برآورد اندازه طیفی بردارهای تصادفی پایدار

صفیه محمودی[۱] و فاطمه گلستانه[۲]

چکیده

مجموع متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع بعد از تغییر مکان و مقیاس مناسب دارای یک توزیع حدی تحت عنوان توزیع پایدار می‌شود. این خانواده توزیع، توزیع گوسی را نیز دربر می‌گیرد و در حالت غیرگوسی دارای واریانس نامتناهی و دم‌های کلفت می‌باشد. این ویژگی و هم‌چنین تنوع پارامترها این توزیع را برای مدل‌بندی آماری بسیاری از پدیده‌ها مناسب ساخته است. از نظر تئوری بررسی‌های زیادی در مورد برآورد پارامترهای پایدار یک‌متغیره صورت گرفته است، اما در مورد توزیع‌های پایدار چندمتغیره نیاز به بررسی‌های بیشتری وجود دارد. پارامترها در این حالت شامل شاخص پایداری، مکان و اندازه طیفی می‌باشد. در این مقاله برآوردگرهای این پارامترها را به‌طور مختصر معرفی و با شبیه‌سازی و استفاده از داده‌های واقعی به طور شهودی آن‌ها را مقایسه خواهیم کرد.

واژه‌های کلیدی: توزیع‌های چندمتغیره پایدار، اندازه طیفی، تابع مشخصه، تصویر، شبیه‌سازی.

رده‌بندی موضوعی (MSC2000): 60G52, 62M15

۱ مقدمه

توزیع‌های $\alpha-$ پایدار کلاس بسیار وسیعی از توزیع‌ها را دربر می‌گیرند و به‌علت جرم موجود در دم تابع چگالی، این گروه از توزیع‌ها، به توزیع‌های دم‌سنگین معروف‌اند. جرم احتمال موجود در دم‌های بالایی و پایینی توزیع به عدد α، مقداری بین صفر و دو، وابسته است به‌طوری‌که هرچقدر α کمتر باشد جرم احتمال در دم‌ها بیشتر است.

داده‌هایی با دم‌های سنگین در زمینه‌های مختلف اقتصادی، ارتباطات، فیزیک و غیره موجوداند که استفاده از توزیع‌های پایدار غیرگوسی به‌عنوان مدل‌های ممکن برای آن‌ها پیشنهاد می‌شود. چنین مدل‌هایی انعطاف‌پذیری و تغییرپذیری بیشتری نسبت به توزیع‌های گوسی دارند. توزیع‌های گوسی به‌طور کامل به‌وسیله میانگین و کوواریانس‌شان مشخص می‌شوند اما توزیع‌های پایدار غیرگوسی به پارامترهای بیشتری برای تشخیص نیاز دارند. هم‌چنین توزیع‌های گوسی همواره نسبت به میانگین خود متقارن هستند، اما توزیع‌های غیرگوسی پایدار می‌توانند درجه‌ای دلخواه از چولگی را اختیار کنند.

چگالی احتمال متغیرهای تصادفی $\alpha-$ پایدار موجود و پیوسته است، اما به‌جز در چند مورد بقیه فرم مشخص بسته‌ای ندارند. تنها فرم بسته‌ی موجود در مورد این توزیع‌ها فرم تابع مشخصه‌ی آن‌ها است که البته توسط آماردانان مختلف به شیوه‌های متفاوتی پارامتربندی شده است. به‌عنوان مثال فرمی که اغلب استفاده می‌شود [۱۰] در حالت یک‌متغیره به‌صورت

$$\phi_\alpha(t)=\begin{cases}\exp\{-\sigma^\alpha|t|^\alpha(1-i\beta sign(t)\tan\frac{\pi\alpha}{2})+i\mu t\} & \alpha\neq 1,\\ \exp\{-\sigma|t|(1+i\beta\frac{2}{\pi}sign(t)|t|)+i\mu t\} & \alpha=1,\end{cases} \quad (1)$$

که $\alpha\in(0,2]$، $\sigma\in[0,\infty)$، $\beta\in[-1,1]$ و $\mu\in(-\infty,\infty)$

[۱] دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی اصفهان *mahmoodi@cc.iut.ac.ir*

[۲] دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی اصفهان *golestaneh@math.iut.ac.ir*

می‌باشد، و در حالت چندمتغیره به فرم زیر می‌باشد

$$\phi_\alpha(t) = \begin{cases} \exp\{-\int_{S^d} |\langle t,s\rangle|^\alpha (1 - i sign(\langle t,s\rangle) \\ \quad \tan\frac{\pi\alpha}{2})\Gamma(ds) + i\langle t,\vec{\mu}\rangle\} & \alpha \neq 1, \\ \\ \exp\{-\int_{S^d} |\langle t,s\rangle| (1 + i\frac{2}{\pi} sign(\langle t,s\rangle) \\ \quad \ln|\langle t,s\rangle|)\Gamma(ds) + i\langle t,\vec{\mu}\rangle\} & \alpha = 1, \end{cases} \qquad (۲)$$

که $S^d = \{\mathrm{s} : ||\mathrm{s}|| = 1\}$ کره واحد در $\mathbb{R}^d$، Γ یک اندازه مثبت معروف به اندازه طیفی بردار تصادفی $\mathbf{X}$، $\vec{\mu}$ یک بردار ثابت در $\mathrm{r}\mathbb{R}^d$ و $\langle \mathbf{t}, \mathbf{s}\rangle$ ضرب داخلی در فضای اقلیدسی می‌باشد. پارامترهای این مدل $\vec{\mu}$ ، α و Γ می‌باشند که $(\Gamma, \vec{\mu})$ به‌جز در حالت $\alpha = 2$ یکتا می‌باشند.

در حالت چندمتغیره گرچه تحقیقاتی انجام شده است اما به نظر می‌رسد به بررسی بیشتری نیاز است. در این زمینه کارهایی مانند روش برآورد و تحلیل چندمتغیره پایدار توسط پرس [۸]، روش شبیه‌سازی نمونه‌هایی از یک توزیع پایدار چندمتغیره توسط مدرس و نولان [۴]، برآورد پارامترهای بردارهای در دامنه جذب توزیع‌های پایدار توسط راچو و زین [۹] در حالت دومتغیره و در حالت چندمتغیره توسط چنگ و راچو [۲]، روش تقریب و محاسبات عددی چگالی‌های پایدار چندمتغیره توسط بایزکووسکی و همکاران [۱] و نولان و راجپوت [۷] و روش برآورد اندازه طیفی پایدار مبتنی بر تابع مشخصه تجربی و هم‌چنین تصویر یک‌بعدی داده‌ها توسط نولان و همکاران [۶] و مک‌کلاچ [۳] صورت گرفته است.

این مقاله در ادامه به‌صورت زیر تدوین شده است. در بخش دوم برآوردگرهای مختلف را معرفی می‌کنیم. در بخش سوم با شبیه‌سازی و استفاده از داده‌های واقعی برآوردگرها را مقایسه می‌کنیم. برای مقایسه اندازه طیفی گسسته و پیوسته را در نظر می‌گیریم. در بخش چهارم نتایج به‌دست آمده را ارایه خواهیم داد.

۲ معرفی برآوردگرهای پارامترهای بردارهای تصادفی پایدار

۱.۲ برآوردگر پرس

پرس خانواده‌ی خاصی از توزیع‌های پایدار متقارن را معرفی کرد و برآوردگرهایی را برای برآورد پارامترهای آن ارایه داد. تابع مشخصه این خانواده در رابطه زیر صدق می‌کند

$$\ln \phi_X(t) = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} \langle t, \Omega_j t\rangle^{\frac{\alpha}{2}} + i\langle t, \vec{\mu}\rangle. \qquad (۳)$$

این خانواده را از مرتبه m گوییم که Ω_j ماتریس نیمه معین مثبت $p \times p$، $\alpha \in (0, 2]$ و $\vec{\mu}$ یک بردار $p \times 1$ می‌باشد. اگر $\alpha = 2$، آن‌گاه تابع مشخصه نرمال $p-$ متغیره با پارامترهای $\Sigma = \sum_{j=1}^{m}\Omega_j$ و $\vec{\mu}$ به‌دست می‌آید. اگر $\sum_{j=1}^{m}\Omega_j > 0$ معین مثبت باشد، آن‌گاه (۳) لگاریتم تابع مشخصه یک توزیع چندمتغیره پایدار متقارن نامنفرد با شاخص پایداری α خواهد بود، به این مفهوم که چگالی در فضای $p-$ بعدی قرار می‌گیرد. فرم (۳) از مرتبه یک را در نظر بگیرید. برای به‌دست آوردن برآوردگر α، ابتدا تابع مشخصه تجربی را به‌دست می‌آوریم

$$\hat{\phi}_X(t) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \exp(i\langle t, x_j\rangle). \qquad (۴)$$

سپس دو بردار مجزا برای $\mathbf{t}$ به‌صورت $\mathbf{t}_j \equiv s_j\mathbf{e}$ انتخاب می‌کنیم، که $\mathbf{e}$ بردار یکه $p-$ بعدی $'(0, ..., 0, 1)$ و s_jها $(j = 1, 2)$ اسکالر می‌باشند. چون

$$\ln|\phi_X(t)| = -\frac{1}{2}\langle t, \Omega t\rangle^{\frac{\alpha}{2}}, \qquad (۵)$$

برای $\mathbf{t}_1$، $\mathbf{t}_2$ و $\Omega \equiv [w_{ij}]_{i,j=1}^{p}$ داریم $|s_j|^\alpha (w_{11})^{\alpha/2} = -2\ln|\phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}_j)|$ $(j = 1, 2)$. پس با به‌دست آوردن نسبت دو معادله و جایگذاری $\hat{\phi}_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}_j)$ برآوردگر گشتاوری α به‌دست می‌آید.

