توزیع‌های احتمال لاگرانژی

بهاره یاوری زاده[۱] ، محمد حسین علامت‌ساز[۲]

چکیده:

توزیع‌های احتمال لاگرانژی رده‌ی وسیعی از توزیع‌های احتمال را تشکیل می‌دهند که خانواده‌های بسیار مهمی نظیر توزیع پواسون تعمیم یافته، توزیع دوجمله‌ای منفی تعمیم یافته، توزیع سری لگاریتمی تعمیم یافته و توزیع سری توانی را دربر می‌گیرند. خانواده توزیع های لاگرانژی نوع اول با استفاده از بسط لاگرانژ اول به دست می آید. بسط لاگرانژ دوم نیز برای معرفی خانواده توزیع های لاگرانژ نوع دوم استفاده می شود. در این مقاله ابتدا پیچش این توزیع‌ها را مورد بررسی قرار داده و سپس نشان می‌دهیم که این دو خانواده از توزیع‌های لاگرانژی هم‌ارزند. همچنین نشان می دهیم که برخی توزیع های موزون متعلق به خانواده توزیع های لاگرانژی نوع اول عضوی از خانواده توزیع های لاگرانژی نوع دوم هستند.

واژه‌های کلیدی: بسط های لاگرانژی، توزیع های لاگرانژی نوع اول و دوم، قضیه هم ارزی، توزیع های لاگرانژی موزون.

۱ مقدمه

کنسول و شنتون در اوایل ۱۹۷۰ به قدرت بسط های لاگرانژی در به دست آوردن توزیع های احتمال گسسته پی بردند. توزیع های احتمال به دست آمده به توزیع های لاگرانژ نوع اول (L_1) و دوم (L_2) تقسیم شدند. مهمترین عامل در خانواده توزیع های لاگرانژی، تبدیل لاگرانژ $z = ug(z)$ است که توسط لاگرانژ درخلال سال‌های ۱۷۳٦ تا ۱۸۱۳ ارائه شد. او با استفاده از این تبدیل تابع $f(z)$ را به صورت یک سری توانی از u بسط داد[۴]. اوتر [۱۰] اولین محققی بود که تبدیل لاگرانژ $z = ug(z)$ را در مطالعه توزیع های احتمال به کار برد و اهمیت آن را برای توسعه فرآیندهای چند متغیره تشخیص داد. مینامی [۹] به مطالعه توزیع‌های حدی لاگرانژی پرداخت. کنسول و شنتون [۴] و کنسول و فامویه [۱] پیچش توزیع‌های لاگرانژی را بررسی کرده و گشتاورهای مرکزی آن را به دست آوردند. همچنین توسط کنسول و فامویه [۲] قضیه هم‌ارزی ثابت شد. سپس لی و همکاران [۸] کار آن‌ها را روی توزیع‌های تعمیم‌یافته لاگرانژی ادامه دادند. برای مطالعه‌ی بیشتر در مورد ویژگی‌های این توزیع‌ها می‌توان به منابع [۳] و [۷] رجوع کرد.در این مقاله این توزیع‌ها را مورد توجه قرار خواهیم داد. در بخش بعدی بسط‌های لاگرانژی را معرفی کرده و در بخش ۳ توزیع‌های لاگرانژی نوع اول و

[۱] اصفهان، موسسه آموزش عالی نقش جهان
[۲] گروه آمار دانشگاه اصفهان

دوم را تعریف می‌کنیم. در بخش ۴ به بررسی خاصیت پیچش این توزیع‌ها پرداخته و در بخش ۵ هم‌ارزی دو خانواده L_1 و L_2 را نشان می‌دهیم. توزیع‌های لاگرانژ موزون و ارتباط آن‌ها با دو خانواده L_1 و L_2 در بخش ۶ و بالاخره نتیجه‌گیری در بخش ۷ ارائه می‌شود.

