نقش هندسه در استقلال دوبه‌دو و استقلال تام

نیل شورتمن و تری کیسر
ترجمهٔ علی اکبر محسنی‌پور *

چکیده

در حالی که مفاهیم استقلال دوبه‌دو و تام، نقش بنیادی در نظریهٔ احتمال دارند، گاهی تمایز بین آنها برای دانشجویان مشکل است. برای استقلال دوبه‌دوی متغیرهای تصادفی‌یی که به صورت یکنواخت روی ناحیهٔ تکیه‌گاهشان توزیع شده‌اند، داشتن «تکیه‌گاه مستطیلی»، یعنی حاصلضرب دکارتی بازه‌ها برای چگالی توأم آنها، شرط لازم و کافی برای استقلال تام است. استفاده از تصاویر هندسی به دانشجویان در درک این نتایج کمک کرده، بینش جدیدی دربارهٔ تفاوت این دو مفهوم فراهم می‌آورد.

۱ مقدمه

مفاهیم استقلال و احتمال حاشیه‌ای در فهم نظریه احتمال نقش اساسی داشته و جنبه‌ای مهم از درسهای مقدماتی احتمال و آمار هستند. معمولاً تفاوت بین استقلال دوبه‌دو و تام، برای متغیرهای تصادفی گسسته، با مثالی مانند مثال زیر، تشریح می‌شود.

مثال ۱

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{در نقاط } p_1, p_2, p_3, p_4 \\ 0, & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

که در آن نقاط عبارت‌اند از:

$$p_1 : x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1$$
$$p_2 : x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$$
$$p_3 : x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0$$
$$p_4 : x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0$$

هر سه چگالی حاشیه‌ای به صورت زیراند

$$g_i(x_i) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x = 0, 1 \\ 0, & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

و چگالی توأم هر دو متغیر به صورت زیر است:

$$h(x_i, x_j) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & x_j = 0, 1,\ x_i = 0, 1 \\ 0, & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

مشاهده می‌شود که، $f(0, 0, 0) = 0 \neq g_1(0)g_2(0)g_3(0)$ و بنابراین X_1، X_2، X_3 دارای استقلال تام نیستند. امّا چون برای هر i و j، $h(x_i, x_j) = g_i(x_i)g_j(x_j)$، پس متغیرها دوبه‌دو مستقل‌اند. تفاوت این دو نوع استقلال، که در حالت متغیرهای تصادفی گسسته، به‌سادگی شرح داده شد، برای متغیرهای پیوسته به این بدیهی نیست. ما مثالهایی هندسی را مطرح می‌کنیم که می‌توانند در تسهیل یادگیری مؤثر بوده و بینش جدیدی در مورد این تمایز فراهم آورد.

*) علی‌اکبر محسنی‌پور، دانشجوی کارشناسی‌ارشد آمار، مؤسسه ریاضیات دکتر مصاحب در دانشگاه تربیت معلم.

