# توزیع فارلی – گامبل – مرگنسترن دو متغیره با توابع حاشیه‌ای توان دو متغیره

ماه‌بانو تاتا[۱] ، زهره رهنمایی[۲]

چکیده:

فارلی[۳] – گامبل[۴] – مرگنسترن[۵] خانواده‌ای از توزیع‌های دو متغیره‌ای را مورد بحث قرار دادند که با نام FGM شناخته می‌شود. مکانیسم‌های متعددی برای ساختن توزیع‌های دو متغیره با توزیع‌های حاشیه‌ای داده شده وجود دارد که روش FGM تنها یکی از آنها است اما با وجود روش‌های متعدد، هنوز آسان‌ترین روش برای ساختن یک توزیع دو متغیره با توزیع‌های حاشیه‌ای داده شده، همان روش مذکور بوده، بنابراین بیشترین کاربرد را دارد. این خانواده از توزیع‌ها علاوه بر پارامترهای توزیع‌های حاشیه‌ای، دارای یک پارامتر اضافی که پارامتر پیوند نام دارد، هستند. این پارامتر، درجه وابستگی میان متغیرهای مربوطه را تعیین می‌کند. در مقاله حاضر رفتار ضریب همبستگی در این توزیع را زمانی که توزیع‌های حاشیه‌ای TSP هستند، بررسی می‌کنیم.

**واژه‌های کلیدی:** توزیع FGM، توزیع حاشیه‌ای، توزیع TSP، ساختار همبستگی، درجه وابستگی، مقادیر کرانگین (فرین)، ناوردا.

## ۱ مقدمه و تاریخچه مختصر

فارلی و گامبل در سال ۱۹۶۰ میلادی و مرگنسترن در سال ۱۹۵۶ میلادی خانواده‌ای از توزیع‌های دومتغیره $X_1$ و $X_2$ که تابع توزیع آن به صورت زیر می‌باشد را مورد بررسی قرار دادند[۶]:

$$F_{12}(x_1,x_2) = F_1(x_1)\,F_2(x_2)$$
$$[1+\alpha(1-F_1(x_1))(1-F_2(x_2))] \qquad (1)$$

در اینجا $F_1$ و $F_2$ به ترتیب توابع توزیع متغیرهای $X_1$ و $X_2$ می‌باشند. این خانواده ازتوزیع‌ها با نام توزیع‌های فارلی– گامبل– مرگنسترن (FGM) شناخته می‌شوند.

به راحتی می‌توان نشان داد که اگر $|\alpha| \leq 1$، آن‌گاه $F_{12}$ در شرایط تابع توزیع دو متغیره، با توابع توزیع حاشیه‌ای $F_1$ و $F_2$ صدق می‌کند.

شایان ذکر است که شرط $|\alpha| \leq 1$ فقط یک شرط کافی است، یعنی امکان دارد $|\alpha| > 1$ باشد، اما $F_{12}$ در شرایط تابع توزیع دو متغیره صدق کند [۳].

اگر توابع $F_1$ و $F_2$ مطلقاً پیوسته[۶] باشند، آنگاه تابع چگالی دو متغیره مربوط به توزیع FGM به صورت زیر

[۱] گروه آمار، دانشگاه شهید با هنر کرمان
[۲] دانشگاه آزاد واحد فیروزکوه
[۳] Farlie
[۴] Gumbel
[۵] Morgenstern
[۶] Absolutely continuous

است:

$$f_{12}(x_1, x_2) = f_1(x_1) f_2(x_2)$$
$$[1 + \alpha (2F_1(x_1) - 1)(2F_2(x_2) - 1)] \qquad (2)$$

توزیع فارلی–گامبل–مرگنسترن دو متغیره در ابتدا توسط مرگنسترن در سال ۱۹۵۶ میلادی معرفی شد. وی این توزیع را در صورتی که توزیع‌های حاشیه‌ای کوشی باشند، به کار گرفت. در سال ۱۹۶۰ میلادی گامبل ساختار مشابهی را زمانی که چگالی‌های حاشیه‌ای نمایی هستند، بررسی کرد و در همان سال فارلی بر روی ضریب همبستگی توزیع دو متغیره بررسی شده توسط مرگنسترن و گامبل (در ادامه بررسی‌هایش در مورد ضریب همبستگی) مطالعاتی انجام داد [۲].

در سال ۱۹۷۵ و ۱۹۷۷ میلادی جانسن[7] و کاتس[8] توزیع FGM دو متغیره را به بیش از دو متغیر تعمیم دادند [۳و۴].

**قضیه ۱** اگر $X_1$ و $X_2$ با واریانس‌های متناهی و غیرصفر، دارای توزیع FGM دو متغیره باشند، آنگاه $|\rho| \leq \frac{1}{3}$.

**مثال ۱** اگر هر دو توزیع حاشیه‌ای، نرمال با پارامترهای $\mu$ و $\sigma^2$ باشند، آنگاه $\frac{X_i - \mu}{\sigma}$ $(i = 1, 2)$ دارای توزیع نرمال استاندارد است، می‌توان نشان داد: $\rho = \frac{\alpha}{\pi}$.

