\right]^{j_{i+1}-j_i-1}.$$

مشخص است که اگر $j_1=1$، تابع بالا تابعی یکنوا در $\mu$ است و بنابراین برآورد ماکسیمم درستنمایی $\mu$ برابر:

$$\bar{\mu}=y_1=x^{(j_1)}=x^{(1)},$$

است و اگر $j_1>1$، طبق معادله‌ی درستنمایی زیر

$$\frac{\partial\log L}{\partial\mu}=\frac{1}{\sigma}\left[(n-j_1+1)-(j_1-1)\frac{e^{-\frac{(y_1-\mu)}{\sigma}}}{1-e^{-\frac{(y_1-\mu)}{\sigma}}}\right]=0,$$

برآورد ماکسیمم درستنمایی $\mu$ برابر:

$$\bar{\mu}=y_1+\bar{\sigma}\log\left[\frac{n-j_1+1}{n}\right].$$

خواهد بود. معادله‌ی درستنمایی برای $\sigma$ نیز به‌صورت زیر است:

$$\frac{\partial\log L}{\partial\sigma}=\frac{-1}{\sigma^2}\left[q\sigma+(n-j_1+1)y_1-\left\{\sum_{i=1}^{q}y_i+(n-j_q)y_q\right\}\right.$$
$$\left.-\sum_{i=1}^{q-1}(j_{i+1}-j_i-1)\left\{\frac{y_ie^{-\frac{y_i}{\sigma}}-y_{i+1}e^{-\frac{y_{i+1}}{\sigma}}}{e^{-\frac{y_i}{\sigma}}-e^{-\frac{y_{i+1}}{\sigma}}}\right\}\right]=0.$$

مانند بخش قبل با توجه به این که این معادله، معادله‌ای یکنوا بر اساس $\sigma$ است، برآورد ماکسیمم درستنمایی یکتایی را نتیجه می‌دهد اما به دلیل این که جواب صریحی از این معادله به‌دست نمی‌آید، با به‌کارگیری تقریب بالاکریشنان بر روی این معادله، برآورد ماکسیمم درستنمایی تقریبی را محاسبه می‌کنیم و به این ترتیب برآورد ماکسیمم درستنمایی $\sigma$ برابر:

$$\bar{\sigma}=\left\{\sum_{i=1}^{q}y_i+(n-j_q)y_q+\sum_{i=1}^{q-1}(j_{i+1}-j_i-1)(\delta_iy_i+\right.$$
$$\left.(1-\delta_i)y_{i+1})-(n-j_1+1)y_1\right\}\Big/\left\{q-\sum_{i=1}^{q-1}(j_{i+1}-j_i-1)\gamma_i\right\}.$$

خواهد بود.

# ٦ مثال‌های کاربردی

## مثال اول

نمونه شبیه‌سازی شده در این مثال که در مرجع [٣] آمده است، مربوط به زمان‌های شکست مشاهده شده از سیستمی است که طول عمر مؤلفه‌های آن دارای توزیع نمایی یک پارامتری با $\sigma=20$ هستند. در این نمونه 10 زمان شکست به‌صورت مضاعف سانسور شده‌اند. هم‌چنین بایستی یادآور شد که در این سیستم $\alpha=1$ در نظر گرفته شده است؛ در واقع می‌توان گفت بعد از اولین شکست در این سیستم، توزیع طول عمرهای باقی‌مانده تغییر نمی‌کند و بنابراین مدلی که پیش‌رو داریم مدلی از آماره‌های ترتیبی معمولی است. نمونه مورد نظر به‌قرار زیر است:

$$x_1=0.961,x_2=0.990,x_3=1.565,x_4=2.031$$
$$x_5=2.204,x_6=2.340,x_7=3.642,x_8=6.008$$
$$x_9=6.538,x_{10}=7.145,x_{11}=-,x_{12}=-,$$

$$x_{13}=-,x_{14}=11.937,x_{15}=15.433,x_{16}=18.234,$$
$$x_{17}=18.307,x_{18}=22.096,x_{19}=-,x_{20}=-,$$
$$x_{21}=-,x_{22}=28.799,x_{23}=30.692,x_{24}=30.737,$$
$$x_{25}=33.702,x_{26}=34.245,x_{27}=-,x_{28}=-,$$
$$x_{29}=-,x_{30}=-,$$