برای برآورد ماتریس متقارن $\Omega \equiv [w_{ij}]$، ابتدا توجه کنید که از رابطه (۵) و فرم مربعی $\langle \mathbf{t}, \Omega \mathbf{t} \rangle$ داریم

$$[-2 \ln |\phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})|]^{\frac{2}{\alpha}} = \langle \mathbf{t}, \Omega \mathbf{t} \rangle = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} t_i t_j w_{ij}.$$

از طرفی $p(p+1)/2$، w_{ij}ی مجزا داریم. پس به $M = p(p+1)/2$ بردار مجزای غیرصفر و مستقل خطی $\mathbf{t}$ نیاز داریم که آن‌ها را با $\mathbf{h}_1, ..., \mathbf{h}_M$ نمایش می‌دهیم. به این‌ترتیب رابطه زیر یک دستگاه از M معادله و M مجهول به وجود می‌آورد که می‌توان Ω را به‌طور یکتا برآورد کرد

$$[-2 \ln |\hat{\phi}_X(h_k)|]^{\frac{2}{\alpha}} = \langle h_k, \hat{\Omega} h_k \rangle, \quad k = 1, ..., M. \qquad (6)$$

برای برآورد پارامتر مکان رابطه (۴) $\hat{\phi}_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})$ را به‌صورت $(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \cos\langle \mathbf{t}, \mathbf{x}_j \rangle) + i(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \sin\langle \mathbf{t}, \mathbf{x}_j \rangle)$ می‌نویسیم. این رابطه در مختصات قطبی دارای فرم $\hat{\phi}_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) \equiv \rho(\mathbf{t}) \exp[i\theta(\mathbf{t})]$، به‌طوری‌که

$$\rho^2(t) = (\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \cos\langle t, x_j \rangle)^2 + (\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \sin\langle t, x_j \rangle)^2,$$

$$\tan\ \theta(t) = \frac{\sum_{j=1}^{n} \sin\langle t, x_j \rangle}{\sum_{j=1}^{n} \cos\langle t, x_j \rangle}.$$

پس با توجه به این که $u(\mathbf{t}) \equiv \langle \vec{\mu}, \mathbf{t} \rangle$ در قسمت موهومی است داریم $\hat{u}(\mathbf{t}) = \theta(\mathbf{t})$. هم‌چنین اگر $\mathbf{h}_1^*, ..., \mathbf{h}_p^*$ مقادیر مجزا و مستقل از بردار $\mathbf{t}$ باشند برای $j = 1, ..., p$ داریم $\langle \hat{\vec{\mu}}, \mathbf{h}_j^* \rangle = \hat{u}(\mathbf{h}_j^*)$. بنابراین اگر $\mathbf{H} = (\mathbf{h}_1^*, ..., \mathbf{h}_p^*)'$ یک ماتریس $p \times p$ از مقادیر مجزا و مستقل خطی بردار $\mathbf{t}$ و $\hat{u}(\mathbf{h}_j^*)$ مولفه jام بردار U باشد، برآورد $\vec{\mu}$ را می‌توان توسط $|\mathbf{H}| \neq 0$, $\hat{\vec{\mu}} = \mathbf{H}^{-1}U$ به‌دست آورد.

۲.۲ برآوردگر RXC

برآوردگرهای پارامترها در این روش بر اساس دم توزیع، و برای بردارهایی که در دامنه جذب یک توزیع پایدار هستند ارایه شده است.

گوییم $\mathbf{Z}$ در دامنه جذب $\mathbf{X}$ است، اگر مقادیر $a_n > 0$ و $\mathbf{b}_n \in R^d$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که برای $\mathbf{Z}_i$ های مستقل و هم‌توزیع با $\mathbf{Z}$ داشته باشیم

$$\frac{1}{a_n}\sum_{i=1}^{n} Z_i - b_n \xrightarrow{d} X.$$

اگر $\rho = |\mathbf{Z}|$ و $\Theta = \theta(\mathbf{Z})$ مختصات کروی نظیر $\mathbf{Z}$ به ازای هر r حقیقی باشند می‌توان نشان داد

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(\rho > rx, \Theta_1 < \theta_1, ..., \Theta_{d-1} < \theta_{d-1})}{P(\rho > rx, \Theta_1 < \tilde{\theta}_1, ..., \Theta_{d-1} < \tilde{\theta}_{d-1})} = r^{-\alpha}\frac{\Phi(\theta_1, ..., \theta_{d-1})}{\Phi(\tilde{\theta}_1, ..., \tilde{\theta}_{d-1})}, \qquad (7)$$

که برای $\alpha \in (0, 2)$ معادل است با

$$\lim_{n\to\infty} nP(\rho > ra_n, \Theta \leq \vec{\theta}) = r^{-\alpha}\Phi(\vec{\theta}). \qquad (8)$$

(Φ تابع توزیع نظیر Γ در مختصات قطبی می‌باشد.) چنگ و راچو با استفاده از روابط (۷) و (۸) و با در نظر گرفتن $r = 1$ برآوردگرهایی را برای α و Γ معرفی، و خواص مجانبی آن‌ها را بررسی کردند.

فرض کنید $k = k_n$ دنباله‌ای از اعداد صحیح با $1 \leq k \leq n/2$ و $n \in N$ باشد، و $k \to \infty$ و $k/n \to 0$ وقتی $n \to \infty$. فرض کنید (ρ_i, Θ_i) مختصات قطبی نظیر $\mathbf{Z}_i$ باشد. برآوردگر ارایه شده برای شاخص پایداری

$$\alpha_n = \alpha_{n,k} = \frac{\ln 2}{\ln \rho_{n-k+1:\ n} - \ln \rho_{n-2k+1:\ n}}\ ,$$

که $\rho_{k:\ n}$، k امین آماره ترتیبی از بردار $(\rho_1, ..., \rho_n)$ می‌باشد. هم‌چنین برآوردگر ارایه شده برای اندازه طیفی نرمال‌شده $\varphi(\vec{\theta}) = \Phi(\vec{\theta})/\Phi(\pi, ..., 2\pi)$ در حالت $r = 1$ به‌صورت زیر می‌باشد

$$\varphi_n^1(\vec{\theta}) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n} 1_{(\Theta_i \leq \vec{\theta}\ ,\ \rho_i \leq \rho_{n-k+1:n})}$$

$$\vec{\theta} = (\theta_1, ..., \theta_{d-1}),$$

که با در نظر گرفتن $\Phi(\pi,...,2\pi)=\frac{k}{n}(\rho_{n-k:\ n})^{\alpha_n}$ می‌توان $\Phi(\vec{\theta})$ را برآورد کرد.

توجه به این نکته لازم است که $\varphi(\vec{\theta})$ را به ازای r های مختلف می‌توان برآورد کرد، یعنی

$$\varphi_n^r(\vec{\theta})=\frac{r^\alpha}{k}\sum_{i=1}^{n} 1_{(\Theta_i\le\vec{\theta}\ ,\ \rho_i\le r\rho_{n-k+1:n})}\ ,\ \vec{\theta}=(\theta_1,...,\theta_{d-1}).$$

اما با شبیه‌سازی‌های صورت گرفته مشاهده می‌شود که این تغییر چندانی در نتایج برآورد ندارد.

۳.۲ برآورد بر اساس تابع مشخصه تجربی و تصویر داده‌ها

این برآوردگرها با فرض صفر بودن $\vec{\mu}$ و معلوم بودن α معرفی شده است. البته می‌توان برای برآورد کردن $\vec{\mu}$ و α، مقادیر هر مولفه از دنباله بردارهای $d-$ بعدی را در نظر گرفت و پارامترهای یک‌بعدی $\hat{\alpha}_j$، $\hat{\sigma}_j$، $\hat{\beta}_j$ و $\hat{\mu}_j$، $j=1,...,d$، را برآورد کرد، سپس $\hat{\vec{\mu}}=(\hat{\mu}_1,...,\hat{\mu}_d)$ و $\bar{\alpha}=(\sum_{j=1}^{d}\hat{\alpha}_j)/d$ را به‌ترتیب به‌عنوان برآورد شاخص پایداری و بردار مکان $\vec{\mu}$ در نظر گرفت.