۲ بسط های لاگرانژی

فرض کنید $f(z)$ و $g(z)$ دو تابع تحلیلی هستند که در $[-1,1]$ به طور متوالی مشتق پذیرند و $g(0) \neq 0$. لاگرانژ معکوس تبدیل لاگرانژ $u = z/g(z)$ را در نظر گرفت و دو بسط سری توانی زیر را به دست آورد.

$$f(z) = \sum_{x=0}^{\infty} a_x u^x \qquad (1)$$

$$a_x = \frac{1}{x!} D^{x-1}[g^x(z) D f(z)]_{z=0} \qquad a_0 = f(0)$$

$$\frac{f(z)}{1 - zg'(Z)/g(z)} = \sum_{x=0}^{\infty} b_x u^x \qquad (2)$$

$$b_x = \frac{1}{x!} D^{x}[g^x(z) D f(z)]_{z=0} \qquad b_0 = f(0)$$

در عبارات بالا $D = \partial/\partial z$. رابطه (۱) بسط لاگرانژ اول و رابطه (۲) بسط لاگرانژ دوم نامیده می شود.با جایگذاری تابع $f(z)$ در رابطه (۲) به وسیله: $f_1(z) = (1 - zg'(z)/g(z))f(z)$ بسط (۲) به بسط (۱) تبدیل می‌شود. همچنین با جایگذاری تابع $f(z)$ در رابطه (۱) به وسیله: $f_1(z) = \frac{f(z)}{1-zg'(z)/g(z)}$ بسط (۱) به بسط (۲) تبدیل می‌شود. بنابراین بسط لاگرانژ (۱) و (۲) از هم مستقل نیستند. بسط‌های (۱) و (۲) نقش مهمی در تئوری توزیع های احتمال لاگرانژی بازی می کنند.

۳ توزیع های لاگرانژی

در این بخش به تعریف توزیع لاگرانژ نوع اول و دوم می‌پردازیم.

تعریف ۳–۱ فرض کنید $f(z)$ و $g(z)$ دو تابع تحلیلی هستند که در $[-1,1]$ به طور متوالی مشتق پذیرند و

$$D^{x-1}[g^x(z) f'(z)]_{z=0} \geq 0; \; x \in N$$

$$f(1) = g(1) = 1, g(0) \neq 0, f(0) \geq 0.$$

آنگاه بسط لاگرانژ (۱) نمایانگر تابع مولد احتمال توزیع لاگرانژ نوع اول زیر است.

$$f(z) = f(0) + \sum_{x=1}^{\infty} \frac{u^x}{x!} D^{x-1}[g^x(z) f'(z)]_{z=0}$$

بنابراین تابع چگالی توزیع لاگرانژ نوع اول عبارت است از:

$$P(X=x) = \begin{cases} f(0) & x = 0 \\ \frac{1}{x!} D^{x-1}[g^{x-1}(z) f'(z)]_{z=0} & x = 1, \ldots \end{cases} \qquad (3)$$

توابع $f(z)$ و $g(z)$ به ترتیب تابع تبدیل کننده و تابع تبدیل شده نامیده می شوند. به طور کلی هر مجموعه از مقادیر $f(z)$ و $g(z)$ که شرایط مفروض در تعریف را دارا باشند عضوی از خانواده توزیع های لاگرانژ نوع اول را ایجاد می کنند. خانواده توزیع لاگرانژ نوع اول را به اختصار با $L_1(f,g;x)$ یا L_1D [3] نشان می دهیم.

مثال ۳–۱ با انتخاب $f(z) = e^{\theta(x-1)}; \theta > 0$ و $g(z) = e^{\lambda(x-1)}; 0 < \lambda < 1$ توزیع پواسون تعمیم‌یافته

[3] Lagrange distribution of the first kind

(GPD)[4] به شرح زیر عضو خانواده L_1D می شود.

ابتدا توجه می کنیم که:

$$f(1) = g(1) = e^{0} = 1$$

$$g(0) = e^{-\lambda} \neq 0, f(z) = e^{-\theta} > 0$$

$$D^{x-1}[g^x(z)f'(z)]_{z=0} = D^{x-1}[e^{\lambda(z-1)x}\theta e^{\theta(z-1)}]_{z=0} \geq 0$$