بهترین برآوردگر نااریب خطی $\sigma$ برابر با $\sigma^*=19.9426$ و برآوردگر ماکسیمم درستنمایی تقریبی $\sigma$ نیز برابر با مقدار $\bar{\sigma}=19.9712$ به‌دست می‌آید. نتایج محاسبه برآوردگر بیز و هم‌چنین خطای استاندارد پسین برای $a$ و $b$ های متفاوت در جدول (١) آمده است که $se(\hat{\sigma})=\sqrt{Var(\hat{\sigma}|\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x})}=\sqrt{(\widehat{\sigma^2}-\hat{\sigma}^2)}$ . همان‌گونه که مشاهده می‌شود برای حالت $a=1$ و $b=1$، $\hat{\sigma}$ نزدیکترین مقدار را به مقدار واقعی دارد اما خطای استاندارد پسین در حالت $a=0$ و $b=2$، کمترین مقدار را می‌گیرد.

### مثال دوم

این مثال شامل پنج نمونه شبیه‌سازی شده است که این نمونه‌ها مربوط به زمان‌های شکست مشاهده شده از یک سیستم 2 از 5 دنباله‌ای هستند و طول عمر مؤلفه‌های این سیستم دارای توزیع نمایی یک پارامتری با $\sigma = 100$ است.

هرنمونه شامل پنج مشاهده است که برخی از این مشاهدات سانسورشده‌اند و به‌صورت کلی در هر نمونه زمان شکست پنجم مشاهده نمی‌شود زیرا سیستم بعد از شکست چهارم خودبه‌خود از کار می‌افتد.

هم‌چنین در این سیستم $i$–امین شکست بر توزیع طول عمر $n-i$ مؤلفه باقی‌مانده تأثیر می‌گذارد، به این ترتیب که مجموعه پارامترهای $\alpha$ برابر مقادیر زیر است:

$$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1.2, \alpha_3 = 1.4, \alpha_4 = 1.6, \alpha_5 = 1.8.$$

در این مثال ابتدا مقادیر $\hat{\sigma}$ و $se(\hat{\sigma})$ را محاسبه و سپس با توجه به این که در نمونه آخر تنها سه زمان شکست مشاهده شده است، زمان شکست چهارم پیشگویی می‌شود. نمونه مورد نظر به‌قرار زیر است:

$$x_1^{(1)} = -, x_1^{(2)} = -, x_1^{(3)} = 15.085,$$
$$x_1^{(4)} = 65.409,$$
$$x_2^{(1)} = 36.982, x_2^{(2)} = 48.055, x_2^{(3)} = -,$$
$$x_2^{4} = 197.405,$$
$$x_3^{(1)} = 29.657, x_3^{(2)} = 56.983,$$
$$x_3^{(3)} = 59.664, x_3^{(4)} = 75.441,$$
$$x_4^{(1)} = 4.738, x_4^{(2)} = 33.625,$$
$$x_4^{(3)} = 48.066, x_4^{(4)} = 89.756$$
$$x_5^{(1)} = 19.128, x_5^{(2)} = 58.242, x_5^{(3)} = 73.406.$$

نتیجه محاسبه‌ها در جدول (۲) آمده است که با توجه به نتایج این جدول مشاهده می‌شود که در حالت $a = 0$ و $b = 2$، مقدار $\hat{\sigma}$ از دقت بیشتری برخوردار است.

## ۷ شبیه‌سازی

در این قسمت نمونه‌ای شامل 30 زمان شکست شبیه‌سازی شده است. این نمونه‌ی شبیه‌سازی شده مربوط به زمان‌های شکست مشاهده شده از سیستمی است که طول عمر مؤلفه‌های آن دارای توزیع نمایی با میانگین $\sigma = 30$ هستند. در این نمونه 10 زمان شکست 11، 12، 13، 19، 20، 21، 27، 28، 29 و 30 به صورت مضاعف سانسور شده‌اند و همچنین در این سیستم $\alpha = 1.3$ در نظر گرفته شده‌است. با استفاده از تکنیک شبیه‌سازی مونت کارلو عملیات محاسبه $\hat{\sigma}$ و $se(\hat{\sigma})$ را به تعداد 150، 1000 و 1500 بار تکرار کرده و در نهایت میانگین آن‌ها را با $\bar{\hat{\sigma}}$ و $\bar{s}e(\hat{\sigma})$ نشان داده و نتایج به‌دست آمده را ثبت نموده‌ایم. نتایج در جدول ۳ آمده است.