تابع مشخصه معرفی شده برای توزیع‌های $\alpha-$ پایدار به فرم زیر را در نظر بگیرید

$$\phi_X(t)=E\exp\{i\langle X,t\rangle\}=\exp(-I_X(t)), \qquad (۹)$$

به‌طوری‌که

$$\begin{aligned} I_X(t) &= \int_{S_d}\psi_\alpha(\langle t,s\rangle)\Gamma(ds)-i\langle t,\vec{\mu}\rangle, \\ \psi_\alpha(u) &= \begin{cases} |u|^\alpha(1-i\,\mathrm{sgn}(u)\tan\frac{\pi\alpha}{2}) & \alpha\ne 1, \\ |u|\ \ (1+i\frac{2}{\pi}\mathrm{sgn}(u)\ln|u|) & \alpha=1. \end{cases} \end{aligned}$$

در این روش ابتدا $I_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})$ برآورد می‌شود. به دو روش می‌توان $I_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})$ را برآورد کرد، تابع مشخصه تجربی (ECF) و تصویر یک‌بعدی داده‌ها (PROJ). سپس اندازه طیفی بر اساس این برآوردها به‌دست می‌آید.

در روش تابع مشخصه تجربی معادل‌های تجربی ϕ و I، یعنی $\hat{I}_k(\mathbf{t})=-\ln\hat{\phi}_k(\mathbf{t})$ و $\hat{\phi}_k(\mathbf{t})=(1/k)\sum_{i=1}^{k}\exp(i\langle\mathbf{t},\mathbf{X}_i\rangle)$ را به‌دست می‌آوریم. سپس برای شبکه مقادیر $\mathbf{t}_1,...,\mathbf{t}_n\in S_d$، $\vec{I}_{\mathrm{ECF},k}=[\hat{I}_k(\mathbf{t}_1),...,\hat{I}_k(\mathbf{t}_n)]'$ را به‌عنوان برآورد تابع مشخصه تجربی $I_{\mathbf{X}}(.)$ در نظر می‌گیریم (توجه کنید که $\alpha_{\mathrm{ECF}}=\bar{\alpha}$).

در روش تصویر بردار تصادفی $\mathbf{X}$ و بردار $\mathbf{t}\in S_d$ را در نظر می‌گیریم. متغیر تصادفی یک‌بعدی $\langle\mathbf{t},\mathbf{X}\rangle$، $\alpha-$ پایدار با پارامترهای زیر است

$$\begin{aligned} \sigma^\alpha(t) &= \Re I_X(t)=\int_{S_d}|\langle t,s\rangle|^\alpha\Gamma(ds), \\ \beta(t) &= \sigma^{-\alpha}(t)\int_{S_d}\mathrm{sgn}(\langle t,s\rangle)\,|\langle t,s\rangle|^\alpha\Gamma(ds) \\ &= \begin{cases} -\Im I_X(t)/(\sigma^\alpha(t)\tan(\frac{\pi\alpha}{2})) & \alpha\ne 1, \\ \frac{\Im\ [I_X(2t)-2I_X(t)]}{\frac{4}{\pi}\sigma(t)\ln 2} & \alpha=1, \end{cases} \\ \mu(t) &= \begin{cases} 0 & \alpha\ne 1, \\ \frac{-2}{\pi}\int\langle t,s\rangle\ln|\langle t,s\rangle|\Gamma(ds)=\frac{-\Im I_X(t)}{\sigma(t)} & \alpha=1. \end{cases} \end{aligned} \qquad (۱۰)$$

ازاین‌رو برای نمونه $\mathbf{X}_1,...,\mathbf{X}_n$ و هر $\mathbf{t}_j$ متعلق به شبکه مقادیر $\mathbf{t}_1,...,\mathbf{t}_n\in S_d$ مجموعه داده‌های یک‌بعدی $\langle\mathbf{t}_j,\mathbf{X}_1\rangle,...,\langle\mathbf{t}_j,\mathbf{X}_k\rangle$ را به‌دست می‌آوریم و در هر مورد با استفاده از یکی از روش‌های برآورد پارامترهای پایدار یک‌متغیره، پارامترهای مقیاس $\hat{\sigma}(\mathbf{t}_j)$ و چولگی $\hat{\beta}(\mathbf{t}_j)$ (و مکان $\hat{\mu}(\mathbf{t}_j)$ وقتی $\alpha=1$ است) را برآورد می‌کنیم. سپس مقادیر برآوردشده‌ی پارامترها را در رابطه

$$\hat{I}_k(t_j)=\begin{cases} \hat{\sigma}^\alpha(t_j)(1-i\hat{\beta}(t_j)\tan\frac{\pi\alpha}{2}) & \alpha\ne 1, \\ \hat{\sigma}(t_j)(1-i\hat{\mu}(t_j)) & \alpha=1. \end{cases} \qquad (۱۱)$$

جایگذاری می‌کنیم. برآورد تصویر $I_{\mathbf{X}}(.)$ توسط بردار $\vec{I}_{\mathrm{PROJ},k}=[\hat{I}_k(\mathbf{t}_1),...,\hat{I}_k(\mathbf{t}_n)]'$، به‌دست می‌آید. توجه کنید

که چون در جهات مختلف پارامترهای تصویر را برآورد می‌کنیم، در هر جهت یک برآورد برای $\hat{\alpha}(\mathbf{t}_j)$ به‌دست می‌آید که از میانگین آن‌ها می‌توان برای برآورد α در روش تصویر استفاده کرد.

حالتی را در نظر بگیرید که Γ دارای اندازه طیفی گسسته باشد، یعنی

$$\Gamma(.) = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \delta_{s_j}(.), \qquad (12)$$

به‌طوری‌که $\gamma_j \geq 0$ و $\mathbf{s}_j \in S_d$ به ترتیب وزن‌ها و نقاط دارای جرم باشند. در این حالت $I_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \sum_{j=1}^{n} \psi_\alpha(\langle \mathbf{t}, \mathbf{s}_j\rangle)\gamma_j$. بنابراین برای شبکه مقادیر $\mathbf{t}_1, ..., \mathbf{t}_n$ در R^d با تعریف ماتریس Ψ به‌صورت زیر

$$\begin{aligned} \Psi &= \Psi(t_1, ..., t_n; s_1, ..., s_n) \\ &= \begin{bmatrix} \psi_\alpha(\langle t_1, s_1\rangle) & \dots & \psi_\alpha(\langle t_1, s_n\rangle) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_\alpha(\langle t_n, s_1\rangle) & \dots & \psi_\alpha(\langle t_n, s_n\rangle) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

برای $\vec{\gamma} = [\gamma_1, ..., \gamma_n]'$ و $\vec{I} = [I_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}_1), ..., I_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}_n)]'$ داریم

$$\vec{I} = \Psi \vec{\gamma}. \qquad (13)$$

اگر $\mathbf{t}_1, ..., \mathbf{t}_n \in R^d$ طوری انتخاب شود که Ψ^{-1} موجود باشد، آن‌گاه با معکوس کردن این رابطه، یعنی $\vec{\gamma} = \Psi^{-1}\vec{I}$، می‌توان وزن‌ها را برآورد کرد.

برای یک اندازه طیفی در حالت کلی یعنی حالتی که لزوماً گسسته نیست یا مکان قرارگرفتن جرم‌ها معلوم نیست، از تقریب گسسته $\Gamma^* = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \delta_{\mathbf{s}_j}$ استفاده می‌کنیم. در این حالت کره S_d توسط A_jها با تعدادی مراکز $\mathbf{s}_j$ افراز می‌شود که هر یک از مولفه‌های بردار $\vec{\gamma} = [\gamma_1, ..., \gamma_n]'$ یک تقریب برای جرم تکه‌ای شامل $\mathbf{s}_j$، $j = 1, ..., n$، می‌باشد. سپس با استفاده از وزن‌های $\vec{\gamma}$ و مقادیر $\mathbf{s}_1, ..., \mathbf{s}_n$، $\hat{\Gamma}$ را از رابطه (۱۲) می‌توان به‌دست آورد. لازم به ذکر است که برای به‌دست آوردن اطلاعات خوب برای اندازه طیفی باید شبکه مقادیر بزرگ‌تری را در نظر بگیریم، و در نتیجه پارامترهای بیش‌تری را برآورد کنیم.

توجه کنید که $\vec{\gamma}$ معمولاً شامل اعداد مختلط می‌باشد، چون ماتریس Ψ مختلط است و بردارهای $\vec{I}_{\mathrm{ECF}}$ و $\vec{I}_{\mathrm{PROJ}}$ مقداری اختلال در آن‌ها ایجاد خواهند کرد. هم‌چنین اگر تعداد نقاط شبکه مقادیر $\mathbf{t}_1, ..., \mathbf{t}_n$ زوج باشد و به‌طور یکنواخت روی S_d پراکنده شده باشند، آن‌گاه برای بعضی مقادیر j و m، $\mathbf{t}_j = -\mathbf{t}_m$، و در نتیجه $\psi(-u) = \overline{\psi(u)}$ و $I_{\mathbf{X}}(-\mathbf{t}) = \overline{I_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})}$، پس دستگاه خطی منفرد خواهد شد. این مشکل بزرگی است چون معمولاً می‌خواهیم n مضربی از 2^d باشد. به‌طور مثال، در مورد $d = 2$ می‌خواهیم جرم اطراف هر نقطه $(1, 0)$، $(0, 1)$، $(-1, 0)$ و $(0, -1)$ را برآورد کنیم که متناظر با مولفه‌های مستقل می‌باشند.

