

خانواده توزیع‌های سری توانی پارامتر آماسیده

محمد حسین علامت ساز^۱، فرشته مومنی^۲

چکیده:

در مقاله مومنی و علامت ساز [۱] توزیع‌های دوجمله‌ای منفی و پوآسون پارامتر آماسیده^۳ به عنوان تعمیمی از توزیع‌های کلاسیک متناظر بررسی شدند. این توزیع‌ها در واقع دو عضو خانواده توزیع‌های سری توانی پارامتر آماسیده هستند که در مدل‌بندی داده‌های شمارشی همبسته بویژه در اقتصادسنجی، بیمه و دارایی کاربرد وسیعی دارند و توسط مینکووا [۶] بررسی شده‌اند.

در مقاله حاضر، توزیع‌های مهم باقیمانده از این خانواده مانند برنولی، دوجمله‌ای و سری لگاریتمی را مورد بررسی قرارداد و توابع جرم احتمال، توابع مولد احتمال و صورت کلی و متحد توزیع‌های این خانواده را ارائه خواهیم داد. در پایان با گروهی داده واقعی مربوط به تعداد خسارات بیمه کاربرد آنها را ارائه خواهیم داد.

واژه‌های کلیدی: خانواده توزیع‌های سری توانی، توزیع‌های پارامتر آماسیده، توزیع‌های مرکب.

۱ مقدمه

توزیع‌های گسسته برنولی، دوجمله‌ای، هندسی، دوجمله‌ای منفی، پوآسون و سری لگاریتمی که کاربرد وسیعی در داده‌های شمارشی دارند متعلق به خانواده توزیع‌های سری توانی (تعمیم یافته) هستند. توابع مولد احتمال این توزیع‌ها دارای صورت کلی زیر می‌باشد:

$$p_k = \frac{a(k)\theta^k}{h(\theta)}, \quad h \in S \subseteq N. \quad (2)$$

که در آن $a(k)$ تابعی نامنفی است به طوری که

$$h(\theta) = \sum_{k \in S} a(k)\theta^k$$

در ده سال اخیر پیشرفت قابل توجهی در زمینه گسترش توزیع‌های گسسته کلاسیک، بویژه توزیع‌های سری توانی، صورت گرفته است. از آن جمله خانواده توزیع‌های

$$P(z) = \frac{h(\theta z)}{h(\theta)}, \quad \theta > 0. \quad (1)$$

که در آن h تابعی متناهی، مثبت و مشتق‌پذیر است. متغیرهای تصادفی متعلق به این خانواده دارای تکیه گاه

^۱گروه آمار دانشگاه اصفهان

^۲دانشگاه آزاد بهشهر

^۳Inflated

برنولی پارامتر آماسیده تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱. متغیر تصادفی گسسته X یا توزیع آن را برنولی پارامتر آماسیده گوئیم هرگاه

$$P(X = 0) = 1 - \pi$$

$$P(X = k) = \pi \rho^{k-1} (1 - \rho), k = 1, 2, \dots \quad (3)$$

که در آن $\rho \in (0, 1)$ و $\pi \in (0, 1)$ پارامترهای ثابت آن می‌باشند. این توزیع را با نماد $IBe(\pi, \rho)$ نشان می‌دهیم.

به سهولت می‌توان دید که اگر $X \sim IBe(\pi, \rho)$ داریم

$$P_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k P(X = k)$$

$$= 1 - \frac{\pi(1-z)}{1-\rho z}, |z| < 1/\rho \quad (4)$$

و در نتیجه

$$E(X) = \frac{\pi}{(1-\rho)}, \quad Var(X) = \frac{\pi(1-\pi+\rho)}{(1-\rho)^2}$$

حال متغیر دو جمله‌ای پارامتر آماسیده را با تکرار مستقل مشاهدات برنولی پارامتر آماسیده به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف ۲. هرگاه متغیر تصادفی گسسته X برابر مجموع n متغیر تصادفی مستقل و هم‌توزیع $IBe(\pi, \rho)$ باشد، X یا توزیع آن را دو جمله‌ای پارامتر آماسیده گوئیم و بانماد $Ibin(n, \pi, \rho)$ نشان می‌دهیم.