## پیوست

### اثبات قضیه‌ها

#### قضیه‌ی ۲.۲

اثبات. با توجه به قضیه ۱.۲، برای $1 \leq l \leq r$ داریم:

$$X_*^{(l)} = \mu + \sum_{k=1}^{l} \frac{\sigma}{\gamma_k} W_*^{(k)} = \mu + \sum_{k=1}^{l} U_*^{(k)}.$$

و با در نظر گرفتن $q = 1$ داریم:

$$\begin{aligned} f_{X_*^{(j_1)}}(x^{j_1}) &= f_{\mu + \sum\limits_{k=1}^{j_1} U_*^{(k)}}(x^{(j_1)}) \\ &= f_{\sum\limits_{k=1}^{j_1} U_*^{(k)}}(x^{(j_1)} - \mu), \end{aligned}$$

بنابراین تابع چگالی توأم آماره‌های ترتیبی دنباله‌ای سانسورشده مضاعف نوع دوم تحت توزیع نمایی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$f_{\boldsymbol{X}_*}(\boldsymbol{x}) = \prod_{p=1}^{q} f_{\sum\limits_{k=j_{p-1}}^{j_p} U_*^{(k)}}(x^{(j_p)} - x^{(j_{p-1})}).$$

از طرف دیگر می‌دانیم مجموع وزنی از متغیرهای مستقل و هم‌توزیع نمایی استاندارد به‌صورت ارلنگ تعمیم‌یافته توزیع شده‌اند، بنابراین تابع توزیع و تابع چگالی

$\sum\limits_{k=j_{p-1}+1}^{j_p} U_*^{(k)} = \sum\limits_{k=j_{p-1}+1}^{j_p} \frac{\sigma}{\gamma_k} W_*^{(k)}$ به ترتیب عبارت از:

$$F_{\sum\limits_{k=j_{p-1}+1}^{j_p} \frac{\sigma}{\gamma_k} W_*^{(k)}}(t) = 1 - \left( \prod_{k=j_{p-1}+1}^{j_p} \gamma_k \right) \sum_{k=j_{p-1}+1}^{j_p} \frac{1}{\gamma_k} a_k^{(j_{p-1})}(j_p)\, e^{\frac{-\gamma_k}{\sigma}t},\ t \geq 0$$

و

$$f_{\sum\limits_{k=j_{p-1}+1}^{j_p} \frac{\sigma}{\gamma_k} W_*^{(k)}}(t) = \left( \prod_{k=j_{p-1}+1}^{j_p} \gamma_k \right) \sigma^{-1} \sum_{k=j_{p-1}+1}^{j_p} a_k^{(j_{p-1})}(j_p)\, e^{\frac{-\gamma_k}{\sigma}t}, \quad t \geq 0,$$

هستند. بنابراین با قرار دادن این رابطه در معادله‌ی قبلی داریم:

$$f_{\boldsymbol{X}_*}(\boldsymbol{x}) \prod_{p=1}^{q} f_{\sum\limits_{k=j_{p-1}+1}^{j_p} \frac{\sigma}{\gamma_k} W_*^{(k)}}(x^{(j_p)} - x^{(j_{p-1})}) = \sigma^{-q} \left( \prod_{p=1}^{q} \prod_{k=j_{p-1}+1}^{j_p} \gamma_k \right) \prod_{p=1}^{q} \left( \sum_{k=j_{p-1}+1}^{j_p} a_k^{(j_{p-1})}(j_p) \exp\left( \frac{-\gamma_k}{\sigma}(x^{(j_p)} - x^{(j_{p-1})}) \right) \right).$$