**مثال ۲** اگر توزیع‌های حاشیه‌ای، نمایی با پارامتر $\lambda$ باشند، آنگاه خواهیم داشت: $\rho = \frac{\alpha}{4}$.

**مثال ۳** اگر توابع حاشیه‌ای یکنواخت باشند، آنگاه $\rho = \frac{\alpha}{3}$. در اینجا اگر $\alpha = 1$، آنگاه مقدار ضریب همبستگی برابر با $\frac{1}{3}$ است.

توجه: در مثال‌های یاد شده، می‌بینیم که مقدار ضریب همبستگی بین دو متغیر تصادفی با توزیع FGM از $\frac{1}{3}$ کمتر است، اما در مثال ۳ می‌بینیم که می‌توان به این کران بالا رسید.

## ۲ توزیع توان دو طرفه

توزیع توان دوطرفه (TSP)[9]، توسط ون درپ[10] و کاتس معرفی شده است. شکل متعارف[11] آن با تابع توزیع و تابع چگالی زیر مشخص می‌شود.

$$F_X(x) = \begin{cases} \theta \left(\frac{x}{\theta}\right)^n & 0 \leq x \leq \theta \\ 1 - (1 - \theta)\left(\frac{1 - x}{1 - \theta}\right)^n & \theta \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} n \left(\frac{x}{\theta}\right)^{n-1} & 0 < x \leq \theta \\ n \left(\frac{1 - x}{1 - \theta}\right)^{n-1} & \theta \leq x < 1 \end{cases} \qquad (3)$$

این خانواده از توزیع‌ها، دارای دو پارامتر $\theta$ و $n$ هستند که در آن $0 \leq \theta \leq 1$ و $n > 0$ است. این خانواده را به اختصار با $TSP(\theta, n)$ نشان می‌دهیم.

این خانواده از توزیع‌های پیوسته کران‌دار، کاملاً انعطاف پذیرند. انعطاف‌پذیری این توزیع، شبیه انعطاف‌پذیری توزیع بتا است. هر دوخانواده، شامل انواع توزیع‌های $U-$ شکل $(n < 1, \theta \in (0, 1))$، $J-$ شکل $(\theta \in \{0, 1\})$ و تک مدی[12] $(n > 1, \theta \in (0, 1)\ or\ \theta \in \{0, 1\})$

Johnson[7]
Kotz[8]
Two-sided power distribution[9]
Van Dorp[10]
Canonical form[11]
Unimodal[12]

هستند. ون درپ و کاتس ثابت کردند که هر دو خانواده، دارای توزیع‌های حدی[۱۳] یکسان هستند [۵]. توزیع یکنواخت $n=1$ ، توزیع توانی ($\theta=1$) و توزیع مثلثی[۱۴] ($n=2$) هر سه متعلق به خانواده $TPS(\theta,n)$ هستند.

## ۳ تابع چگالی توزیع فارلی–گامبل–مرگنسترن با توابع حاشیه‌ای توان دو طرفه

فرض می‌کنیم متغیرهای تصادفی $X_1$ و $X_2$ به ترتیب با توابع حاشیه‌ای $TSP(\theta_1,n_1)$ و $TSP(\theta_2,n_2)$ دارای توزیع توأم FGM هستند. در شکل‌های (۱) تا (۴) چند توزیع FGM ($\alpha=1$) را با توزیع‌های حاشیه‌ای TSP نشان داده‌ایم. در آنجا توزیع‌های حاشیه‌ای مربوطه را نیز می‌بینیم. در دو شکل اول توزیع‌های حاشیه‌ای یکسان هستند، ولی در دو شکل آخر از توزیع‌های حاشیه‌ای متفاوت $TSP(\theta_i,n_i)(i=1,2)$ استفاده شده است.

با مقایسه شکل‌های یاد شده، می‌بینیم که تابع چگالی FGM می‌تواند با تغییر پارامترهای توزیع‌های حاشیه‌ای، شکل‌های گوناگون اختیار کند، بنابراین جالب است که ساختار همبستگی در توزیع FGM با توابع حاشیه‌ای TSP را مورد بررسی قرار دهیم.

## ۴ ساختار همبستگی

شکل‌های (۵) و (٦) توزیع FGM با توابع حاشیه‌ای یکنواخت را برای حالتی که بیشترین و کمترین وابستگی مثبت[۱۵] وجود دارد ($\alpha=1, \alpha=0$)، نشان می‌دهد. در شکل (۵) میان متغیرهای $X_1$ و $X_2$ بیشترین وابستگی وجود دارد. در این حالت می‌بینیم که مقادیر بزرگ (کوچک) متغیر $X_1$ با مقادیر بزرگ (کوچک) متغیر $X_2$ متناظر است، بنابراین وابستگی میان این دو متغیر، مثبت است. در شکل (٦) متغیرهای $X_1$ و $X_2$ از هم مستقل‌اند. با مقایسه این دو شکل می‌بینیم که اثر درجه وابستگی در تابع چگالی توأم، کاملاً آشکار است. در شکل‌های (۷) و (۸) توزیع FGM با توابع حاشیه‌ای مثلثی متقارن، برای حالتی که بیشترین و کمترین وابستگی وجود دارد ($\alpha=1, \alpha=0$)، نشان داده شده است. در شکل (۷) میان متغیرهای $X_1$ و $X_2$ بیشترین وابستگی وجود دارد، در حالی‌که در شکل (۸) متغیرها از هم مستقل‌اند. این دو شکل به‌قدری شبیه هم هستند که شاید بتوان گفت اگر توزیع‌های حاشیه‌ای، یکنواخت نباشند، آنگاه درجه وابستگی در شکل توزیع توأم چندان اثری ندارد.