پس با استفاده از رابطه (۳) داریم:

$$P(X=1) = \tfrac{1}{1!}D^{1-1}[e^{\lambda(z-1)}\theta e^{\theta(z-1)}]_{z=0} = \theta e^{-\theta-\lambda}$$

$$P(X=2) = \tfrac{1}{2!}D^{2-1}[e^{2\lambda(z-1)}\theta e^{\theta(z-1)}]_{z=0}$$

$$= \tfrac{1}{2!}\theta(\theta+2\lambda)e^{-\theta-2\lambda}$$

$$\vdots$$

$$P(X=x) = \tfrac{1}{x!}\theta(\theta+\lambda x)^{x-1}e^{-\theta-\lambda x} \qquad x = 1, 2, \ldots$$

جدول (۱) چند توزیع مهم لاگرانژ نوع اول را ارائه می دهد که در آن

$${}_2F_1[a,b;c;x] = 1+\frac{ab}{c}\frac{x}{1!}+\frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)}\frac{x^2}{2!}+\ldots$$

که $c \neq 0, -1$.

اندیس ۲ و ۱ در دو طرف F به ترتیب مربوط به ۲ پارامتر a و b در صورت و یک پارامتر c در مخرج است.

تعریف ۳—۲ فرض کنید $f(z)$ و $g(z)$ دو تابع تحلیلی هستند که در $[-1, 1]$ به طور متوالی مشتق پذیرند و

$$f(1) = g(1) = 1\ ,\ g(0) \neq 0,$$

$$0 < g'(1) < 1, f(0) \geq 0,$$

$$D^y[g^y(z)f(z)]_{z=0} \geq 0; y \in N$$

آنگاه تابع مولد احتمال توزیع لاگرانژ نوع دوم با استفاده از رابطه (۲) به صورت زیر به دست می آید:

$$\frac{f(z)(1-g'(1))}{1-zg'(z)/g(z)} = \sum_{y=0}^{\infty}\frac{u^y}{y!}(1-g'(1))D^y[g^y(z)f(z)]_{z=0} \qquad (۴)$$

بنابراین تابع چگالی توزیع لاگرانژ نوع دوم به صورت زیر است:

$$P(Y=y) = \begin{cases} f(0)(1-g'(1)) & y = 0 \\ \frac{(1-g'(1))}{y!}D^y[g^y(z)f(z)]_{z=0} & y = 1, 2, 3, \ldots \end{cases} \qquad (۵)$$

خانواده توزیع لاگرانژ نوع دوم را به اختصار با $L_2(f, g; y)$ یا L_2D[5] نشان می دهند. جدول زیر چند توزیع مهم لاگرانژ نوع دوم را ارائه می دهد.

تبصره۳—۱ در برخی مقالات توابع $f(z)$ و $g(z)$ به عنوان توابع مولد احتمال درنظر گرفته شده‌اند. در این صورت شرط لازم $f(1) = g(1) = 1$ را دارا هستند. شرط تابع‌مولد احتمال یک محدودیت جدی روی تولید توزیع‌های احتمال لاگرانژی ایجاد می‌کند. مثال زیر که توسط جاناردان [۵] ارائه شده نشان می‌دهد که لزومی ندارد توابع $f(z)$ و $g(z)$ توابع مولد احتمال باشند بلکه کافی است شرایط $f(1) = g(1) = 1$ برقرار باشند.

مثال ۳—۲ توابع $f(z) = (1-\theta+\theta z)^{a/c}$ و $g(z) = (1-\theta+\theta z)^{1+b/c}$ را درنظر بگیرید به طوری‌که $a > 0$، $b > 0$، $b + c \geq 0$ و $0 < \theta < 1$. توابع $f(z)$

[4] Generalized Poisson distribution

[5] Lagrange distribution of the Second kind

و $g(z)$ توابع مولد احتمال نیستند اما به طور متوالی مشتق‌پذیرند و شرایط $f(1) = g(1) = 1$ و $g(0) \neq 0$ را دارا هستند. بنابراین با استفاده از توزیع (۵) یک توزیع احتمال معتبر از یک متغیر تصادفی Y با تابع چگالی زیر به دست می‌آید:

$$P(Y=y) = \left(1-(1+\tfrac{b}{c})\theta\right)\binom{a/c+by/c+y}{y}$$
$$\times\theta^{y}(1-\theta)^{a/c+by/c}\quad y=0,1,2,\dots$$

توزیع بالا تابع چگالی توزیع پولیااگن‌برگر [6] تعمیم‌یافته موزون با تابع وزن $w_y = (a/c+by/c+y)\theta$ می‌باشد.