□

### لم ۳.۱

اثبات. می‌دانیم که

$$\begin{aligned} \pi_{\Sigma|\boldsymbol{X}}(\sigma|\boldsymbol{x}) &= \frac{\prod_{i=1}^{s} f_{\boldsymbol{X}_{*i}|\Sigma}(\boldsymbol{x}_i|\sigma) \times \pi_\Sigma(\sigma)}{\int_0^\infty \prod_{i=1}^{s} f_{\boldsymbol{X}_{*i}|\Sigma}(\boldsymbol{x}_i|\sigma) \times \pi_\Sigma(\sigma) d\sigma} \\ &= c^{-1}\, \sigma^{-(Q+b+1)}\, e^{-\frac{a}{\sigma}} \prod_{i=1}^{s} \prod_{p=1}^{q_i} \\ &\times \sum_{k=j_{i,p-1}+1}^{j_{ip}} a_k^{(j_{i,p-1})}(j_{ip})\, e^{-\frac{V_{ik}^p}{\sigma}}, \end{aligned}$$

که در آن،

$$c = \int_0^\infty \sigma^{-(Q+b+1)}\, e^{-\frac{a}{\sigma}} \prod_{i=1}^{s} \prod_{p=1}^{q_i} \sum_{k=j_{i,p-1}+1}^{j_{ip}} a_k^{(j_{i,p-1})}(j_{ip})\, e^{-\frac{V_{ik}^p}{\sigma}} d\sigma.$$

اما از آنجایی که

$$\prod_{i=1}^{s} \prod_{p=1}^{q_i} \sum_{k=1}^{z_{ip}} x_{ipk} = \sum_{\substack{\boldsymbol{k}=(k_{11},\ldots,k_{sq_s}),\\ k_{\nu\varphi}\in(1,\ldots,z_{\nu\varphi}),\\ 1\leq\varphi\leq q_\nu, 1\leq\nu\leq s}} \prod_{i=1}^{s} \prod_{p=1}^{q_i} x_{ipk_{ip}},$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} c &= \sum_{\boldsymbol{k}\in\boldsymbol{K}} \left( \prod_{i=1}^{s} \prod_{p=1}^{q_i} a_{k_{ip}}^{(j_{i,p-1})}(j_{ip}) \right) \\ &\times \int_0^\infty \sigma^{-(Q+b+1)}\, e^{-\frac{a}{\sigma}}\, e^{-\frac{\sum_{i=1}^{s}\sum_{p=1}^{q_i} V_{ik_{ip}}^p}{\sigma}} d\sigma \\ &= \sum_{\boldsymbol{K}\in\boldsymbol{K}} \Psi(\boldsymbol{k}) \int_0^\infty \sigma^{-(Q+b+1)}\, e^{-\frac{V_{\boldsymbol{k}}+a}{\sigma}} d\sigma \\ &= \sum_{\boldsymbol{k}\in\boldsymbol{K}} \Psi(\boldsymbol{k}) \frac{\Gamma(Q+b)}{(V_{\boldsymbol{k}}+a)^{Q+b}}. \end{aligned}$$

سرانجام چگالی پسین $\Sigma$ به شرط $\boldsymbol{X}$ برابر:

$$\pi_{\Sigma|\boldsymbol{X}}(\sigma|\boldsymbol{x}) = c^{-1}\, \sigma^{-(Q+b+1)} \sum_{\boldsymbol{k}\in\boldsymbol{K}} \Psi(\boldsymbol{k})\, e^{-\frac{V_{\boldsymbol{k}}+a}{\sigma}}.$$

است. □

### لم ۳.۲

اثبات. فرض کنید $X_1, \ldots X_r \overset{iid}{\sim} Exp(0,1)$، در این صورت $Y = \sum_{j=1}^{r} Y_j = \sum_{j=1}^{r} \frac{1}{\gamma_j} X_j$ دارای توزیع ارلنگ تعمیم‌یافته با چگالی زیر است:

$$f_Y(t) = \left( \prod_{j=1}^{r} \gamma_j \right) \sum_{j=1}^{r} a_j(r)\, e^{-\gamma_j t}, \qquad t \geq 0.$$

با توجه به چگالی بالا، $k$-امین گشتاور $Y$ برابر:

$$E(Y^k) = \left( \prod_{j=1}^{r} \gamma_j \right) \sum_{j=1}^{r} a_j(r) \frac{\Gamma(k+1)}{{\gamma_j}^{k+1}} \tag{۷}$$

است. اکنون تنها کافی است نشان دهیم:

$$E(Y^k) = k! \sum_{l_1=0}^{k} \sum_{l_2=0}^{l_1} \ldots \sum_{l_{r-1}=0}^{l_{r-2}} \left( {\gamma_1}^{l_{r-1}} \ldots {\gamma_{r-1}}^{l_1-l_2} {\gamma_r}^{k-l_1} \right)^{-1}. \tag{۸}$$