برای بیان مساله بدون اعداد مختلط می‌توان از خواص ψ و $I_{\mathbf{X}}$ و یک شبکه متقارن از مقادیر موردنظر استفاده کرد. این به راحتی مشکل قسمت موهومی وزن‌های γ_j را حل می‌کند. روش را در مورد R^2 شرح می‌دهیم. فرض کنید $n = 2m$ و شبکه مقادیر به‌صورت $\mathbf{t}_j = \mathbf{s}_j = (\cos(2\pi(j-1))/n, \sin(2\pi(j-1))/n)$ باشند. در این‌صورت مولفه‌های $\vec{I}$ به‌صورت $I_j = \bar{I}_{j+m}$ و درایه‌های Ψ به‌صورت $\psi_{i,j} = \overline{\psi}_{i+m,j}$ خواهند بود. پس برای هر j، $j = 1, ..., m$، داریم $\Re I_j = \sum_{k=1}^{n} \Re\psi_{j,k}\gamma_k$ و به‌طور مشابه $\Im I_j = \sum_{k=1}^{n} \Im\psi_{j,k}\gamma_k$. ازاین‌رو اگر بردار (حقیقی) $\vec{c} = (\Re I_1, ..., \Re I_m, \Im I_1, ..., \Im I_m)'$ و ماتریس (حقیقی) $A = [a_{i,j}]_{n\times n}$ را به‌صورت

$$a_{i,j} = \begin{cases} \Re\psi_{i,j} & i = 1, ..., m \\ \Im\psi_{i,j} & i = 1, ..., m \end{cases} \quad j = 1, ..., n$$

تعریف کنیم، داریم

$$\vec{c} = A\vec{\gamma}. \qquad (14)$$

ماتریس A نامنفرد و بنابراین معکوس‌پذیر است پس می‌توانیم توسط $A^{-1}\vec{c}_{\rm ECF}$ و $A^{-1}\vec{c}_{\rm PROJ}$ برآورد $\vec{\gamma}$ را به‌دست آوریم. توجه کنید که با معکوس کردن رابطه‌ی (۱۴) ممکن است مقادیر منفی برای بعضی وزن‌ها به‌دست آوریم که این نشان‌گر نامعتبر بودن برآورد اندازه طیفی است. مک‌کلاچ [۳] برای رفع این مشکل پیشنهاد کرد سیستم به‌صورت روش مربعی محدود شده با شرط $\vec{\gamma} \geq 0$ حل شود،

$$\min_{\vec{\gamma} \geq 0} \ \{||\vec{c}-A\vec{\gamma}||^2 = (\vec{c}-A\vec{\gamma})'(\vec{c}-A\vec{\gamma})\}.$$

مشکل دیگری که در مورد روش تابع مشخصه تجربی مشاهده می‌شود این است که، وقتی طول هریک از بردارهای داده‌ها خیلی بزرگ یا خیلی کوچک باشد به خاطر مشکل عددی با جملات $\exp(i\langle \mathbf{X},\mathbf{t}\rangle) = \cos\langle \mathbf{X},\mathbf{t}\rangle + i\sin\langle \mathbf{X},\mathbf{t}\rangle$ دارای اجرای ضعیفی می‌باشد. وقتی $|\mathbf{X}|$ خیلی بزرگ باشد جملات خیلی سریع نوسان می‌کنند و در مقابل وقتی $|\mathbf{X}|$ خیلی کوچک باشد تقریباً اصلاً نوسان نمی‌کنند و در نتیجه رفتار $I_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})$ تحت کنترل نمی‌باشد. پیشنهادی که در این زمینه وجود دارد این است که داده‌ها را با تقسیم به میانه‌ی مقادیر $|\mathbf{X}_1|,\dots,|\mathbf{X}_k|$ متعادل کنیم.

۴.۲ برآوردگر مک‌کلاچ در حالت دومتغیره

فرض کنید $\mathbf{X}=(X_1,X_2)'$ دارای توزیع دومتغیره پایدار با $\alpha \neq 1$ باشد. در این‌حالت می‌توان فرم تابع مشخصه

$$\ln(\phi_X(t)) = \int_{S_d} \psi_\alpha(\langle t,s\rangle)\Gamma(ds) + i\langle t,\vec{\mu}\rangle,$$

را به فرم ساده‌تر

$$\ln(\phi_X(t)) = \int_0^{2\pi} \psi_\alpha(\langle t,s_\theta\rangle)d\Phi(\theta) + i\langle t,\vec{\mu}\rangle,$$

نوشت که در آن $\mathbf{s}_\theta = (\cos\theta,\sin\theta)'$ نقطه‌ای روی دایره واحد در زاویه θ می‌باشد.

بردار تصادفی α− پایدار دومتغیره $\mathbf{X}$ را می‌توان از یک حرکت لوی α− پایدار $Z(\theta)$ که کاملاً چوله به راست ($\beta = 1$) و دارای نموهای مستقل و هم‌توزیع $dZ(\theta)$ با پارامتر مکان صفر و مقیاس $(d\theta)^{\frac{1}{\alpha}}$ هست ساخت، یعنی

$$X \stackrel{d}{=} \int_0^{2\pi} s_\theta \frac{(d\Phi(\theta))^{\frac{1}{\alpha}} dZ(\theta)}{(d\theta)^{\frac{1}{\alpha}}}, \qquad (15)$$

(با استفاده از تابع مشخصه $\mathbf{X}$ رابطه بالا به راحتی قابل اثبات است.) در این رابطه اگر $\Phi(\theta)$ مطلقاً پیوسته باشد، آن‌گاه عبارت داخل انتگرال $\mathbf{s}_\theta(\frac{d\Gamma(\theta)}{d\theta})^{\frac{1}{\alpha}}dZ(\theta)$ ولی در غیر این‌صورت اگر Φ به اندازه $\Delta\Phi$ در θ پرش داشته باشد، θ جرم $\mathbf{s}_\theta(\Delta\Phi)^{\frac{1}{\alpha}}Z_\theta$ را در انتگرال شرکت می‌دهد که $Z_\theta = (d\theta)^{\frac{-1}{\alpha}}dZ(\theta)$ دارای توزیع α− پایدار یک‌متغیره به‌صورت $Z_\theta \sim S_\alpha(1,1,0)$ و مستقل از $dZ(\theta')$ برای هر $\theta \neq \theta'$ می‌باشد.

فرض کنید $\mathbf{X}$ دارای توزیع پایدار دومتغیره با اندازه طیفی $\Phi(\theta)$، به فرم (۱۵) و احتمالاً پارامتر مکان غیرصفر $\vec{\mu} = (\mu_1,\mu_2)'$ باشد. برای هر $w \in [0,\pi)$ تصویر زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned} Y(w) &= \langle s_w, X\rangle \\ &= \int_0^{2\pi} \cos(\theta - w)\frac{d\Phi(\theta)^{\frac{1}{\alpha}}dZ(\theta)}{(d\theta)^{\frac{1}{\alpha}}} + \langle s_w,\vec{\mu}\rangle, \end{aligned} \qquad (16)$$

که $\mathbf{s}_w = (\cos w, \sin w)'$ نقطه‌ای در S_d خواهد بود. این تصویر دارای توزیع پایدار یک‌متغیره با پارامتر مقیاس زیر می‌باشد

$$c(w)^\alpha = \int_0^{2\pi} |\cos(\theta - w)|^\alpha d\Phi(\theta).$$

حال انتگرال در رابطه (۱۶) را می‌توان به‌صورت جمع دو انتگرال مجزا در فاصله $w - \pi/2$ تا $w + \pi/2$ نوشت. در این‌صورت $Y(w)$ به جمع پارامتر مکانش به اضافه‌ی دو متغیر تصادفی پایدار کاملاً چوله‌شده با مکان صفر تجزیه می‌شود.