## ۵ رفتار کلی ضریب همبستگی

می‌دانیم که توزیع $TSP(\theta,n)$ متعلق به خانواده مکان–مقیاس[۱٦] نیست، بنابراین ضریب همبستگی در توزیع FGM، زمانی که توابع حاشیه‌ای $TSP(\theta,n)$ هستند، به پارامترهای هر دو توزیع حاشیه‌ای، بستگی خواهد داشت. برای به‌دست آوردن مقدار ضریب همبستگی در توزیع FGM، فرض می‌کنیم که متغیرهای

[۱۳] Limiting distribution
[۱۴] Triangular distribution
[۱۵] Positive dependence
[۱٦] Location-scale family

$X_1$ و $X_2$ به ترتیب دارای توزیع‌های $TSP(\theta_1,n_1)$ و $TSP(\theta_2,n_2)$ هستند. اتحاد[17] زیر را که توسط هوفدینگ[18] در سال ۱۹۴۰ میلادی به‌دست آمده، در نظر می‌گیریم [۱]:

$$Cov\left(X_1,X_2\right)=\int_0^1\int_0^1\left\{F_{12}\left(x_1,x_2\right)-F_1\left(x_1\right)F_2\left(x_2\right)\right\}dx_1dx_2 \quad (۴)$$

این اتحاد به ازای هر دو متغیر $X_1$ و $X_2$ به‌ترتیب با توابع حاشیه‌ای $F_1$ و $F_2$ و تابع توزیع توأم $F_{12}$ برقرار است. اگر توابع توزیع حاشیه‌ای متغیرهای $X_1$ و $X_2$ و توزیع توأم FGM این دو متغیر را در داخل اتحاد مذکور قرار دهیم به راحتی خواهیم داشت:

$$Corr\left(X_1,X_2|\underline{\theta},\underline{n}\right)=\alpha\prod_{i=1}^{2}\sqrt{\frac{\left(n_i+2\right)}{n_i-2\left(n_i-1\right)\theta_i\left(1-\theta_i\right)}}\cdot\frac{n_i-\left(n_i-1\right)\theta_i\left(1-\theta_i\right)}{\left(2n_i+1\right)} \quad (۵)$$

که در آن $\underline{\theta}=(\theta_1,\theta_2)$ و $\underline{n}=(n_1,n_2)$.

اکنون می‌خواهیم رفتار کلی معادله (۵) را به‌عنوان تابعی از پارامترهای $(\theta_i,n_i)(i=1,2)$ بررسی کنیم. قبل از آن تابع زیر را در نظر می‌گیریم:

$$g\left(\theta,n\right)=\frac{\left(n+2\right)}{\left(2n+1\right)^2}\frac{\left\{n-\left(n-1\right)\theta\left(1-\theta\right)\right\}^2}{n-2\left(n-1\right)\theta\left(1-\theta\right)}=\frac{n\left(n+2\right)}{\left(2n+1\right)^2}\left\{1+\frac{\left(n-1\right)^2\theta^2\left(1-\theta\right)^2}{n\left\{n-2\left(n-1\right)\theta\left(1-\theta\right)\right\}}\right\} \quad (۶)$$

در حقیقت تابع $g\left(\theta,n\right)$ بیشترین مقدار ضریب همبستگی در توزیع FGM $(\alpha=1)$ با توابع چگالی حاشیه‌ای یکسان $TSP(\theta,n)$ است. چون معادله (۵) تابع تفکیک پذیری[19] از هر $(\theta_i,n_i)$ است، مقادیر کرانگین (فرین)[20] تابع $g\left(\theta,n\right)$، منطبق بر مقادیر کرانگین (فرین) معادله (۵) است. بنابراین به جای بررسی در رفتار معادله (۵)، رفتار کلی تابع $g\left(\theta,n\right)$ را مطالعه می‌کنیم.

عامل اول در $g\left(\theta,n\right)$، همان ضریب همبستگی در توزیع FGM با توابع چگالی حاشیه‌ای $TSP(1,n)$ است و رفتار کلی ضریب همبستگی را به عنوان تابعی از $n$ بررسی می‌کند. عامل دوم، یک فاکتور تصحیح برای افزایش تقارن در چگالی‌های حاشیه‌ای می‌باشد. با توجه به واریانس در توزیع TSP، می‌توان دید که عامل تصحیح برای $\theta\in(0,1)$ و $n\neq 1$، از یک بزرگتر است.