جدول (۱) چند توزیع مهم لاگرانژ نوع اول

$L_1(f,g;x)$	f(z)	g(z)	نام توزیع‌ها
$\frac{n}{n+mx}\binom{n+mx}{x}p^{x}q^{n+mx-x}$ $x=0,1,2,\dots$	$(q+pz)^{n}$	$(q+pz)^{m}$	دوجمله‌ای منفی تعمیم‌یافته
$\frac{1}{mx}\binom{mx}{x}\frac{(pq^{m-1})^{x}}{(-Lnq)}$ $x=0,1,2,\dots$	$\frac{Ln(1+pz/q)}{(-Lnq)}$	$(q+pz)^{m}$ $1<m<p^{-1}$	سری لگاریتمی تعمیم‌یافته
$q^{n}\quad x=0$ $\frac{(\lambda x)^{x-1}}{x!e^{\lambda x}}(npq^{n-1})\times$ $\left[{}_2F_0(1-n;1-x;;\frac{p}{\lambda xq})\right]$ $x=1,2,\dots$	$(q+pz)^{n}$ $0<p<1$	$e^{\lambda(z-1)}$ $0<\lambda<1$	دوجمله‌ای—پواسون
$e^{-\theta}\quad x=0$ $\frac{(\theta q^{m})^{x}}{e^{\theta}x!}\left[{}_2F_0(1-x,-mx;;\frac{-p}{q^{\theta}})\right]$ $x=1,2,\dots$	$e^{\theta(z-1)}$ $\theta>0$	$(q+pz)^{m}$ $mp<1$	پواسن—دوجمله‌ای
$e^{-\theta}\quad x=0$ $e^{-\theta}\left[\frac{\theta^{x}q^{kx}}{x!}\right]\left[{}_2F_0(1-x,kx;;\frac{-p}{q^{\theta}})\right]$ $x=1,2,\dots$	$e^{\theta(z-1)}$ $\theta>0$	$\frac{q^{k}}{(1-pz)^{k}}$ $kp<1$	پواسن—دوجمله‌ای منفی

[6] Polya Eggenberge distribution

جدول (۲) چند توزیع مهم لاگرانژ نوع دوم

نام توزیع‌ها	g(z)	f(z)	$L_(f,g;y) \quad y=0,1,2,\ldots$
دوجمله‌ای منفی خطی	$\frac{q^m}{(1-Pz)^m}$	$\frac{q^n}{(1-pz)^n}$ $0<p<1, m\in N$	$\binom{n+my+y-1}{y}(q-mp)p^y q^{n+my-y}$
پواسون خطی	$e^{\lambda(z-1)}$ $0<\lambda<1$	$e^{\theta(z-1)}$ $\theta>0$	$(1-\lambda)(\theta+\lambda y)^y e^{-\theta-\lambda y}/y!$
دوجمله‌ای خطی	$(q+pz)^m$	$(q+pz)^n$	$(1-mp)\binom{n+my}{y}p^y q^{n+my-y}$
دوجمله‌ای—پواسن	$e^{\lambda(z-1)}$ $0<\lambda<1$	$(q+pz)^n$ $0<p<1$	$\frac{(\lambda y)^y}{y!e^{-\lambda y}}(1-\lambda)q^n \times {}_2F_0(-n;-y;;\frac{p}{\lambda yq})$

۴ خاصیت پیچش L_1D و L_2D

در این بخش به بررسی خاصیت پیچش توزیع‌های لاگرانژ نوع اول و دوم می‌پردازیم.