یعنی به‌صورت $Y(w)=Y_1(w)+Y_2(w)+\langle \mathbf{s}_w,\vec{\mu}\rangle$ که $Y_1(w)$ دارای پارامتر مقیاس $C(w)$ و $\beta=1$، و $Y_2(w)$ دارای پارامتر مقیاس $C(w+\pi)$ و $\beta=-1$ است، به‌طوری‌که

$$C^{\alpha}(w)=\int_{w-\pi/2}^{w+\pi/2}\cos(\theta-w)^{\alpha}d\Phi(\theta),\quad w\in[0,2\pi). \tag{17}$$

با شکستن ناحیه انتگرال‌گیری به این دو ناحیه داریم

$$\begin{aligned} c^{\alpha}(w) &= C^{\alpha}(w)+C^{\alpha}(w+\pi),\\ \beta(w) &= \frac{C^{\alpha}(w)-C^{\alpha}(w)}{c^{\alpha}(w)} \end{aligned}$$

و در نتیجه

$$\begin{aligned} C(w) &= c(w)\left(\frac{1+\beta(w)}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}},\\ C(w+\pi) &= c(w)\left(\frac{1-\beta(w)}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}. \end{aligned} \tag{18}$$

فرض کنید $\mathbf{x}_i=(x_{1i},x_{2i})'$، $i=1,...,n$، یک مجموعه مشاهدات از بردار $\mathbf{X}$ باشد. مولفه‌های X_1 و X_2 از بردار $\mathbf{X}$، پایدار یک‌متغیره با α مشترک هستند که می‌توان پارامترهای آن‌ها، «μ_1، σ_1، β_1 و α» و «μ_2، σ_2، β_2 و α»، را با یکی از روش‌های برآورد پارامترهای یک متغیره، مثلاً روش درستنمایی ماکزیمم، برآورد کرد. برای برآورد اندازه طیفی، ابتدا مقادیر $\mathbf{x_i}$ را با تفاضل برآورد $\vec{\mu}$ از آن‌ها مرکزی می‌کنیم. سپس برای یک مقدار صحیح بزرگ m که تقسیم‌پذیر بر ۴ است و $j=0,1,...,m-1$ قرار می‌دهیم $\theta_j=w_j=2\pi j/m$. همانند رابطه (۱۶)، $y_i(w_j)$ را از $\mathbf{x}_i$ مرکزی شده برای هر j، $j=0,1,...,\frac{m}{2}-1$، به‌دست می‌آوریم و این مقادیر را برای برآورد $\beta(w_j)$ و $c(w_j)$، با در نظر گرفتن α برآوردشده و بردار صفر برای $\vec{\mu}$، به‌کار می‌بریم. آن‌گاه $C(w_j)$، $j=0,1,...,m-1$، را با استفاده از (۱۸) برآورد می‌کنیم که به‌ازای هر برآورد به‌دست آمده برای $\beta(w_j)$ و $c(w_j)$ دو مقدار $C(w_j)$ و $C(w_j+\pi)$ به‌دست می‌آید.

عبارت (۱۷) نشان می‌دهد که $C^{\alpha}(w)$ یک میانگین متحرک از $d\Phi(\theta)$ است. این میانگین متحرک می‌تواند توسط رابطه

$$\Delta_j=C^{\alpha}(w_j)\approx\sum_{j-\frac{m}{4}}^{j+\frac{m}{4}}|\cos(w_j-\theta_h)|^{\alpha}\gamma_h, \tag{19}$$

به‌طور عددی تقریب زده شود، به‌طوری‌که

$$\gamma_h=\Phi(\theta_h+\pi/m)-\Phi(\theta_h-\pi/m). \tag{20}$$

رابطه (۱۹) یک دستگاه از m معادله و m مجهول به فرم $\mathbf{\Delta}\approx\mathbf{A}\vec{\gamma}$ است که وقتی $\alpha<2$ و A نامنفرد باشد از رابطه $\vec{\gamma}\approx A^{-1}\mathbf{\Delta}$ قابل حل می‌باشد. چون $d\Phi$ روی دایره تعریف می‌شود، $\theta_h=\theta_{m+h}$ و $\gamma_h=\gamma_{m+h}$ می‌باشد که از این روابط زمانی که اندیس‌های h منفی یا بزرگ‌تر از m هستند می‌توان استفاده کرد. با $\vec{\gamma}$ برآوردشده از $\mathbf{\Delta}$ می‌توان $\Phi(\theta_j+\pi/m)$ را با جمع کردن γ_h از صفر تا j برآورد کرد. توجه کنید که در این روش نیز ممکن است مقادیری منفی برای γ_h به‌دست آید که با استفاده از روش مربعی محدودشده‌ی مطرح‌شده در قسمت قبل می‌توان این مشکل را حل کرد.

۳ شبیه‌سازی و مقایسه برآوردگرها

۱.۳ مقایسه از طریق اندازه طیفی گسسته

در این قسمت مثال‌هایی از توزیع پایدار دومتغیره ارایه شده است. در هر مورد ۱۰۰۰۰ داده شبیه‌سازی و پارامتر مکان $\vec{\mu}=(0,0)$ در نظر گرفته شده است.

مثال ۱ داده‌هایی با اندازه طیفی $\Gamma_1(.)=\sum_{j=1}^{3}(1/3)\delta_{\mathbf{s}_j}(.)$، $\mathbf{s}_j=(\cos\theta_j,\sin\theta_j)\in S_d$ برای $j=1,2,3$، در زوایای $\theta_1=\pi/3$، $\theta_2=\pi$ و $\theta_3=3\pi/2$ و با $\alpha=1.25$ شبیه‌سازی شدند.

مثال ۲ داده‌هایی برای حالت متقارن با $\Gamma_2(.) = \sum_{j=1}^{4} \gamma_j \delta_{\mathbf{s}_j}(.)$، برای $\mathbf{s}_j = (\cos\theta_j, \sin\theta_j) \in S_d$، $j = 1, ..., 4$، در زوایای $\theta_1 = \pi/4$، $\theta_2 = 3\pi/4$، $\theta_3 = 5\pi/4$ و $\theta_4 = 7\pi/4$ و با $\alpha = 1/5$ شبیه‌سازی شدند. جرم این زوایا به‌ترتیب ۰/۱۵، ۰/۳۵، ۰/۱۵ و ۰/۳۵ انتخاب شد.

مثال ۳ داده‌هایی مربوط به اندازه طیفی $\Gamma_3(.) = \sum_{j=1}^{4} \delta_{\mathbf{s}_j}(.)$ و $\alpha = 0/75$ شبیه‌سازی شدند که $\mathbf{s}_j = (\cos((j-1)\pi/2), \sin((j-1)\pi/2)) \in S_d$، $j = 1, ..., 4$، مطابق با مولفه‌های مستقل می‌باشند.

مثال ۴ داده‌هایی از $\alpha = 0/75$ و از اندازه‌ای هموارتر مطابق با $\Gamma_4(.) = \sum_{j=0}^{19} 0/2\delta_{\mathbf{s}_j}(.)$، $\mathbf{s}_j = (\cos(\frac{\pi j}{40}), \sin(\frac{\pi j}{40})) \in S_d$ برای $j = 0, ..., 19$ شبیه‌سازی شدند.

شکل ۱ برآورد اندازه طیفی تجمعی مربوط به اندازه طیفی Γ_i، $i = 1, 2, 3, 4$، را نشان می‌دهد. در روش تصویر (نولان) داده‌ها در ۲۰ جهت تصویر شده‌اند. جهت‌های تصویر توسط رابطه‌ی $\frac{2\pi i}{20}$، $i = 0, ..., 19$ به‌دست آمده‌اند. هم‌چنین برآوردهای تابع مشخصه تجربی از داده‌های تعدیل شده به‌وسیله‌ی میانه به‌دست آمده‌اند. در مورد برآوردگر RXC نیز از ۲۰۰۰ داده‌ی انتهایی استفاده شده است. مقادیر α برآورد شده در جدول ۱ قابل مشاهده است. توجه کنید که در روش تصویر یک‌بعدی داده‌ها، پس از تصویر داده‌ها در هر جهت، از روش چندک‌ها برای برآورد α و پارامترهای دیگر توزیع‌های یک‌بعدی استفاده شده است.

برآوردها بعد از تفاضل مقدار $\vec{\mu} = (\mu_1, \mu_2)'$ برآورد شده از داده‌ها به‌دست آمده‌اند. مشاهده می‌شود که $\vec{\mu}$ در قسمت (۴) که جرم فقط در ربع اول وجود دارد بسیار بد برآورد شده است. در مورد برآورد αها مشاهده می‌شود که برآوردگر RXC برآوردگری ضعیف برای α می‌باشد و دو برآوردگر دیگر برآوردهایی نزدیک به مقدار اصلی را ارایه می‌دهند.

با توجه به شکل ۱، برآوردگر تصویر (نولان) و تابع مشخصه تجربی تقریباً برآوردهای یکسانی را برای اندازه‌ی طیفی به‌دست می‌دهند. بهترین برآورد در قسمت (۳) به‌دست آمده است که مورد استقلال را داریم و بدترین آن در قسمت (۴) است که $\vec{\mu}$ آن نیز بسیار بد برآورد شده است. در رابطه با برآوردگر RXC مشاهده می‌شود که در تمامی موارد برآوردگر ضعیف اندازه طیفی می‌باشد.