در شکل‌های (۹) تا (۱۲) مقادیر کرانگین (فرین) $g\left(\theta,n\right)$ را به عنوان توابعی از $\theta$، $n$ و هر دو نمایش داده‌ایم. با توجه به شکل (۹) و (۱۰) می‌بینیم که بیشترین مقدار تابع $g\left(\theta,n\right)$ به‌ازای هر $\theta$ ثابت برابر است. بنابراین با $g\left(\theta,1\right)=\frac{1}{3}$، نتیجه می‌گیریم که ضریب همبستگی در توزیع FGM با توزیع‌های حاشیه‌ای TSP، زمانی به بیشترین مقدار خود، یعنی $\frac{\alpha}{3}$ می‌رسد که توزیع‌های حاشیه‌ای TSP، یکنواخت باشند $(n=1)$، علاوه بر این می‌توان دید که کمترین مقدار ضریب همبستگی برای هر $\theta$ی ثابت، زمانی به‌دست می‌آید که

[17] Identity
[18] Hoffding
[19] Separable function
[20] Extreme values

$n \downarrow 0$ یا $n \uparrow \infty$، یعنی کمترین مقدار این ضریب برای هر $\theta$ ثابت برابر است با:

$$g(\theta, 0) = \lim_{n \downarrow 0} g(\theta, n) = \theta(1-\theta)$$
$$g(\theta, n) = \lim_{n \uparrow \infty} g(\theta, n) = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{\theta^2(1-\theta)^2}{1-2\theta(1-2\theta)}\right) \quad (7)$$

با توجه به شکل (۱۱) می‌بینیم که $g(\frac{1}{2}, n)$ و $g(0, n)$ به‌ترتیب به‌ازای هر $n$ ثابت بیشترین و کمترین مقدار تابع $g(\theta, n)$ می‌باشند.

اگر قرار دهیم:

$$d(n) = g\left(\frac{1}{2}, n\right) - g(0, n) = \frac{1}{8}\frac{n+2}{n+1}\left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^2 \quad (8)$$

آنگاه به‌راحتی دیده می‌شود که این تابع در $n = 1$، کمترین مقدار خود را می‌گیرد و با توجه به‌آنکه تابع $d(n)$، در بازه $(-\infty, 1)$ کاهشی و در بازه $(1, +\infty)$ افزایشی است و $\lim_{n \downarrow 0} d(n) = \frac{1}{4}$ و $\lim_{n \uparrow \infty} d(n) = \frac{1}{32}$، می‌توان نتیجه گرفت که بیشترین اختلاف[۲۱] بین دو ضریب همبستگی $\frac{1}{4}$ است، به‌علاوه برای $n^* = \frac{-17+\sqrt{513}}{16} \approx 0/35$ داریم: $d(n^*) = d(\infty) = \frac{1}{32}$، بنابراین برای همه $n > n^*$ (که در کاربردها معقول است) داریم: $d(n) < \frac{1}{32}$، به علاوه داریم: $g(0, n^*) \approx 0/28541$. بنابراین به این نتیجه مهم می‌رسیم که تابع $g(\theta, n)$ برای همه $n > n^*$، از $g(0, n^*)$ تا $g(\theta, 1)$ تغییر پیدا خواهد کرد، پس دامنه تغییرات تابع $g(\theta, n)$ برای همه $n > n^*$، حداکثر ۰/۰۴۷۹۲ است. به هر حال برای همه $n > n^*$، ضریب همبستگی در توزیع FGM با توزیع‌های حاشیه‌ای یکسان TSP، اکیداً بزرگتر از ضریب همبستگی در توزیع FGM با توزیع‌های حاشیه‌ای یکسان توانی است، اما در عمل این تفاوت برای $\theta \in [0, 1]$ از $\frac{1}{32}$ تجاوز نمی‌کند. بنابراین اثر پارامترهای $\theta$ و $n$ در مقدار ضریب همبستگی، تقریباً قابل اغماض است.

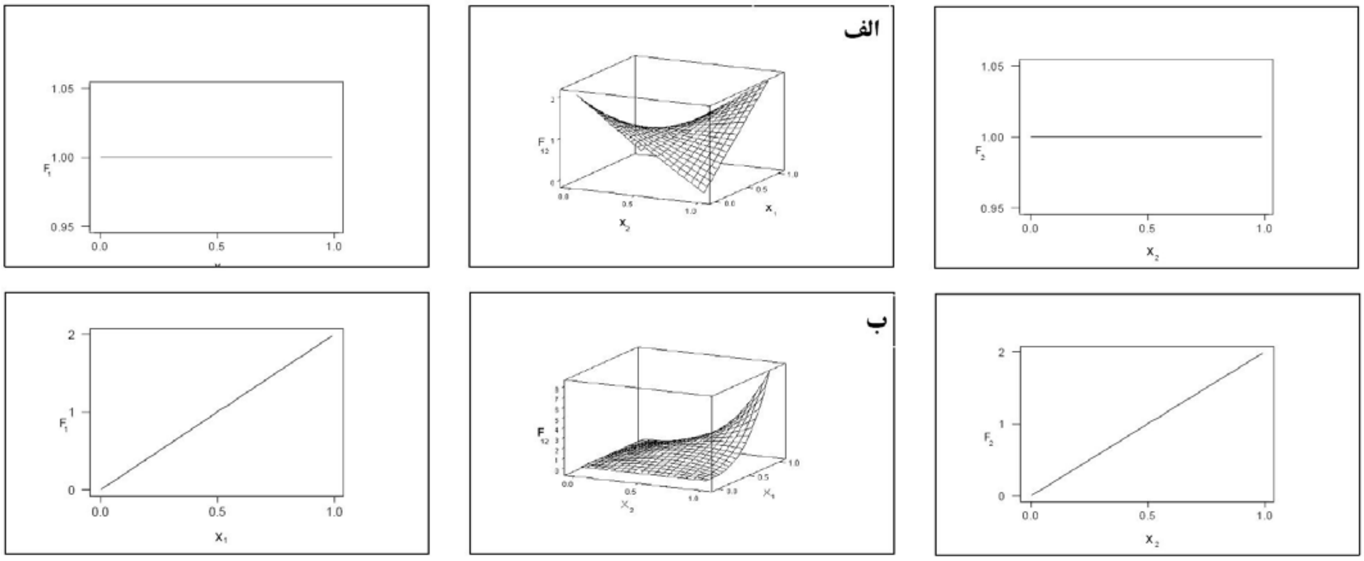
رفتار کلی ضریب همبستگی در توزیع FGM با توزیع‌های حاشیه‌ای TSP، شبیه رفتار همبستگی در توزیع FGM با توزیع‌های حاشیه‌ای توانی است، به این معنا که مقدار این ضریب برای $n \in (0, 1]$ افزایشی و برای $n \in [1, \infty)$ کاهشی است. چون مقدار تابع $g(\theta, n)$ برای $n \geq n^*$ به طور فوق‌العاده پایدار است، شاید بتوان نتیجه گرفت که ضریب همبستگی نیز برای $n_i \geq n^*$ پایدار است.