برای اثبات از استقراء استفاده می‌کنیم. با توجه به این نکته که $E({Y_i}^k) = k!/{\gamma_i}^k$ و این‌که $Y_1$ و $Y_2$ مستقل هستند، برای $r = 2$، داریم:

$$E((Y_1+Y_2)^k) = k! \sum_{l_1=0}^{k} \left( {\gamma_1}^{l_1}\, {\gamma_2}^{k-l_1} \right)^{-1}.$$

اکنون بنابر اصل استقراء با فرض برقراری رابطه‌ی (۸) برای نمونه‌ی $r$-تایی، اثبات می‌شود که نمونه‌ی $r+1$-تایی نیز در این رابطه صدق می‌کند:

$$\begin{aligned} E(Y^k) &= E\left( \sum_{j=1}^{r+1} Y_j \right)^k = E\left( \sum_{j=1}^{r} Y_j + Y_{r+1} \right)^k \\ &= k! \sum_{l_0=0}^{k} \sum_{l_1=0}^{l_0} \ldots \sum_{l_{r-1}=0}^{l_{r-2}} \left( {\gamma_1}^{l_{r-1}} \ldots {\gamma_{r-1}}^{l_1-l_2} {\gamma_r}^{l_0-l_1} {\gamma_{r+1}}^{k-l_0} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

اکنون با انتقال اندیس‌های $l_0 \to l_1$ و...و $l_{r-1} \to l_r$ استقراء کامل و رابطه‌ی (۸) اثبات می‌شود. اینک با برابر قرار دادن (۷) و (۸) و تقسیم دو طرف بر $k!$ اثبات کامل می‌شود. □

### قضیه‌ی ۳.۳

اثبات. به دلیل استقلال شرطی $\boldsymbol{X}_{*1},...,\boldsymbol{X}_{*s}$ به شرط $\Sigma=\sigma$ داریم:

$$f_{X_{*i}^{(r_i)}|\boldsymbol{X},\Sigma}(t|(\boldsymbol{x},\sigma)) = f_{X_{*i}^{(r_i)}|\boldsymbol{X}_{*i},\Sigma}(t|(\boldsymbol{x}_i,\sigma)),$$

که $t > x_i^{(j_{iq_i})}$ و $\sigma > 0$.

بنابراین تابع چگالی پیش‌گویی‌کننده $X_{*i}^{(r_i)}$ به شرط $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} & f_{X_{*i}^{(r_i)}|\boldsymbol{X}}(x_i^{(r_i)}|\boldsymbol{x}) \\ = & \int_0^\infty f_{(X_{*i}^{(r_i)},\Sigma)|\boldsymbol{X}}((x_i^{(r_i)},\sigma)|\boldsymbol{x})d\sigma \\ = & \int_0^\infty f_{X_{*i}^{(r_i)}|(\boldsymbol{X}_{*i},\Sigma)}(x_i^{(r_i)}|\boldsymbol{x}_i,\sigma) \\ & \times \pi_{\Sigma|\boldsymbol{X}}(\sigma|\boldsymbol{x})d\sigma \\ = & c^{-1}\left(\prod_{k=j_{iq_i}+1}^{r_i}\gamma_{ik}\right)\left(\sum_{k=j_{iq_i}+1}^{r_i} a_k^{(j_{iq_i})}(r_i)\right. \\ & \left.\sum_{\boldsymbol{k}\in\boldsymbol{K}}\Psi(\boldsymbol{k})\frac{\Gamma(Q+b+1)}{(V_{i\boldsymbol{k}}^{(k)}(x_i^{(r_i)}))^{Q+b+1}}\right), \end{aligned}$$