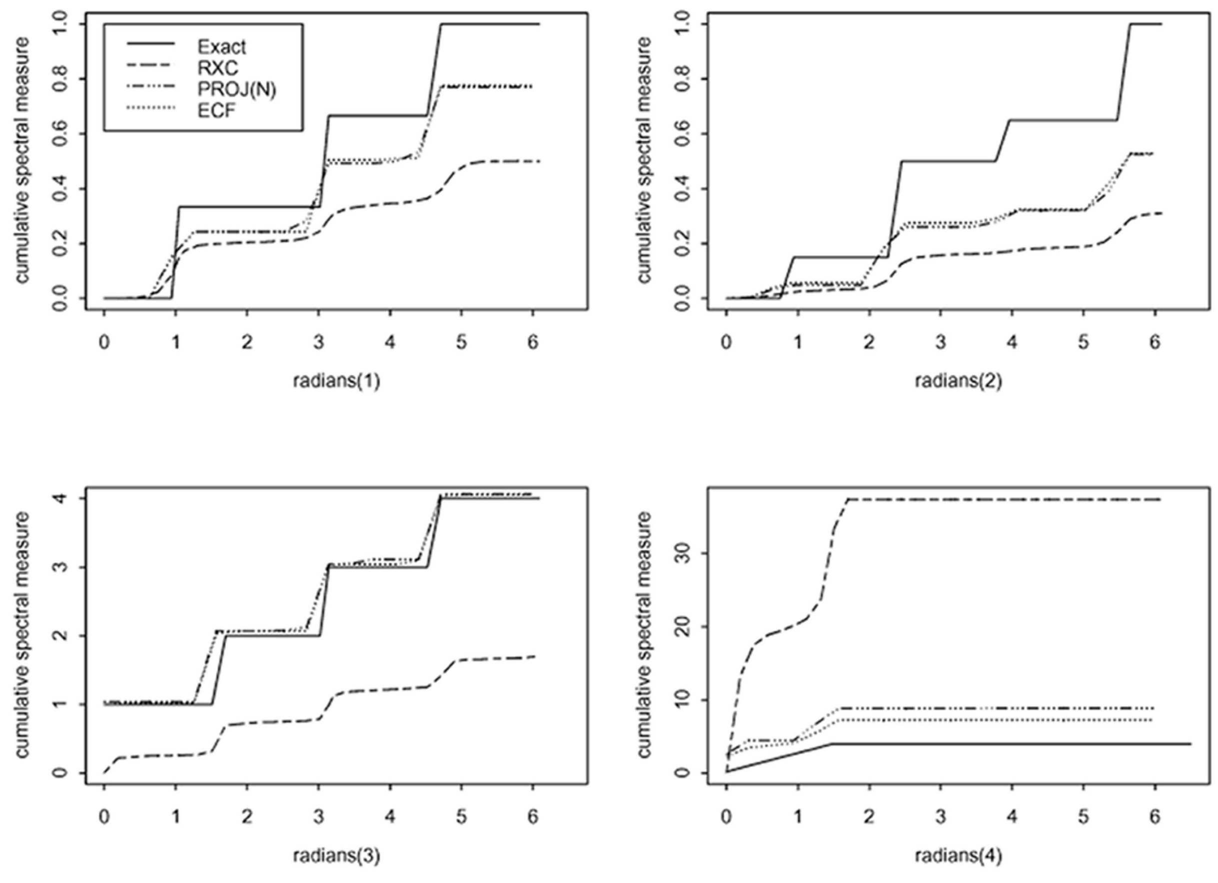
حال برآوردگر اندازه طیفی مطرح شده توسط مک‌کلاچ را در نظر بگیرید. برای برآورد به این روش، داده‌ها در ۳۲ جهت تصویر شدند. سپس داده‌های یک‌بعدی به‌دست آمده، با استفاده از روش درستنمایی ماکزیمم و چندک‌ها برآورد شدند. در جدول ۱، برآورد α ها، توسط روش درستنمایی ماکزیمم، تحت عنوان PROJ(M)، آمده است. برآورد αها در مورد روش چندک‌ها همان برآوردها در روش ECF هستند. شکل ۲ برآوردهای به‌دست آمده توسط این دو روش را نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود به جز در قسمت (۴) در بقیه‌ی موارد نتایج یکسانی به‌دست می‌دهند. نتایج این برآوردگر مشابه با روش تصویر و تابع مشخصه تجربی می‌باشد.

مثال ۵ (داده‌های واقعی) داده‌هایی از نرخ سهام شرکت نوکیا و موتورولا در یک دوره یک‌ساله از ۱۷ ژانویه ۲۰۰۸ تا ۱۴ ژانویه ۲۰۰۹ به‌دست آمدند ($n = 252$). داده‌ها به‌وسیله‌ی رابطه $y_t = \ln(x_{t+1}/x_t)$ تبدیل و به یک توزیع پایدار دومتغیره برازش داده شدند. پارامترها از روش‌های RXC، تصویر (نولان)، تابع مشخصه تجربی و تصویر (مک‌کلاچ) برآورد شدند. پارامتر $\vec{\mu}$، $(0, 0)$، و پارامتر α از روش‌های RXC، تصویر (نولان)، تابع مشخصه تجربی و

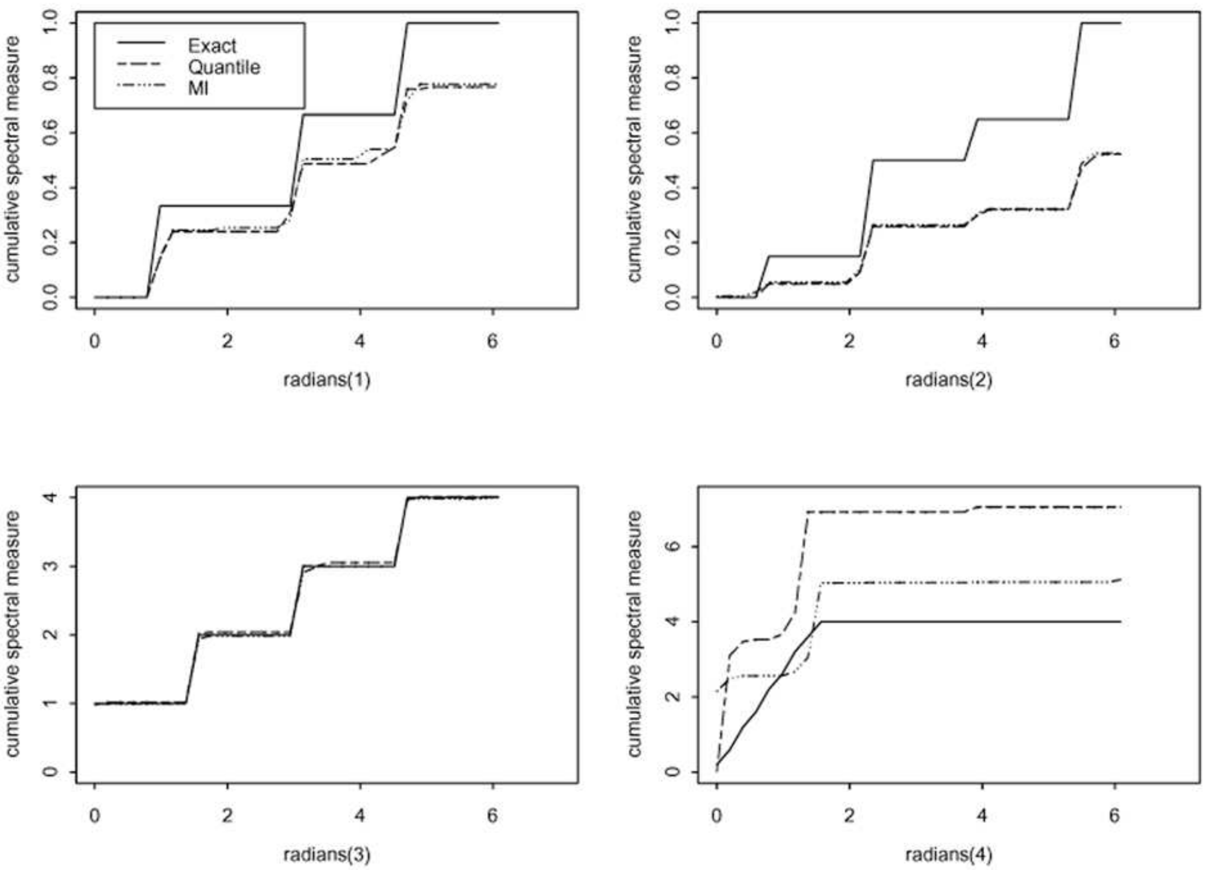
تصویر (مک‌کلاچ) به‌ترتیب ۱/۵۲۰، ۱/۵۲۱، ۱/۴۹۱ و نمودار αی به‌دست آمده از تصویر در جهت‌های مختلف را ۱/۵۲۱ برآورد شد. شکل ۳، اندازه طیفی برآورد شده و نشان می‌دهد.

جدول ۱. برآورد α به‌دست آمده توسط برآوردگرهای مختلف.