علاوه بر این، رفتارضریب همبستگی در توزیع FGM با توابع حاشیه‌ای بتا که تابع توزیع آن صریح نیست، احتمالاً شبیه رفتار ضریب همبستگی در توزیع FGM با توزیع‌های حاشیه‌ای TSP است و پایداری مشابه‌ای را از خود نشان می‌دهد.

## ۶ نتیجه‌گیری

همان‌طور که قبلاً گفته شد، ضریب همبستگی در توزیع FGM با توزیع‌های حاشیه‌ای TSP به پارامترهای توزیع‌های حاشیه‌ای بستگی دارد. اما دیدیم که در برابر تغییر پارامترها، یک پایداری اساسی در مقدار این ضریب وجود دارد و تنها در بعضی حالت‌ها اندکی واگرایی[۲۲] در

[۲۱] Discrepancy
[۲۲] Divergent



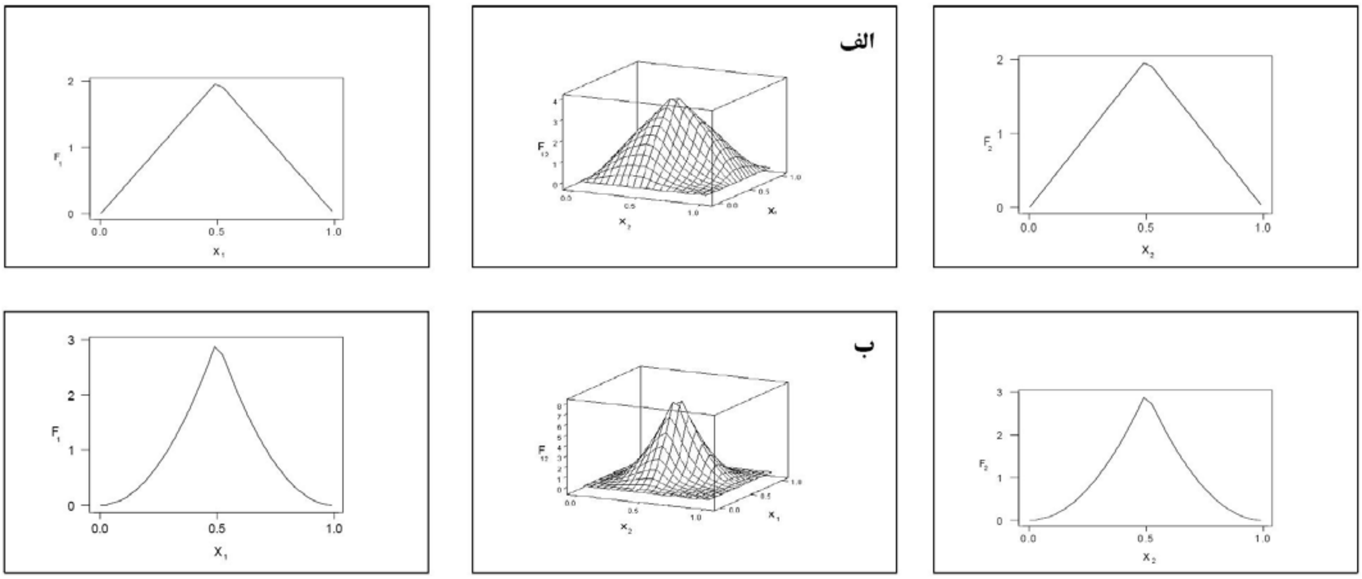

**شکل ۱.** توزیع FGM با توابع حاشیه‌ای یکسان $TSP(\theta_i, n_i)$ و $\alpha = 1$ ; الف) $n_i = 1$ ; ب) $\theta_i = 1, n_i = 2$

مقدار آن مشاهده می‌شود.