قضیه ۴—۱ اگر X_1 و X_2 دو متغیر تصادفی مستقل به ترتیب با توزیع‌های $L_1(f_1,g;x)$ و $L_1(f_2,g;x)$ باشند، آن‌گاه مجموع آن‌ها $X=X_1+X_2$ دارای توزیع $L_1(f_1f_2,g;x)$ است. [۴]

اثبات ابتدا طبق تعریف پیچش داریم:

$$P(X=k)=\sum_{j=0}^{k}P(X_1=j)P(X_2=k-j)$$

$$=\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}D^{j-1}[g^j(z)f_1'(z)]_{z=0}$$

$$\times\frac{1}{(k-j)!}D^{k-j-1}[g^{k-j}(z)f_2'(z)]_{z=0}$$

حال با درنظر گرفتن بسط (۱) به صورت زیر:

$$h(z)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{u^r}{r!}D^{r-1}[g^r(z)h'(z)]_{z=0}$$

و جایگذاری تابع $h(z)=f_1(z)f_2(z)$ در عبارت فوق داریم:

$$f_1(z)f_2(z)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{u^r}{r!}D^{r-1}[g^r(z)D(f_1(z)f_2(z))]_{z=0}$$

از طرفی با استفاده از بسط لاگرانژ $f_1(z)$ و $f_2(z)$ خواهیم داشت:

$$f_1(z)f_2(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{u^m}{m!}D^{m-1}[g^m(z)f_1'(z)]_{z=0}$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u^n}{n!}D^{n-1}[g^n(z)f_2'(z)]_{z=0}$$

از دو رابطه‌ی اخیر نتیجه می‌شود که:

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{u^r}{r!}D^{r-1}[g^r(z)D(f_1(z)f_2(z))]_{z=0}$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{u^m}{m!}D^{m-1}[g^m(z)f_1'(z)]_{z=0}$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u^n}{n!}D^{n-1}[g^n(z)f_2'(z)]_{z=0}$$

حال با مساوی قراردادن ضرایب u^k در عبارت بالا داریم:

$$\frac{D^{k-1}}{k!}[g^k(z)D(f_1(z)f_2(z))]_{z=0}$$

$$=\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}D^{j-1}[g^j(z)f_1'(z)]_{z=0}$$

$$\times D^{k-j-1}[g^{k-j}(z)f_2'(z)]_{z=0}$$

در نتیجه با جایگذاری رابطه بالا در تعریف پیچش خواهیم داشت:

$$P(X=k)=\frac{1}{k!}D^{k-1}[g^k(z)D(f_1(z)f_2(z))]_{z=0}$$

قضیه ۴—۲ اگر Y_1 و Y_2 دو متغیر تصادفی مستقل

به ترتیب با توزیع‌های $L_2(f_1,g;y_1)$ و $L_2(f_2,g;y_2)$ باشند، آن‌گاه مجموع $Y=Y_1+Y_2$ دارای توزیع $L_2(f_1f_2,g;y)$ است. [۱]

اثبات مشابه قضیه ۱ است.

۵ هم ارزی دوخانواده $L_1(f_1,g;x)$ و $L_2(f_2,g;y)$

جاناردان و رائو [٦] و جاناردان [۵] اشتباهاً فرض کرده بودند که بسط‌های لاگرانژ تحت تبدیل $z=ug(z)$ از یکدیگر متمایز هستند تا اینکه کنسول و فامویه [۲] قضیه هم‌ارزی زیر را ثابت کردند.

قضیه ۵–۳ فرض کنید $f_1(z)$ و $f_2(z)$ و $g(z)$ سه تابع تحلیلی از Z باشند که در $[-1,1]$ به طور متوالی مشتق پذیرند به طوری‌که $g(0)\neq 0$ و $f_1(1)=f_2(1)=g(1)=1$. آنگاه تحت تبدیل $z=ug(z)$ و انتخاب

$$f_2(z)=(1-g'(1))^{-1}[1-zg'(z)/g(z)]f_1(z) \quad (٦)$$

هر عضو خانواده توزیع های $L_1(f_1,g;x)$ عضوی از خانواده توزیع های $L_2(f_2,g,y)$ است و برعکس.