پس اگر $X \sim Ibin(n, \pi, \rho)$ داریم

$$P_X(z) = \left[1 - \frac{\pi(1-z)}{1-\rho z}\right]^n, |z| < 1/\rho \quad (5)$$

سری توانی پارامتر آماسیده است که شامل یک پارامتر اضافی ρ می‌باشد. دلیل این توجه، البته، ضرورت حضور چنین توزیع‌هایی در عمل و بویژه در داده‌های وابسته در زمینه‌های مختلف اقتصادسنجی، دارایی، بیمه، زیست‌شناسی و غیره و همچنین انعطاف پذیری بیشتر این توزیع‌ها می‌باشد. باورز و همکاران [۳]، رولسکی و همکاران [۸]، وینکلن [۹]، کلا و همکاران [۵] و بویژه مینکووا [۶] و [۷] از جمله نویسندگانی هستند که به این مهم پرداخته‌اند. اخیراً مومنی و علامت‌ساز [۱] به توزیع‌های هندسی، دو جمله‌ای منفی و پوآسون پارامتر آماسیده توجه کرده‌اند. در ادامه مقاله آخر، مقاله حاضر به معرفی سایر توزیع‌های مهم خانواده سری توانی پارامتر آماسیده، بویژه توزیع‌های برنولی، دو جمله‌ای و سری لگاریتمی، می‌پردازد. در این مقاله توابع جرم احتمال و مولد احتمال آنها را به دست خواهیم آورد. سپس صورت کلی این توابع را برای این خانواده تعیین می‌کنیم و به برخی ساختارهای مشابه آنها با خانواده کلاسیک متناظر اشاره خواهیم کرد. در پایان، با مثالی از داده‌های واقعی، کاربرد توزیع‌های تعمیم یافته مذکور را نمایش خواهیم داد.

۲ توزیع‌های برنولی و دو جمله‌ای پارامتر آماسیده

در مومنی و علامت‌ساز [۱] توزیع‌های هندسی، دو جمله‌ای منفی و پوآسون با استفاده از توزیع‌های صفر آماسیده بررسی شده‌اند. در اینجا مشابه با حالت کلاسیک، توزیع‌های دو جمله‌ای را با استفاده از توزیع‌های

که در آن $P(X = k)$ همان عبارت مطلوب (۶) می باشد. تذکره ۱. ملاحظه می کنیم که برخلاف حالت کلاسیک، تکیه گاه های توزیع های برنولی و دوجمله ای پارامتر آماسیده متناهی نیستند. بلکه آنها دارای تکیه گاه به طور نامتناهی شمارای $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ هستند.

تذکره ۲. مشابه حالت کلاسیک، هرگاه

$$n \rightarrow \infty, \quad \pi \rightarrow 0 \implies n\pi = \lambda$$

که در آن $\lambda > 0$ ثابت است، آنگاه (۵) نتیجه می دهد که Y متغیر حدی متغیر دوجمله ای پارامتر آماسیده X دارای تابع مولد احتمال زیر خواهد بود که در واقع توزیع پواسون پارامتر آماسیده را تعریف می کند.

$$\begin{aligned} P_Y(z) &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \pi \rightarrow 0}} P_X(z) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{\pi(1-z)}{1-\rho z} \right]^n \\ &= \exp\left\{ \frac{\lambda(z-1)}{1-\rho z} \right\} \end{aligned} \quad (7)$$

از (۷) می توان تابع جرم احتمال توزیع پواسون پارامتر آماسیده فوق را که با نماد $IPo(\lambda, \rho)$ نشان داده می شود به صورت زیر به دست آورد.

$$P(Y = k) = \sum_{k_1, k_2, \dots} \frac{e^{-\lambda}}{k_1! k_2! \dots} \times [\lambda(1-\rho)]^{k_1+k_2+\dots} \rho^{k_2+2k_3+\dots}; \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

که در آن جمع بندی روی تمام اعداد صحیح و نامنفی k_1, k_2, \dots به طوری که $k_2 + 2k_3 + \dots = k$ انجام می پذیرد (قضیه ۴ در [۱] را ملاحظه می کنید). همچنین از (۷) داریم

$$E(Z) = \frac{\lambda}{1-\rho}, \quad Var(Z) = \frac{\lambda(1+\rho)}{(1-\rho)^2}$$

و در نتیجه

$$E(X) = \frac{n\pi}{1-\rho}$$

و

$$Var(X) = \frac{n\pi(1-\pi+\rho)}{(1-\rho)^2}$$

قضیه ۱. تابع جرم احتمال متغیر تصادفی X با توزیع

$Ibin(n, \pi, \rho)$ عبارت است

$$\begin{aligned} P(X = k) &= (1-\pi)^n \sum_{k_1, k_2, \dots}^{(k_1, k_2, \dots, n-k_1-k_2-\dots)} \\ &\times \rho^k \left[\frac{\pi(1-\rho)}{(1-\pi)\rho} \right]^{k_1+k_2+\dots} \end{aligned} \quad (6)$$