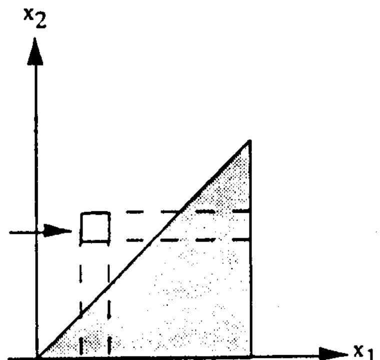
۲ تکیه‌گاه مستطیلی همبند

در برخی از کتابهای درسی مانند هاگ[1] و تنیس[2] (۱۹۹۳)، «تکیه‌گاه» تابع چگالی احتمال $f(x_1,\dots,x_n)$ را مجموعهٔ مقادیری از X_1، X_2، ...، X_n تعریف می‌کنند که به ازای آنها، $f(x_1,x_2,\dots,x_n)>0$. تذکر داده می‌شود که برای آنکه دو متغیر تصادفی X_1 و X_2 مستقل باشند، باید تابع چگالی توأم آنها یعنی، $h(x_1,x_2)$، برابر حاصلضرب تابعهای توزیع حاشیه‌ای $g_1(x_1)$ و $g_2(x_2)$ باشد و این امر تنها زمانی ممکن است که، تکیه‌گاه X_1، X_2 یک «مستطیل» باشد. مستطیلی بودن تکیه‌گاه اشاره بر حاصلضرب دکارتی بازه‌ها دارد. این نتیجه، پیامدی از فضای حاصلضربی است که، به وسیلهٔ فضای احتمال اصلی هر کدام از چگالیهای حاشیه‌ای تشکیل شده است. از مستطیلی بودن تکیه‌گاه نمی‌توان استقلال را نتیجه گرفت، در حالی که مستطیلی نبودن تکیه‌گاه مانع استقلال دو متغیر می‌شود. این موضوع را می‌توان در مثال زیر به آسانی دید.

مثال ۲. فرض کنید،

$$f(x_1,x_2)=\begin{cases}2, & 0\le x_2\le x_1<1\\ 0, & \text{سایر جاها}\end{cases}$$

شکل ۱ تکیه‌گاه مثلثی f را نشان می‌دهد. توجه کنید که $P(X_1<\frac{1}{2}, X_2>\frac{1}{2})=0$. زیرا احتمال قرارگرفتن در مربعی را نشان می‌دهد که خارج تکیه‌گاه است، امّا $P(X_1<\frac{1}{2})=P(X_2)\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$. برای هر تکیه‌گاه غیر مستطیلی، می‌توان ناحیه‌ای مانند ناحیهٔ A در شکل ۱، بیرون از تکیه‌گاه یافت که در نتیجه احتمال آن برابر صفر باشد، امّا هر دو حاشیهٔ مربوط مثبت باشند.



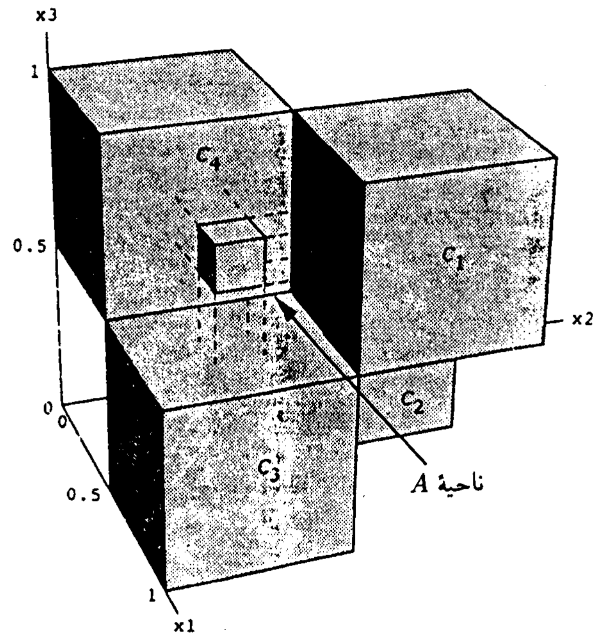
شکل ۱. تکیه‌گاه f در مثال ۲

به عکس، حتی وقتی که تکیه‌گاه مستطیلی باشد، ممکن است X_1 و X_2 وابسته باشند. این موضوع را با تابع چگالی توأم زیر شرح می‌دهیم.

$$f(x_1,x_2)=\begin{cases}\frac{8}{5}, & \frac{1}{2}\le x_1\le 1, \quad \frac{1}{2}\le x_2\le 1\\ \frac{2}{5}, & 0\le x_1\le \frac{1}{2}, \quad \text{یا} \quad 0\le x_2\le \frac{1}{2}\\ 0, & \text{سایر جاها}\end{cases}$$

که در آن تکیه‌گاه به صورت یک مربع واحد است، ولی X_1، X_2 وابسته‌اند.