اثبات ابتدا با جایگذاری رابطه (٦) در تابع چگالی $L_2(f_2,g;y)$ داریم:

$$P(Y=y)$$
$$=(y!)^{-1}D^y[g(z)(1-zg'(z)/g(z))f_1(z)]_{z=0}$$
$$=(y!)^{-1}D^{y-1}[yg^{y-1}(z)g'(z)f_1(z)+g^y(z)f_1'(z)$$
$$-\binom{y}{1}D^{y-1}(g^{y-1}(z)g'(z)f_1(z))]$$
$$=(y!)^{-1}D^y[g^y(z)f_1'(z)]_{z=0}$$

بنابراین هرعضو ازخانواده توزیع های $L_2(f_2,g;x)$ عضوی از خانواده توزیع های $L_1(f_1,g;x)$ است.

برعکس: تابع چگالی $L_1(f_1,g;x)$ به صورت زیر است:

$$P(X=x)=(x!)^{-1}D^{x-1}[g^x(z)f_1(z)]_{z=0}$$
$$=(x!)^{-1}[D^{x-1}[g^x(z)f_1'(z)+xg^{x-1}(z)g'(z)f_1(z)$$
$$-\binom{x}{1}D^{x-1}(g^{x-1}(z)g'(z)f_1(z)]_{z=0}$$
$$=(x!)^{-1}[D^{x-1}\{D(g^x(z)f_1(z))\}$$
$$-D^x\{zg^{x-1}(z)g'(z)f_1(z)\}]_{z=0}$$
$$=(x!)^{-1}D^x[g^x(z)\{1-zg'(z)/g(z)\}f_1(z)]_{z=0}$$

حال اگر قرار دهیم:

$$f_1(z)=(1-g'(1))^{-1}f_2(z)[1-zg'(z)/g(z)]^{-1}$$

خواهیم داشت:

$$P(X=x)=(1-g'(1))(x!)^{-1}D^x(g^x(z)f_2(z))$$

در نتیجه هرعضو خانواده توزیع های $L_1(f_1,g;x)$ عضوی از خانواده توزیع های $L_2(f_2,g;x)$ است.

مثال ۵–۳ توزیع پواسون تعمیم یافته که با انتخاب $f_1(z)=e^{\theta(z-1)};\theta>0$ و $g(z)=e^{\lambda(z-1)};0<\lambda<1$ عضو خانواده L_1D می شود را در نظر می گیریم. تابع چگالی آن به صورت زیر است:

$$P(X=x)=\frac{1}{x!}\theta(\theta+\lambda x)^{x-1}e^{-\theta-\lambda x} \quad x=0,1,2,\ldots$$

حال با استفاده از رابطه (٦) داریم:

$$f_2(z)=(1-\lambda)^{-1}(1-\lambda z)e^{\theta(z-1)}$$

در نتیجه با جایگذاری عبارت فوق در تابع چگالی توزیع $L_2(f_2,g;y)$ خواهیم داشت:

$$P(Y=y)=(1-\lambda)(y!)^{-1}$$
$$\times D^y[e^{\lambda y(z-1)}(1-\lambda)^{-1}(1-\lambda z)e^{\theta(z-1)}]_{z=0}$$
$$=e^{-\theta-\lambda y}(y!)^{-1}[(\theta+\lambda y)^y-\lambda y(\theta+\lambda y)^{y-1}]_{z=0}$$
$$=e^{-\theta-\lambda y}\theta(\theta+\lambda y)^{y-1}/y!$$

۶ توزیع های لاگرانژی موزون

جاناردان و رائو [۶] کلاس جدیدی از توزیع‌های گسسته را تحت عنوان توزیع‌های لاگرانژی نوع دوم معرفی کردند. آن‌ها نشان دادند که بعضی از توزیع‌های موزون متعلق به توزیع لاگرانژ نوع اول، عضوی از خانواده توزیع‌های لاگرانژ نوع دوم هستند.

قضیه ۶—۴ فرض کنید متغیر تصادفی X دارای توزیع $L_1(f,g;x)$ با $f(z)=g^m(z)$ باشد(m عدد حقیقی است). اگر توزیع X توسط تابع $w_k=D[g^k(z)f(z)]_{z=1}$ وزن دار شود و متغیر تصادفی Y نشان دهنده متغیر موزون حاصل باشد، آنگاه Y دارای توزیع $L_2(f,g;y)$ خواهد بود.