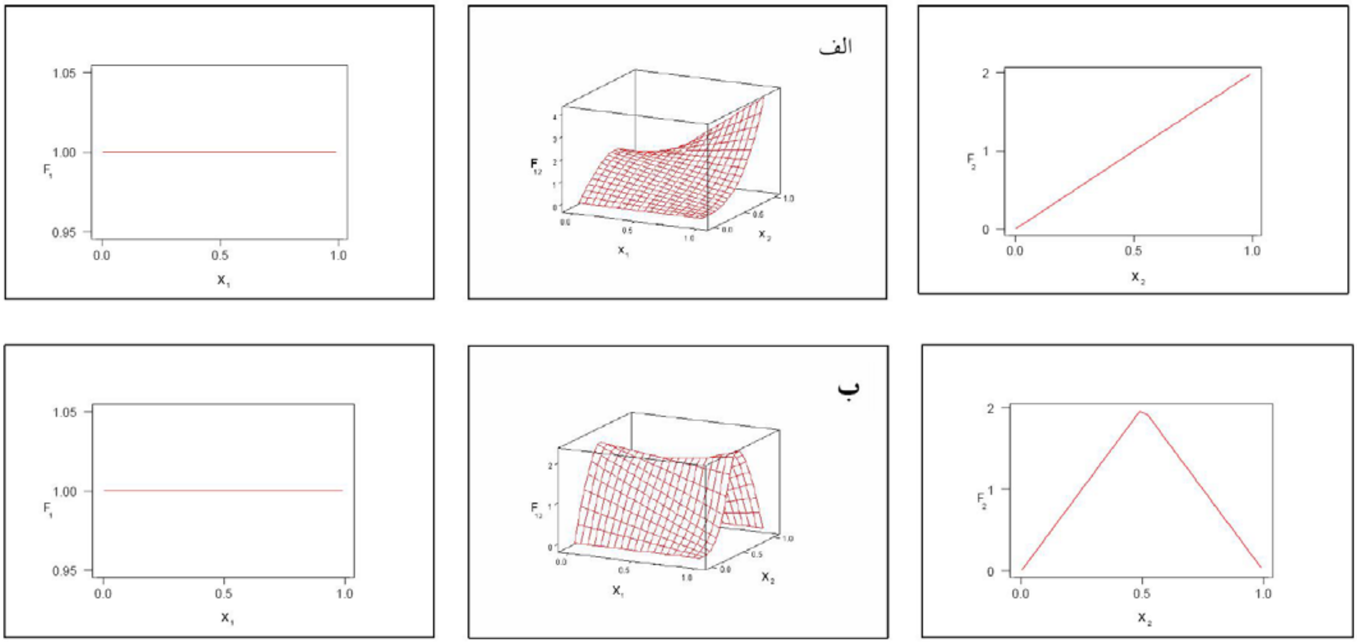
روشن است که با استفاده از یک تبدیل خطی[23] $(y = (b-a)\,x + a; b - a > 0)$ می‌توان یک توزیع TSP با دامنه $[0, 1]$ را تبدیل به یک توزیع TSP با دامنه $[a, b]$ کرد. پارامترهای این توزیع جدید، شامل $n$، کران پایین مانند $a$، کران بالا مانند $b$ و نمای توزیع $m = (b-a)\,\theta + a$ می‌باشد.

ضریب همبستگی گشتاور ضربی (پیرسن) که نیز یک اندازه وابستگی خطی است. این اندازه تحت تبدیل‌های ناکاهشی، ناوردا است. بنابراین ساختار ضریب همبستگی در توزیع FGM با توزیع‌های حاشیه‌ای TSP، تحت تبدیل خطی ذکر شده، تغییر پیدا نمی‌کند.