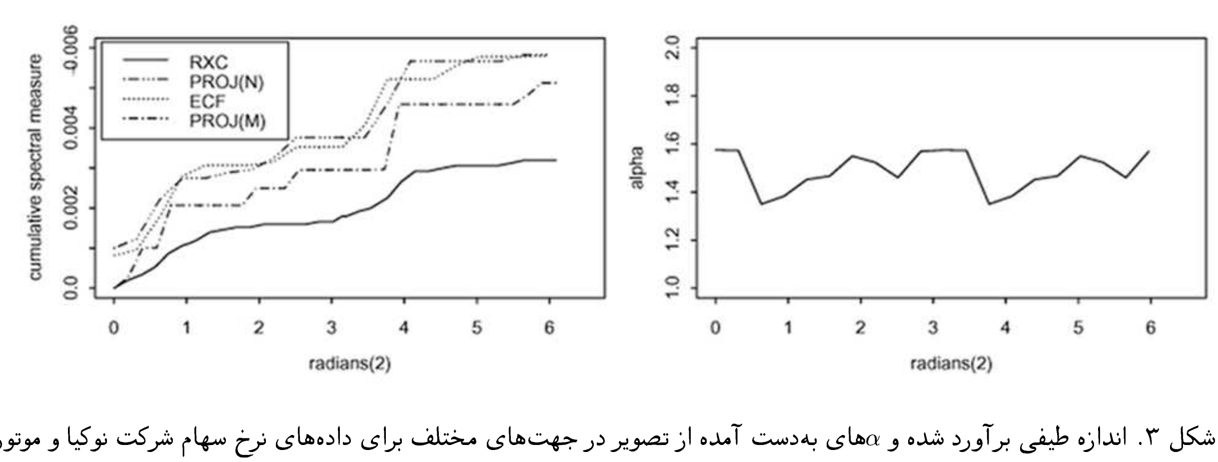
	(۱)	(۲)	(۳)	(۴)
مقادیر اصلی (Exact)	۱/۲۵	۱/۵	۰/۷۵	۰/۷۵
برآورد RXC	۱/۴۰۴	۱/۵۶۳	۰/۶۵۷	۱/۲۰۶
برآورد PROJ(N)	۱/۲۶۱	۱/۵۰۸	۰/۷۶۶	۰/۷۶۵
برآورد ECF	۱/۲۶۱	۱/۵۰۵	۰/۷۶۱	۰/۷۶۶
برآورد PROJ(M)	۱/۲۶۵	۱/۵۱۴	۰/۷۵۹	۰/۷۰۰
μ_1	−۰/۰۳۹	۰/۰۰۹	−۰/۰۵۰	−۱۳/۸۵۵
μ_2	−۰/۰۵۶	۰/۰۱۰	−۰/۲۶۱	−۱۲/۱۲۸
ضریب مقیاس استفاده شده	۰/۹۸۱	۰/۶۹۸	۷/۱۵۷	۳۶/۶۵۰



شکل ۱. اندازه طیفی تجمعی داده‌های شبیه‌سازی شده و برآوردهای برآوردگرهای مختلف.



شکل ۲. اندازه طیفی تجمعی داده‌های شبیه‌سازی شده و برآوردهای برآوردگر مک‌کلاچ با برآورد داده‌های یک‌بعدی توسط روش درستنمایی ماکزیمم و روش چندک‌ها.



شکل ۳. اندازه طیفی برآورد شده و αهای به‌دست آمده از تصویر در جهت‌های مختلف برای داده‌های نرخ سهام شرکت نوکیا و موتورولا.

۲.۳ مقایسه از طریق محاسبه ضریب تصویر کانتر

اگر چگالی طیفی متقارن باشد ($\beta(.) \equiv ۰$)، رگرسیون $X_۲$ روی $X_۱$ خطی می‌شود. یعنی $E(X_۲|X_۱) = k_{۲,۱}X_۱$ به‌طوری‌که

$$k_{۲,۱} = \frac{[X_۲, X_۱]_\alpha}{c^\alpha(X_۱)} = \frac{۱}{c^\alpha(X_۱)}\int_۰^{۲\pi} \sin\theta(\cos\theta)^{<\alpha-۱>}d\Phi(\theta), \qquad (۲۱)$$

و $c^\alpha(X_۱) = \int_۰^{۲\pi} |\cos\theta|^\alpha d\Phi(\theta)$ که $k_{۲,۱}$ را ضریب تصویر کانتر گوییم. اما اگر متقارن نباشد، $E(X_۲|X_۱)$ تابع غیرخطی از $X_۱$، که هنوز شامل $k_{۲,۱}$ و توابع دیگری از $d\Phi$ است می‌شود [۱۰]. توانایی روش‌های برآورد پارامترهای توزیع پایدار چندمتغیره برای درست برآورد کردن چنین ضریب تصویری می‌تواند یک معیار مهم برای ارزیابی شایستگی آن‌ها باشد.

مثال ۲ و ۳ را در نظر بگیرید. جدول ۲، $\hat{c}(X_۱)$ و $\hat{k}_{۲,۱}$ به‌دست آمده توسط پارامترهای برآورد شده با روش‌های مختلف را نشان می‌دهد. توجه‌کنید که در حالتی که $\alpha < ۱$، $k_{۲,۱}$ در زاویه صفر تعریف نمی‌شود، بنابراین نمی‌توان $k_{۲,۱}$ را محاسبه کرد.

همان‌طور که مشاهده می‌شود به جز در مورد آخر که برآورد مناسبی از اندازه طیفی وجود دارد، در بقیه موارد فاصله زیادی با مقادیر اصلی $c(X_۱)$ و $k_{۲,۱}$ موجود است. به‌ویژه در مورد برآوردهای برآوردگر RXC بیشترین فاصله وجود دارد.

جدول ۲. مقادیر $\hat{c}(X_۱)$ و $\hat{k}_{۲,۱}$ به‌دست آمده توسط پارامترهای برآورد شده با روش‌های مختلف.

	مثال ۲		مثال ۳
	$\hat{c}(X_۱)$	$\hat{k}_{۲,۱}$	$\hat{c}(X_۱)$
(Exact)	۰/۷۰۷	−۰/۴۰۰	۲/۰۰۰
RXC	۰/۳۴۷	−۰/۱۷۲	۱/۰۰۷
PROJ(N)	۰/۴۵۹	−۰/۲۹۸	۲/۰۷۵
ECF	۰/۴۵۹	−۰/۳۰۳	۲/۰۳۶
PROJ(M)	۰/۴۵۹	−۰/۲۹۱	۲/۰۴۷

۳.۳ مقایسه از طریق اندازه طیفی پیوسته

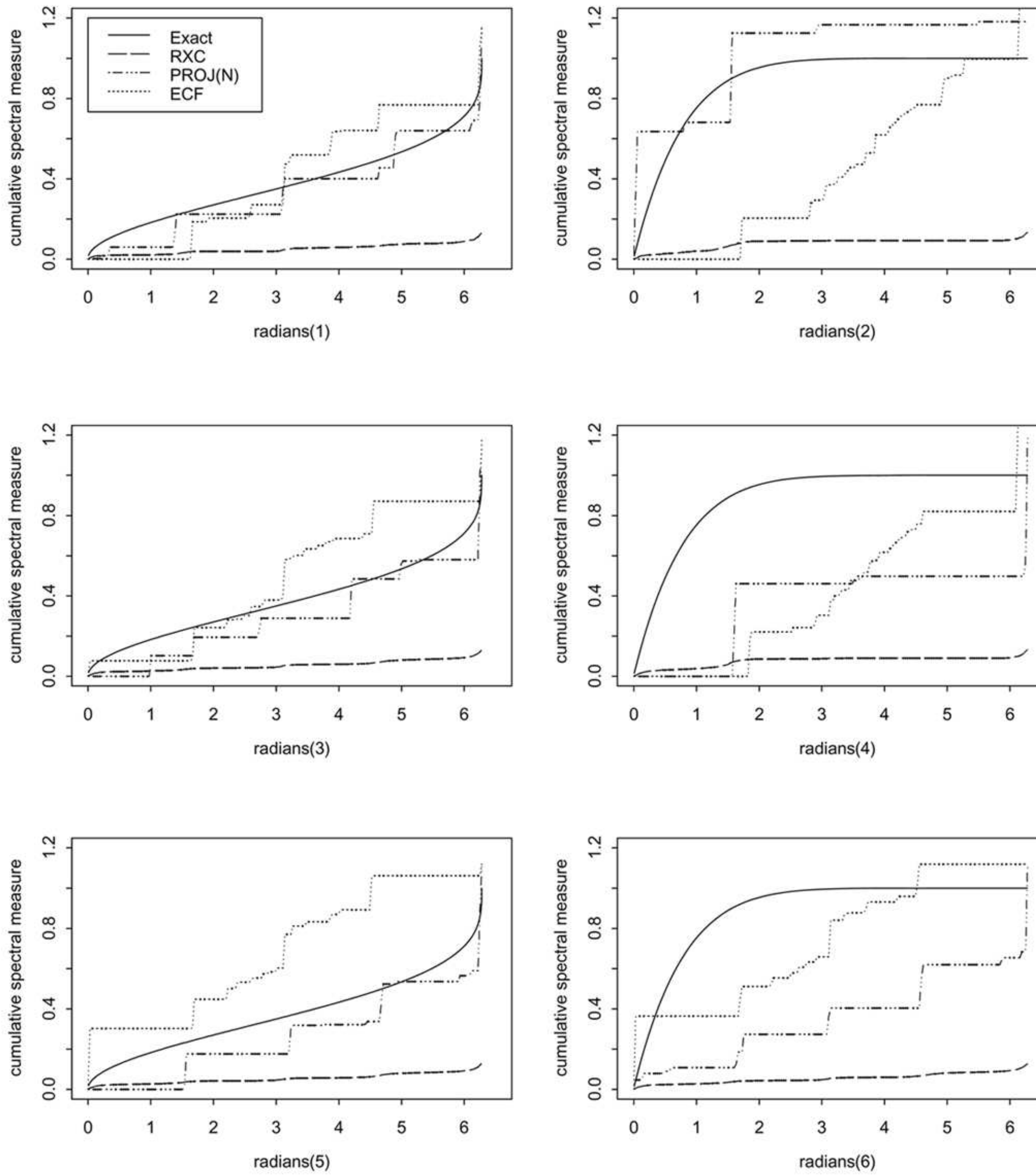
اگر به برآوردهای به‌دست آمده در قسمت‌های قبل توجه کنیم می‌بینیم که برآوردگرهای PROJ(N) و PROJ(M) تقریباً یکسان و در بیشتر موارد با برآوردگر ECF روی هم قرار می‌گیرند. برآوردهای به‌دست آمده با این سه روش زمانی که استقلال وجود دارد بسیار خوب و هر چه پراکندگی جرم روی دایره بیشتر باشد بهتر جواب می‌دهند. با توجه به اهمیت برآورد اندازه طیفی و وابسته بودن اکثر محاسبات بردارهای تصادفی پایدار به این پارامتر لازم است بین این برآوردگرها مقایسه‌ی بیشتری صورت گیرد، از این رو برای مقایسه عمل‌کرد برآوردگرها، حالتی را در نظر گرفتیم که اندازه طیفی واقعی گسسته نباشد یعنی فرض کردیم اندازه طیفی Γ دارای چگالی بتا باشد