اثبات با قرار دادن $f(z)=g^m(z)$ در رابطه (۲) داریم:

$$P(X=x)$$
$$=\tfrac{m}{k!}D^{k-1}[g^{k+m-1}(z)g'(z)]_{z=0}$$
$$=\tfrac{m}{k!(m+k)}D^k[g^{k+m}(z)]_{z=0},\ k=0,1,2,\ldots$$

تابع وزن به صورت زیر است:

$$w_k=D[g^k(z)f(z)]_{z=1}=D[g^{m+k}(z)]_{z=1}$$
$$=(m+k)[g^{m+k-1}(z)g'(z)]_{z=1}=(m+k)g'(1)$$
$$=(m+k)g'(1)$$

لذا تابع چگالی توزیع موزون X به صورت زیر خواهد بود:

$$P(Y=k)$$
$$=(m+k)P(X=k)/\textstyle\sum_{k=0}^{\infty}(m+k)P(X=k)$$
$$=(m+k)P(X=k)/[m+f'(1)(1-g'(1))^{-1}]$$

از طرفی، $f'(1)=Dg^m(z)|_{z=1}=mg'(1)$. بنابراین،

$$P(Y=k)=(1-g'(1))\frac{m+k}{m}P(X=k)$$

مثال ۶—۴ فرض کنید X دارای توزیع پوآسن تعمیم یافته با تابع چگالی زیر باشد:

$$P(X=x)=\frac{1}{k!}\theta(\theta+\lambda y)^{k-1}e^{-\theta-\lambda k}\quad k=0,1,2,\ldots$$

طبق مثال(۳—۱) با انتخاب $f(z)=e^{\theta(z-1)}\theta>0$ و $g(z)=e^{\lambda(z-1)};\ 0<\lambda<1$ این توزیع متعلق به خانواده L_1D می باشد. از طرفی طبق قضیه (۶—۴) تابع وزن به صورت زیر است:

$$w_k=D[g^k(z)f(z)]_{z=1}=\theta+\lambda k$$

بنابراین،

$$P(Y=k)$$
$$=\frac{w_kP(X=k)}{\sum_{k=0}^{\infty}w_kP(X=k)}=\frac{(\theta+\lambda k)P(X=k)}{\sum_0^{\infty}(\theta+\lambda k)P(X=k)}$$
$$=\frac{\theta+\lambda k}{\theta+\frac{\lambda\theta}{(1-\lambda)}}\frac{1}{k!}\theta(\theta+\lambda k)^{k-1}e^{-\theta-\lambda k}$$
$$=\frac{1}{k!}(1-\lambda)(\theta+\lambda y)^ke^{-\theta-\lambda k}\qquad k=0,1,2,\ldots$$

عبارت بالا توزیع پواسن خطی است که متعلق به خانواده L_2D است. بنابراین توزیع پواسن خطی شکل موزون توزیع پواسن تعمیم یافته با تابع وزن $w_k=\theta+\lambda k$ است. جدول (۳) مثال هایی از خانواده توزیع های لاگرانژ

نوع اول را همراه شکل های موزون آنها با تابع وزن $w(\alpha,\beta;k)=\alpha+\beta k$ ارائه می دهد.

قضیه ۶–۵ فرض کنید متغیر تصادفی Y دارای توزیع $L_2(f,g;y)$ با $f(z)=g^m(z)$ باشد (m عدد حقیقی است). اگر توزیع Y توسط تابع $w_k^{-1}=[D[g^k(z)f(z)]_{z=1}]^{-1}$ وزن دار شود و متغیر تصادفی X نشان دهنده متغیر موزون حاصل باشد، آنگاه X دارای توزیع $L_1(f,g;x)$ خواهد بود.

اثبات مشابه قضیه ۴ است.