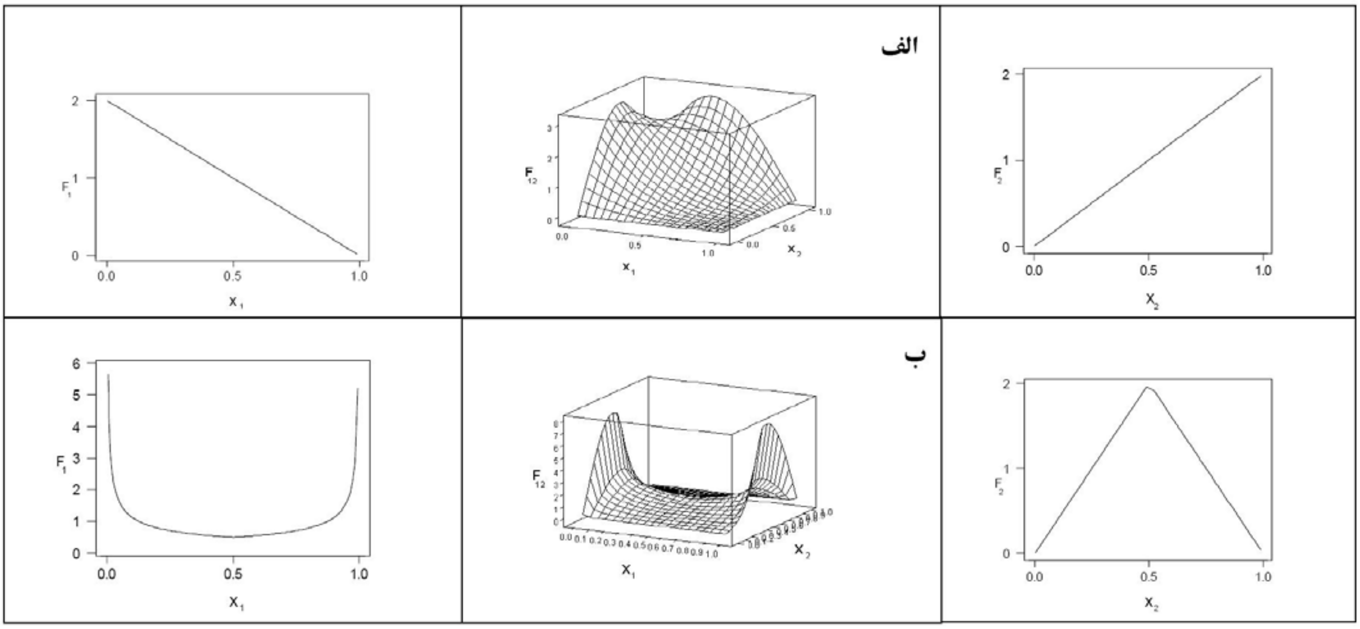
[23] linear transformation



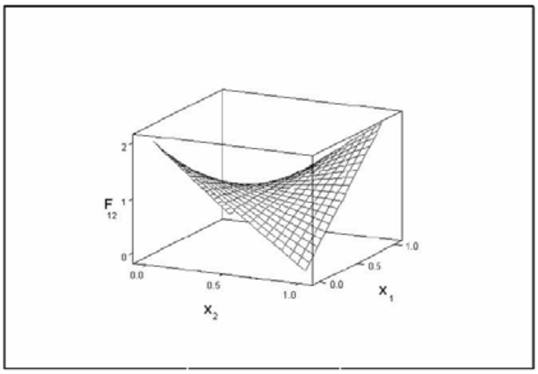

**شکل ۲.** توزیع FGM با توابع حاشیه‌ای یکسان $TSP(\theta_i, n_i)$ و $\alpha = ۱$ ;
الف) $\theta_i = \frac{۱}{۲}, n_i = ۲$ ; ب) $\theta_i = \frac{۱}{۲}, n_i = ۳$



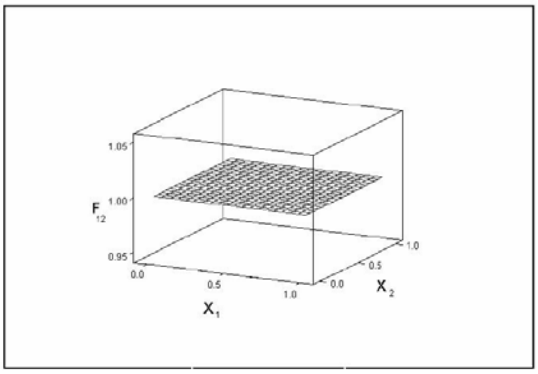

**شکل ۳.** توزیع FGM با توابع حاشیه‌ای یکسان $TSP(\theta_i, n_i)$ و $\alpha = ۱$ ;
الف) $n_۱ = ۱, \theta_۲ = ۲, n_۲ = ۲$ ; ب) $n_۱ = ۱, \theta_۲ = \frac{۱}{۲}, n_۲ = ۲$



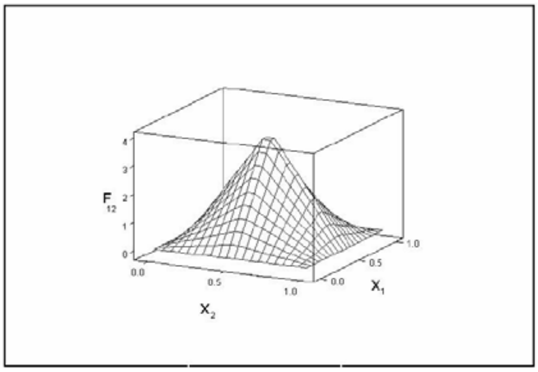

**شکل ۴.** توزیع FGM با توابع حاشیه‌ای یکسان $TSP(\theta_i, n_i)$ و $\alpha = 1$ ;
الف) $\theta_1 = 0, n_1 = 2, \theta_2 = 1, n_2 = 2$ ; ب) $\theta_1 = \frac{1}{2}, n_1 = \frac{1}{2}, \theta 12, n_2 = 2$