که در آن، $V_{i\boldsymbol{k}}^{(k)}(x_i^{(r_i)})=\gamma_{ik}(x^{(r_i)}-x^{(j_{iq_i})})+V_{\boldsymbol{k}}+a$. پیشگویی‌کننده $\hat{X}_{*i}^{(r_i)}$ از $X_{*i}^{(r_i)}$ برابر با میانگین $X_{*i}^{(r_i)}$ به شرط $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}$ است و بنابراین

$$\begin{aligned} & \hat{X}_{*i}^{(r_i)} = E(X_{*i}^{(r_i)}|\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}) = \int_{x_i^{(j_{iq_i})}}^\infty t f_{X_{*i}^{(r_i)}|\boldsymbol{X}}(t|\boldsymbol{x})dt = \\ & c^{-1}\left(\prod_{k=j_{iq_i}+1}^{r_i}\gamma_{ik}\right)\left(\sum_{k=j_iq_i+1}^{r_i} a_k^{(j_iq_i)}(r_i)\right. \\ & \left.\sum_{\boldsymbol{k}\in\boldsymbol{K}}\Psi(\boldsymbol{k})\int_{x_i^{(j_{iq_i})}}^\infty t\frac{\Gamma(Q+b+1)}{(V_{i\boldsymbol{k}}^k(t))^{Q+b+1}}dt\right), \end{aligned}$$

و با استفاده از انتگرال‌گیری جزء‌به‌جزء داریم:

$$\begin{aligned} & \int_{x_i^{(j_{iq_i})}}^\infty t\left(V_{i\boldsymbol{k}}^k(t)\right)^{-(Q+b+1)}dt = \\ & \frac{(V_{\boldsymbol{k}}+a)^{-(Q+b)}}{(Q+b)}\left[\frac{x_i^{(j_{iq_i})}}{\gamma_{ik}}+\frac{V_{\boldsymbol{k}}+a}{\gamma_{ik}{}^2(Q+b-1)}\right]. \end{aligned} \quad (۹)$$

با قرار دادن رابطه‌ی (۹) در فرمول $\hat{X}_{*i}^{(r_i)}$ و با ساده کردن معادله‌ی آن بر طبق دو معادله (۳) و (۴) ، پیش‌گویی‌کننده $\hat{X}_{*i}^{(r_i)}$ برابر

$$\hat{X}_{*i}^{(r_i)} = x_i^{(j_{iq_i})} + \hat{\sigma}\sum_{k=j_{iq_i}+1}^{r_i}\frac{1}{\gamma_{ik}},\ j_{iq_i} < r_i,$$

است. □

### قضیه‌ی ۴.۲

اثبات. با در نظر گرفتن مدل خطی

$$\boldsymbol{X}_\mu = \boldsymbol{\alpha}\sigma + \boldsymbol{\Delta},$$

با شرایط زیر

$$E(\boldsymbol{X}_\mu) = \sigma\boldsymbol{\alpha},$$

$$Cov(\boldsymbol{X}_\mu) = Cov(\Delta) = \sigma^2 B,$$

$$k=0, n=\sum_{i=1}^s r_i,$$

که $\boldsymbol{\alpha}$ ماتریس طرح، $\sigma$ پارامتر مورد نظر و $\Delta$ بردار تصادفی است و جایگذاری این مقادیر در قضیه ۱.۴ اثبات کامل می‌شود. □

### قضیه‌ی ۴.۳

اثبات. اگر مدل خطی

$$\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{1})\begin{pmatrix}\sigma\\ \mu\end{pmatrix} + \boldsymbol{\Delta},$$

با شرایط

$$E(\boldsymbol{X}) = (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{1})\begin{pmatrix}\sigma\\ \mu\end{pmatrix},$$

$$Cov(\boldsymbol{X}) = Cov() = \sigma^2 B,$$

$$k=1, n=\sum_{i=1}^s r_i,$$

که $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{1})$ ماتریس طرح، $\begin{pmatrix}\sigma\\ \mu\end{pmatrix}$ بردار پارامتر مورد نظر و بردار تصادفی است را در نظر بگیریم آنگاه با جایگذاری این مقادیر در قضیه ۱.۴ نتیجه دلخواه به‌دست می‌آید. □

جدول ۱: نتایج برآورد بیزی پارامتر مدل با استفاده ازچگالی پیشین گامای وارون برای $a$ و $b$–های متفاوت

| $a$ | $b$ | $\hat{\sigma}$ | $se(\hat{\sigma})$ |
|---|---|---|---|
| 0 | −1 | 21.6139 | 4.5067 |
| 1 | 0 | 20.7881 | 4.2466 |
| 0 | 0 | 20.7485 | 4.2368 |
| 1 | 1 | 19.9873 | 4.0007 |
| 0 | 1 | 19.9488 | 3.9933 |
| 1 | 2 | 19.2458 | 3.7776 |
| 0 | 2 | 19.2088 | 3.7717 |