همین ایده را می‌توان به حالت سه‌بعدی گسترش داد و بینش با ارزشی از تفاوت بین استقلال دوبه‌دو و تام به دست آورد. و این تمایزی است که دانشجویان مبتدی برای فهم آن اغلب دچار مشکل می‌شوند. به طور مشخص تکیه‌گاه سه بعدی متغیرهای پیوستهٔ X_1، X_2 و X_3 باید ذاتاً یک مکعب مستطیل باشد تا متغیرها به صورت تام و مستقل باشند، ولی برای استقلال دوبه‌دو، فقط لازم است که تصویر تکیه‌گاه روی صفحه‌ها، مستطیل باشد. با استفاده از بحث قبلی برای استقلال دوبه‌دو، چگالی احتمال توأم باید دارای تکیه‌گاه مستطیلی باشد؛ یعنی، تصاویر تکیه‌گاه روی هر کدام از صفحه‌های x_1x_2، x_1x_3 و x_2x_3 باید یک مستطیل باشد. مثال ۳ با تکیه‌گاهی که در شکل ۲ نشان داده شده است، توصیفی ساده از حالتی است که استقلال دوبه‌دو وجود دارد، ولی استقلال تام وجود ندارد.



شکل ۲. تکیه‌گاه f در مثال ۳

مثال ۳

$$f(x_1,x_2,x_3)=\begin{cases}2, & (x_1,x_2,x_3)\in C_1\cup C_2\cup C_3\cup C_4\\ 0, & \text{سایر جاها}\end{cases}$$

که در آن، مکعبها به صورت زیرند:

---
1) Hogg 2) Tanis

$$C_1: \frac{1}{2} \le x_1 \le 1, \quad \frac{1}{2} \le x_2 \le 1, \quad \frac{1}{2} \le x_3 \le 1$$
$$C_2: 0 \le x_1 \le \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} \le x_2 \le 1, \quad 0 \le x_3 \le \frac{1}{2}$$
$$C_3: \frac{1}{2} \le x_1 \le 1, \quad 0 \le x_2 \le \frac{1}{2}, \quad 0 \le x_3 \le \frac{1}{2}$$

و

$$C_4: 0 \le x_1 \le \frac{1}{2}, \quad 0 \le x_2 \le \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} \le x_3 \le 1$$

برای تعیین چگالیهای حاشیه‌ای توجه کنید که وقتی $0 \le x_1 \le \frac{1}{2}$،

$$g_1(x_1) = \iint_{C_2 \cup C_4} 2\,dx_2 dx_3 = 1,$$

و وقتی $\frac{1}{2} \le x_1 \le 1$،

$$g_1(x_1) = \iint_{C_1 \cup C_3} 2\,dx_2 dx_3 = 1$$

با تحلیلی مشابه، می‌توان نشان داد که، برای $i = 1, 2, 3$،

$$g_i(x_i) = \begin{cases} 1, & 0 \le x_i \le 1 \\ 0, & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

چگالی توأم $h(x_1, x_2)$ شامل انتگرالی متناظر با هر یک از مکعبهای به شکل $\int_0^{\frac{1}{2}} 2dx_3 = 1$ یا $\int_{\frac{1}{2}}^1 2dx_3 = 1$ است. همچنین، برای $1 \le i < j \le 3$، داریم

$$h(x_i, x_j) = \begin{cases} 1, & 0 \le x_i \le 1, \quad 0 \le x_j \le 1 \\ 0, & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

مشاهده می‌شود که، مثلاً $f(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}) = 0$، زیرا شامل نقطه‌ای بیرون از تکیه‌گاه f است، امّا، $g_1(\frac{3}{4})g_2(\frac{1}{4})g_3(\frac{3}{4}) = 1$. بنابراین، X_1، X_2 و X_3 کلی مستقل تام نیستند. اگرچه، به دلیل اینکه به ازای هر i, j، $1 \le i < j \le 3$، $h(x_i, x_j) = g_i(x_i)g_j(x_j)$، X_i و X_j دارای استقلال دوبه‌دو هستند. تکیه‌گاه این تابع چگالی که در شکل ۲ مشخص شده است، نشان می‌دهد که برای استقلال دوبه‌دو X_1، X_2 و X_3 فقط لازم است که تصاویر روی هر صفحه، مستطیل باشند. امّا، برای استقلال قویتر تام، تکیه‌گاه باید یک مکعب مستطیل باشد، تا از ایجاد ناحیه‌ای مانند A در شکل ۲، که در بیرون از تکیه‌گاه f قرار گرفته و بنابراین دارای احتمال صفر است امّا سه احتمال حاشیه‌ای آن مثبت است، جلوگیری کند.