جدول (۳) چند توزیع لاگرانژ نوع اول و شکل موزون آن‌ها

نام توزیع‌ها	$P(X=k)$	تابع وزنی	$P(Y=k)$
پواسون تعمیم‌یافته	$\theta(\theta+\lambda y)^{k-1}e^{-\theta-\lambda k}/k!$	$\theta+\lambda k$	$(1-\lambda)e^{-\theta-\lambda k}/k!$ $\lambda<1, k=0,1,\ldots$
دوجمله‌ای منفی تعمیم‌یافته	$\frac{n}{n+mk}\binom{n+mk}{k}p^kq^{n+mk-k}$	$n+mk$	$\binom{n+mk}{k}p^kq^{n+mk-k}$ $0<p<1, mp<1, q=1-p$ $k=0,1,\ldots$
سری لگاریتمی تعمیم‌یافته	$\frac{\alpha\Gamma(\beta k)\theta^k(1-\theta)^{\beta k-k}}{k\Gamma(k)\Gamma(\beta k-k+1)}$	k $\alpha=[-Ln(1-\theta)]^{-1}$	$(1-\theta\beta)\frac{\Gamma(\beta k)\theta^{k+1}(1-\theta)^{\theta k-k}}{\Gamma(k)\Gamma(\beta k-k+1)}$ $\beta>0, 0<\theta<1, \theta\beta<1$ $k=1,2,\ldots$
هندسی تعمیم‌یافته	$\frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}q^{k+1}p^k$	$k+1$	$(2-\frac{p}{q})\binom{2k}{k}$ $0<p<\frac{1}{2}, q=1-q$ $k=0,1,\ldots$

۷ نتیجه گیری

می‌دانیم که توزیع‌های مشهوری چون توزیع گاما و توزیع‌های بتای نوع اول و دوم در ابتدا از توابع معروف گاما و بتا در ریاضیات نشئت گرفتند ولی البته امروزه نقش آنها در مدلبندی موقعیت‌های واقعی بر هیچکس پوشیده نیست. توزیع‌های لاگرانژی نیز که با تعدادی از آنها در جداول (۱) و (۲) آشنا شدیم، از بسط‌های لاگرانژی (۱) و (۲) در ریاضیات حاصل شده‌اند. با این حال بسیاری از این توزیع‌ها در عمل و هنگام مدل بندی داده های واقعی به صورت تعمیم‌هایی مانند آمیختن و وزنی کردن از توزیع‌های کلاسیک در ادبیات آماری مستقلاً مشاهده شده‌اند. بررسی یکپارچه خانواده توزیع‌های لاگرانژی که خانواده غنی از توزیع‌های تعمیم‌یافته آماری است مسلماً در بررسی و کشف خصوصیات تک تک آنها بسیار مفید واقع می‌شود.

بویژه، در مقاله حاضر بسته بودن این خانواده‌ها تحت عمل پیچش نشان داده شد. علاوه بر آن ملاحظه کردیم دو خانواده لاگرانژ نوع اول و دوم عملاً هم‌ارز یکدیگر هستند و هر عضو یکی می‌تواند به صورت عضوی از خانواده دیگری ارائه شود.

مراجع

[1] Consul, P. C. and Famoye, F. (2001). On lagrangian distributions of the second kind, *Communication in Statistics Theory and Methods*, 30, 165-178.

[2] Consul, P. C. and Famoye, F. (2005a). Equivalence of both classes of Lagrangian Probability distribution, *Far East Journal of Theoretical Statistics*, 15, 43-51.

[3] Consul, P. C. and Famoye, F. (2005b). *Lagrangian probability distributions*, Birkhauser,Boston.

[4] Consul, P. C. and Shenton, L. R. (1972). Use of lagrangian expansion for generating generalized probability distributions, *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 23, 239-248.

[5] Janardan, K.G. (1997). Awider class of Lagrange distributions of the second kind, *Communication in Statistics-Theory and Methods*, 26, 2087-2091.

[6] Janardan, K.G. and Rao, B. R. (1983). Lagrange distributions of the second kind and weighted distributions, *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 43, 302-313.

[7] Johnson, N. L., Kemp, A. W. and Kotz, S. (2005). *Univariate Discrete Distributions*, John Wiley and Sons, New York.

[8] Li.S, Famoye, F. and Lee, C.(2006). On some extensions of the Lagrangian probability distributions, *Far East Journal of Theoretical Statistics*, 18, 25-47.

[9] Minami, M.(1999). Inverse relationship and Limiting forms of Lagrange distributions, *Communication in Statistics-Theory and Methods*, 28, 409-429.

[10] Otter, R. (1949). The multiplicative process, *Annals of Mathematical Statistics*, 20, 206-224.