$$\frac{d\Phi(\theta)}{d\theta} = \frac{۱}{B(\alpha_۰,\beta_۰)}\frac{۱}{۲\pi}(\frac{\theta}{۲\pi})^{(\alpha_۰-۱)}(۱-\frac{\theta}{۲\pi})^{(\beta_۰-۱)}, \quad ۰ < \theta < ۲\pi.$$

برای انجام مقایسه ابتدا چگالی طیفی را تقسیم‌بندی و با انتگرال‌گیری روی قسمت‌های به‌دست آمده جرم نقاط را به‌دست آوردیم و میانه تقسیم‌بندی‌ها را به‌عنوان مکان جرم‌ها در نظر گرفتیم، یعنی تقریب گسسته‌ی اندازه طیفی واقعی را محاسبه کردیم. سپس با این مقادیر داده‌های پایدار با α دلخواه را تولید کردیم و برآوردگرهای مختلف را برای برآورد پارامترهای توزیع استفاده کردیم.

مثال ٦ در این مثال توزیع $beta(۰/۵, ۰/۳)$ با $\alpha = ۱/۲۵$ و $beta(۱, ۸)$ با $\alpha = ۰/۷۵$ را ۵۰۰ قسمت کردیم و ۱۰۰۰، ۵۰۰۰ و ۱۰۰۰۰ داده‌ی تصادفی از مقادیر به‌دست آمده را با در نظر گرفتن مکان صفر تولید کردیم. برای برآورد، داده‌ها را در ۲۰۰ جهت تصویر کردیم. شکل ۴ و جدول ۳ برآوردهای

به‌دست آمده را به‌ترتیب افزایش n از بالا به پایین نمایش می‌دهد. نمودار مربوط به $beta(۰/۵, ۰/۳)$ و $beta(۱, ۸)$ به‌ترتیب در طرف چپ و راست شکل نمایش داده شده است.



شکل ۴. اندازه طیفی تجمعی داده‌های شبیه‌سازی شده و برآوردهای برآوردگرهای مختلف.

جدول ۳. برآوردهای α و $\vec{\mu}$ به‌دست آمده از روش‌های مختلف برای توزیع‌های بتا استفاده شده.

	$beta$(۰/۵, ۰/۳)			$beta$(۱, ۸)		
$\alpha =$ ۱/۲۵ $\hat{\mu} =$ (۰, ۰)	(۱)	(۳)	(۵)	(۲)	(۴)	(۶)
برآوردRXC	۱/۱۶۷	۱/۱۳۹	۱/۱۹۵	۱/۱۶۳	۱/۱۳۳	۱/۲۰۲
برآورد(PROJ(N	۱/۲۰۴	۱/۲۰۰	۱/۲۴۸	۱/۲۷۵	۱/۲۴۹	۱/۲۵۵
برآوردECF	۱/۲۱۰	۱/۲۳۴	۱/۲۴۹	۱/۲۵۷	۱/۲۳۹	۱/۲۶۰
μ_1	۱/۲۹۹	۱/۲۹۸	۱/۲۹۸	۲/۲۶۳	۲/۲۲۰	۱/۲۸۶
μ_2	−۰/۲۹۳	−۰/۲۶۹	−۰/۲۷۲	۲/۲۸۷	۲/۳۵۳	−۰/۲۷۴
ضریب مقیاس استفاده شده	۱/۲۲۰	۱/۲۲۶	۱/۱۸۸	۱/۲۶۹	۱/۲۷۵	۱/۱۹۲

مشاهده می‌شود که در مورد $beta$(۰/۵, ۰/۳) برآوردگر تصویر (نولان) نسبت به دو برآوردگر دیگر بهتر عمل می‌کند، اما در مورد $beta$(۱, ۸) هر سه برآوردگر تقریباً نتایج نامطلوبی را ارایه می‌دهند. در واقع این حالت مانند مثال ۴ در حالت گسسته است که جرم فقط در ربع اول محور مختصات وجود داشت.

۴ نتیجه‌گیری

ابتدا به معرفی برآوردگرهای پارامترها به‌ویژه اندازه طیفی پرداختیم. سپس با شبیه‌سازی و استفاده از داده‌های واقعی به بررسی روش‌های معرفی شده پرداختیم. هم‌چنین توانایی این روش‌ها را با استفاده از اندازه طیفی پیوسته مورد بررسی قرار دادیم. برآوردگرهای مورد بررسی شامل RXC، تصویر مک‌کلاچ، تصویر و تابع مشخصه تجربی بودند. در بررسی از هشتادمین درصد داده‌ها برای روش RXC استفاده کردیم. قبل از بررسی به‌جز موارد ذکر شده مقدار برآورد پارامتر را از داده‌ها کم کردیم، هم‌چنین در روش تابع مشخصه تجربی داده‌ها را تعدیل کردیم. با توجه به شبیه‌سازی‌های صورت گرفته مشاهده شد که برآوردگر RXC در برآورد α و اندازه طیفی دارای تغییرپذیری بیشتری بود و نتایج رضایت‌بخشی نداشت. برآوردگر تصویر نولان در بهترین شرایط یعنی نمونه زیاد و تعداد جهات تصویر زیاد بهترین نتیجه را برای برآورد α و اندازه طیفی، به‌خصوص زمانی که اندازه طیفی پیوسته بود، ارایه می‌داد. برآوردگر تابع مشخصه تجربی با این‌که به اندازه‌ی روش تصویر قدرتمند نبود اما تقریباً در تمامی موارد نسبت به برآوردگر RXC بهتر عمل می‌کرد. زمانی که اندازه طیفی گسسته بود برآوردگر تصویر مک‌کلاچ، و برآوردگر تصویر و تابع مشخصه تجربی نولان نتایج تقریباً مشابهی را ارایه می‌دادند. به‌طور کلی در دو حالت انداره طیفی گسسته و اندازه طیفی پیوسته هر چه جرم به‌طور یکنواخت‌تر پراکنده شده بود برآوردگرها نتیجه بهتری را ارایه می‌دادند.

مراجع

[1] Bycczkowski, T., Nolan, J.P. and Rajput, B. (1993), *Approximation of multidimensional stable densities*, J. of Multivariate Analysis, 46, 13-31.

[2] Cheng, B.N. and Rachev, S.T. (1995), *Multivariate stable future prices*, Mathematical Finance, 5, 133-153.

[3] McCulloch, J.H. (2000), *Estimation of the bivariate stable spectral representation by the projection method*, Computational Economics, 16, 47-62.

[4] Modarres, R. and Nolan, J.P. (1994), *A method for simulating stable random vectors*, Computational Statistics, 9, 11-19.

[5] Nolan, J.P. and Panorska, A.K. (1997), *Data analysis for heavy tailed multivariate samples*, Stochastic Models, 13, 687-702.

[6] Nolan, J.P., Panorska, A. and McCulloch, J. H. (2001), *Estimation of stable spectral measures*, Mathematical and Computer Modelling, 34, 1113-1122.

[7] Nolan, J.P. and Rajput, B. (1995), *Calculation of multidimensional stable densities*, Communications in Statistics - Simulation and Computation, 24, 551-566.

[8] Press, S.J. (1972), *Estimation in univariate and multivariate stable distributions*, J. of the American Statistical Association, 67, 842-846.

[9] Rachev, S.T. and Xin, H. (1993), *Test for association of random variables in the domain of attraction of multivariate stable law*, Probability and Mathematical Statistics, 14, 125-141.

[10] Samorodnitsky, G. and Taqqu, M. (1994), *Stable Non-Goussian Random Processes*, Chapman and Hall, New York.