برای اینکه دو متغیر مستقل باشند، مستطیلی بودن تکیه‌گاه شرطی لازم است اما کافی نیست. به طور مشابه برای حالت سه متغیر تصادفی، مکعب مستطیل بودن تکیه‌گاه، تنها شرطی لازم است ولی کافی نیست. مثلاً، تابع چگالی توأمی f را با ساختار زیر در نظر بگیرید.

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} 2 - c, & (x_1, x_2, x_3) \in C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4 \\ c, & \text{روی یک مکعب واحد دیگر} \\ 0, & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

که در آن، c هر ثابتی است که در $0 \le c \le C_2$ صدق کند. و C_iها، $i = 1, 2, 3, 4$، مکعبهایی هستند که در شکل ۲ داده شده‌اند. متغیرهای X_1، X_2 و X_3 مستقل دوبه‌دو خواهند بود. ولی هنگامی که، $c \neq 1$، مستقل تام نیستند. و اگر $c \neq 0$ یا $c \neq 2$ به روشنی می‌بینیم که تکیه‌گاه از تمامی مکعب واحد تشکیل می‌شود.

با این حال توجه به این امر حائز اهمیت است که، اگر چگالی توأم یکنواخت باشد، یعنی مقدار ثابتی روی تام تکیه‌گاه بگیرد ($c = 1$)، در این صورت، مستطیلی بودن تکیه‌گاه شرط لازم و کافی برای استقلال تام است.

۳ تکیه‌گاه مستطیلی مجزا

جالب است توجه شود که، تکیه‌گاه مستطیلی لازم برای استقلال، ممکن است متشکل از چند مقطع مستطیلی ناهمبند باشد که، به صورتی مناسب چنان قرارگرفته‌اند که یک حاصلضرب دکارتی از بازه‌ها را تشکیل می‌دهند، آن گونه که در مثال زیر تشریح شده است.

مثال ۴

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{9}{4}, & (x_1, x_2) \in S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 \\ 0, & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

که در آن، مربعها به صورت،

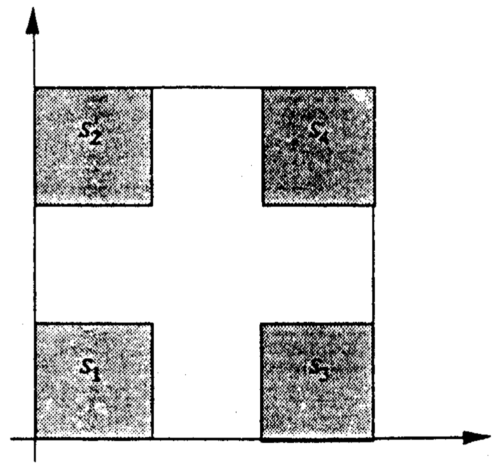
$$S_1: \quad 0 \le x_1 \le \frac{1}{3}, \quad 0 \le x_2 \le \frac{1}{3}$$
$$S_2: \quad 0 \le x_1 \le \frac{1}{3}, \quad \frac{2}{3} \le x_2 \le 1$$
$$S_3: \quad \frac{2}{3} \le x_1 \le 1, \quad 0 \le x_2 \le \frac{1}{3}$$

و

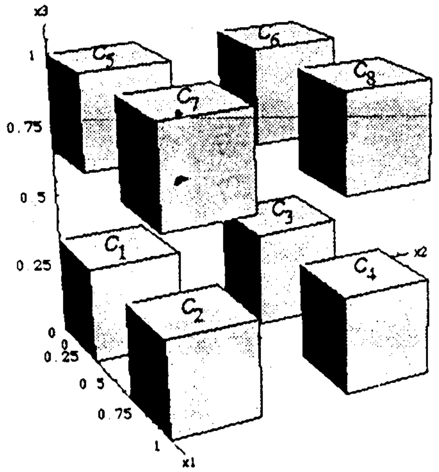
$$S_4: \quad \frac{2}{3} \le x_1 \le 1, \quad \frac{2}{3} \le x_2 \le 1$$