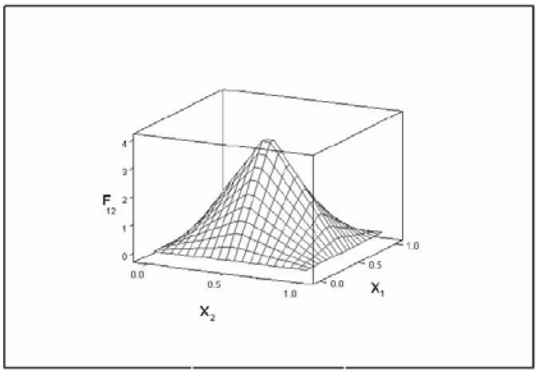
**شکل ۵.**



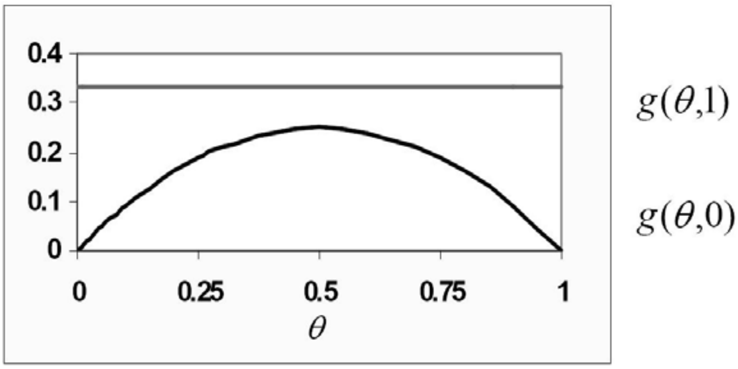
**شکل ٦.**



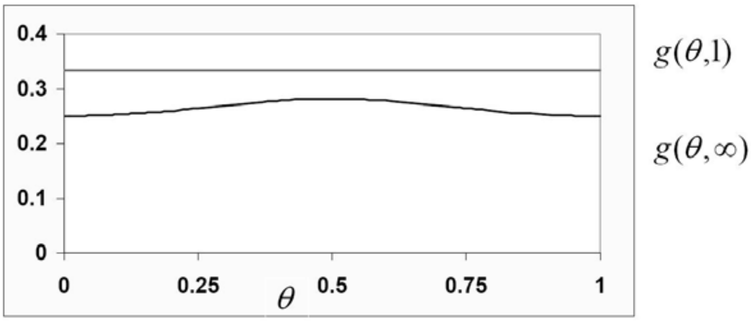
**شکل ۷.**



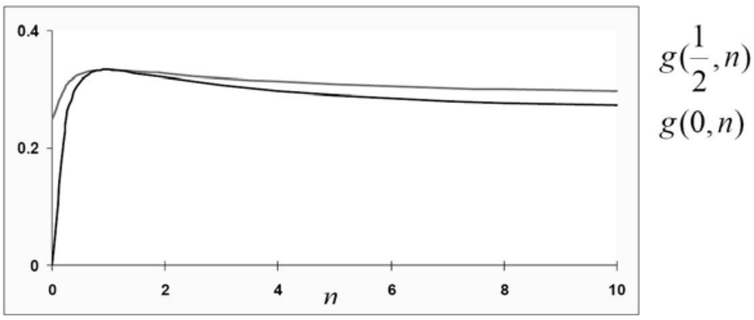
**شکل۸.**



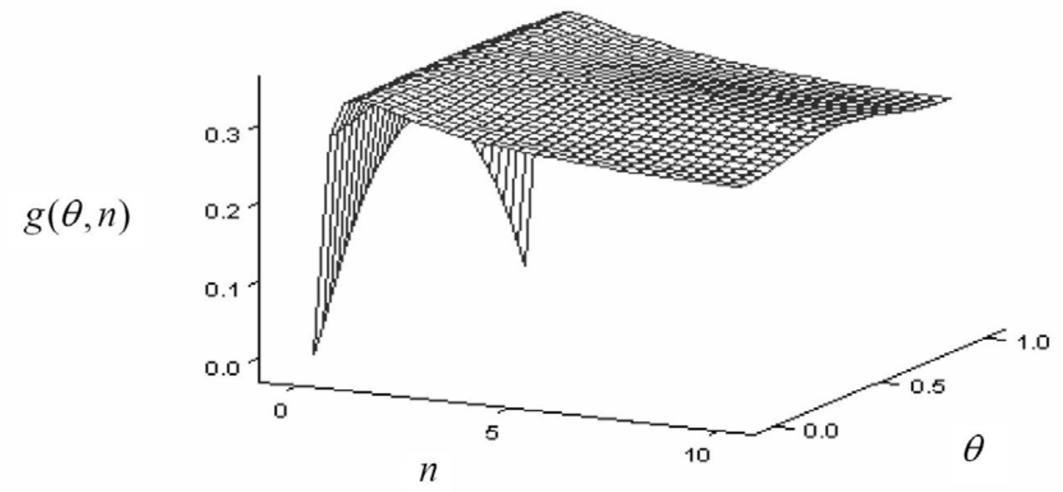

**شکل ۹.** مقادیر فرین $g(\theta,n)$ به عنوان تابعی از $\theta$ ($0 < n \le 1$)




**شکل ۱۰.** مقادیر فرین $g(\theta,n)$ به عنوان تابعی از $\theta$ ($n \ge 1$)




**شکل ۱۱.** مقادیر فرین $g(\theta,n)$ به عنوان تابعی از $n$ ($\theta \in [0,1]$)




**شکل ۱۲.** رفتار کلی $g(\theta,n)$ به عنوان تابعی از $n,\theta$

# مراجع

[1] Hoffding, W. (1940), Maszstabinvariante korrelationstheorie, *Univ. Berlin, Schr. Math. angew. Math.*, 5, 181-233.

[2] Huang, J.S. and Kotz, S. (1999), Modifications of the Farlie-Gumble-Morgenstern distributions. A tough hill to climb, *Metrika*, 49, 135-145.

[3] Johnson, N.L. and Kotz, S. (1975), On some generalized Farlie-Gumble-Morgenstern distributions, *Communications in Statistics*, 5, 415-427.

[4] Johnson, N.L. and Kotz, S. (1977), On some generalized Farlie-Gumble-Morgenstern distributions-II regression, correlation and further generalizations, *Communications in Statistics*, A6, 6, 487-496.

[5] Van Dorp, J.R. and Kotz, S. (2002), The standard two-sided power distribution and its properties: with applications in financial engineering, *The American Statistician*, 56, 90-99.

[6] Kotz, S. and Van Dorp, J.R. (2002). A versatile bivariate distribution on a bounded domain: another look at the product moment correlation, *Journal of Applied Statistics*, 29(8), 1165-1179.