جدول ۲: نتایج برآورد بیزی پارامتر مدل و پیش‌گویی زمان شکست چهارم از نمونه پنجم با استفاده از چگالی پیشین گامای وارون برای $a$ و $b$–های متفاوت

| $a$ | $b$ | $\hat{\sigma}$ | $se(\hat{\sigma})$ | $\hat{X}_{*5}^{(4)}$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | −1 | 120.6417 | 30.2652 | 111.1065 |
| 1 | 0 | 113.9492 | 27.7374 | 109.0151 |
| 0 | 0 | 113.8932 | 27.7239 | 108.9976 |
| 1 | 1 | 107.9084 | 25.5312 | 107.1274 |
| 0 | 1 | 107.8554 | 25.5188 | 107.1108 |
| 1 | 2 | 102.4721 | 23.6022 | 105.4285 |
| 0 | 2 | 102.4217 | 23.5908 | 105.4128 |

جدول ۳: نتایج برآورد بیزی پارامتر مدل با استفاده از چگالی پیشین گامای وارون برای $a$ و $b$های متفاوت

| $k=150$ | $a$ | $b$ | $\bar{\hat{\sigma}}$ | $\bar{s}e(\hat{\sigma})$ |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 0 | 31.5958 | 6.4565 |
| | 0 | 0 | 31.5557 | 6.4484 |
| | 1 | 1 | 30.3779 | 6.0825 |
| | 0 | 1 | 30.3393 | 6.0748 |
| | 1 | 2 | 29.2502 | 5.74326 |
| | 0 | 2 | 28.9091 | 5.7359 |
| $k=1000$ | $a$ | $b$ | $\bar{\hat{\sigma}}$ | $\bar{s}e(\hat{\sigma})$ |
| | 1 | 0 | 31.2674 | 6.3894 |
| | 0 | 0 | 31.2273 | 6.3812 |
| | 1 | 1 | 30.0622 | 6.0193 |
| | 0 | 1 | 30.0236 | 6.0116 |
| | 1 | 2 | 28.9462 | 5.6835 |
| | 0 | 2 | 28.9091 | 5.6762 |
| $k=1500$ | $a$ | $b$ | $\bar{\hat{\sigma}}$ | $\bar{s}e(\hat{\sigma})$ |
| | 1 | 0 | 31.3598 | 6.4081 |
| | 0 | 0 | 31.3197 | 6.3999 |
| | 1 | 1 | 30.1511 | 6.0369 |
| | 0 | 1 | 30.1125 | 6.0292 |
| | 1 | 2 | 29.0319 | 5.7001 |
| | 0 | 2 | 28.9948 | 5.6929 |

## مراجع

[1] Ahmadi, J. and Doostparast, M. (2008). Statistical inference based on $k$-records. *Mashhad Research Journal of Mathematical Sciences.* **1(1)**, 67–82.

[2] Balakrishnan, N. (1990). On the maximum likelihood estimation of the location and scale parameters of exponential distribution based on multiply Type-II censored samples. *Applied Statistics*. **17**, 55–61.

[3] Balasubramanian, K. and Balakrishnan, N. (1992). Estimation for one-and two-parameter exponential distributions under multiple Type-II censoring. *Statistische Hefte*. **33**, 203-216.

[4] Jaheen, Z.F. (2005). Estimation based on generalized order statistics from the Burr model. *Communications in Statistics - Theory and Methods*. **34**, 785–794.

[5] Kamps, U. (1995a). A concept of generalized order statistics. *Statistical Planning and Inference*, **48**, 1-23.

[6] Kamps, U. (1995b). *A Concept of Generalized Order Statistics*. Teubner. Stuttgart.

[7] Schenk, N., Burkschat, M., Cramer, E. and Kamps, U. (2011). Bayesian estimation and prediction with multiply Type-II censored samples of sequential order statistics from one- and two-parameter exponential distributions. *Statistical Planning and Inference*. **141**, 1575–1587.

[8] Sultan, K.S. (2008). Bayesian estimates based on record values from the inverse Weibull life time model. *Quality Technology and Quantitative Management*. **5**, 363–374.