هستند که تکیه‌گاه آن در شکل ۳ نشان داده شده است. می‌بینیم که، این مثال ناحیه‌های بیرون از تکیه‌گاه را که هر دو احتمال حاشیه‌ای آن غیرصفر باشند، مجاز نمی‌داند. بنابراین،

$$\begin{aligned} g_1(x) &= \int f(x_1, x_2)dx_2 \\ &= \int_0^{\frac{1}{3}} f(x_1, x_2)dx_2 + \int_{\frac{2}{3}}^1 f(x_1, x_2)dx_2 \\ &= \begin{cases} \frac{3}{2}, & 0 \le x_1 \le \frac{1}{3} \quad \text{یا} \quad \frac{2}{3} \le x_1 \le 1 \\ 0, & \text{سایر جاها} \end{cases} \end{aligned}$$



شکل ۳. تکیه‌گاه در مثال ۴



شکل ۴. تکیه‌گاه در مثال ۵

همچنین

$$g_2(x_2) = \begin{cases} \frac{3}{2}, & 0 \leq x_2 \leq \frac{1}{3}, \quad \text{یا} \quad \frac{2}{3} \leq x_2 \leq 1 \\ 0, & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

و $f(x_1, x_2) = g_1(x_1)g_2(x_2)$. بنابراین X_1 و X_2 مستقل‌اند.

شبیه به استقلال دو متغیر که در آن تکیه‌گاه می‌توانست به صورت مقاطع مستطیلی ناهمبند باشد، برای سه متغیر نیز، تکیه‌گاه متغیرهای مستقل تام، ممکن است، از مکعبهای مستطیلی ناهمبند، تشکیل شده باشد. این موضوع را با تابع چگالی که در مثال زیر داده‌ایم ثابت کرده‌ایم.

مثال ۵

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} \frac{27}{8}, & (x_1, x_2, x_3) = \bigcup_{i=1}^{8} C_i \\ 0, & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

مکعبهایی که در شکل ۴ مشخص شده‌اند تکیه‌گاه f را نشان می‌دهند. تابع چگالی توأم دوبه‌دوی آنها، $h(x_i, x_j)$ و تابعهای چگالی حاشیه‌ای آنها، $g_i(x_i)$ به ترتیب مشابهٔ $f(x_1, x_2)$ و حاشیه‌ایهای $g_i(x_i)$ی مثال ۲، هستند.

۴ نتیجه

پیکربندیهای هندسی شکل ۲ نشان می‌دهد که چگونه استقلال دوبه‌دوی ضعیفتر، صرفاً با داشتن تصویرهای مستطیلی شکل تکیه‌گاه.بر هر صفحه، (با مقاطع مستطیلی ناهمبند) امکان‌پذیر است. در حالی که، استقلال تام قویتر مستلزم آن است که تکیه‌گاه، مکعب مستطیل (یا مکعبهای مستطیلی ناهمبند) باشد. ساختارهای تکیه‌گاه مورد نیاز، می‌توانند، در تعیین امکان وجود استقلال دوبه‌دو یا تام متغیرهای تصادفی، بسیار مفید باشند. تفاوت بین شرطهایی که بر تکیه‌گاه اعمال می‌شوند تمایزی مهم بین این دو نوع استقلال است . تکیه‌گاههایی که در شکلها نشان داده شده‌اند، برای دانشجو، تصویری واضح از پیکربندیهای تکیه‌گاه لازم، فراهم می‌آورند، که به درک کامل تفاوت بین این دو نوع استقلال کمک می‌کند. به علاوه این شکلها باید تا حّد زیادی درک دانشجو را، از اهمیت نقش تکیه‌گاه در اثبات استقلال متغیرهای تصادفی، بالا برند.

مرجع

• Hogg, R. B., and Tanis, E. A. (1993), *Probability and Statistical Inference* (4th ed.), New York: Macmillan.

***

اصل این مقاله با عنوان
The Role of Geometry in pairwise and mutual Independence تألیف Neil C. Schwertman و Terry L. Kiser در شماره ۱، دورهٔ ۴۹ مجلهٔ *The American Statistician* به چاپ رسیده است.