که در آن $k = 0, 1, 2, \dots$ و جمع بندی روی تمام اعداد صحیح و نامنفی k_1 و k_2 و ... است به طوری که

$$k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \dots = k$$

اثبات: با استفاده از تابع مولد احتمال (۵) می توان

نوشت:

$$\begin{aligned} P_X(z) &= \left[1 - \frac{\pi(1-z)}{1-\rho z} \right]^n \\ &= (1-\pi)^n \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \left[\frac{\pi(1-\rho)z}{(1-\pi)(1-\rho z)} \right]^i \\ &= (1-\pi)^n \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \left[\frac{\pi(1-\rho)}{\rho(1-\pi)} (\rho z + \rho^2 z^2 + \dots) \right]^i \\ &= (1-\pi)^n \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \sum_{i_1, i_2, \dots} \binom{i}{i_1, i_2, \dots} \times \\ &\quad \left[\frac{\pi(1-\rho)}{\rho(1-\pi)} \right]^i (\rho z)^{i_1+2i_2+\dots} \end{aligned}$$

که در آن، در مجموع آخر، جمع بندی روی تمام اعداد

صحیح و نامنفی i_1, i_2, \dots انجام می شود به طوری که

$$i_1 + i_2 + \dots = i$$

پس با جایگذاری $k_j = i_j$ ($j \geq 1$) و $i =$

رابطه آخری به صورت زیر

در می آید.

$$P_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k P(X = k)$$

۳ توزیع سری لگاریتمی پارامتر آماسیده

ابتدا خاطرنشان می‌کنیم که یک متغیر تصادفی دوجمله‌ای منفی پارامتر آماسیده Y به صورت مجموع r متغیر تصادفی مستقل هم‌توزیع هندسی پارامتر آماسیده تعریف می‌شود و با نماد $Inb(r, \pi, \rho)$ نشان داده می‌شود [۱]. تابع مولد احتمال این توزیع عبارت است از

$$P_Y(z) = \left[\frac{\pi(1-\rho z)}{1-z(1-\pi+\rho\pi)} \right]^r \quad (۸)$$

حال اگر $Y \sim Inb(r, \pi, \rho)$ ، از (۸) می‌توان یافت که $P(Y = 0) = \pi^r$ و در نتیجه $P(Y > 0) = 1 - \pi^r$. پس اگر متغیر تصادفی Y_1 با توزیع $Inb(r, \pi, \rho)$ بریده شده در صفر را در نظر بگیریم، تابع جرم احتمال آن با رابطه زیر تعیین می‌شود.

$$P(Y_1 = y_1) = \frac{P(Y = y_1)}{1 - \pi^r}, \quad y_1 = 1, 2, \dots$$

در نتیجه تابع مولد احتمال متناظر به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} P_{Y_1}(z) &= \frac{1}{1 - \pi^r} \left[\frac{\pi^r(1-z\rho)^r}{1-z(1-\pi+\rho\pi)} - \pi^r \right] \\ &= \frac{\pi^r}{1 - \pi^r} \left[\frac{(1-t\rho)^r - [1-z(1-\pi+\rho\pi)]^r}{[1-z(1-\pi+\rho\pi)]^r} \right] \end{aligned}$$

پس با استفاده از قاعده هوییتال داریم:

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} P_{Y_1}(z) = Ln \left[\frac{1-\rho z}{1-z(1-\pi+\rho\pi)} \right] (-Ln\pi)^{-1}$$

اگر متغیر تصادفی حدی را با L نشان دهیم آنگاه

$$\begin{aligned} P_L(z) &= Ln \left[1 + \frac{(1-\pi)(1-\pi)z}{1-z(1-\pi+\rho\pi)} \right] (-Ln\pi)^{-1} \\ &= Ln \left[1 - \frac{(1-\pi)(1-\rho)z}{1-\rho z} \right] (-Ln\pi)^{-1} \quad (۹) \end{aligned}$$

تعریف ۳. متغیر تصادفی L دارای توزیع سری لگاریتمی پارامتر آماسیده با پارامترهای $\pi \in (0, 1)$ و $\rho \in (0, 1)$ است هرگاه دارای تابع مولد احتمال $P_L(t)$ در (۹) باشد. آن را با نماد $L \sim ILS(\pi, \rho)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۲. تابع جرم احتمال متغیر تصادفی L با توزیع $ILS(\pi, \rho)$ عبارت است از:

$$\begin{aligned} P(L = k) &= \sum_{k_1, k_2, \dots} \frac{(-1 + k_1 + k_2 + \dots)!}{(-Ln\pi)k_1!k_2! \dots} \\ &\times [(\pi - 1)(\rho - 1)]^{k_1 + k_2 + \dots} \rho^{k_2 + 2k_3 + \dots} \quad (۱۰) \end{aligned}$$

که در آن $k = 1, 2, \dots$ و مجموع روی اعداد صحیح نامنفی k_1, k_2, \dots انجام می‌گیرد به طوری که

$$k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \dots = k$$

اثبات: از (۹) داریم:

$$\begin{aligned} P_L(z) &= Ln[1 - (1-\pi)(1-\rho)] \\ &\times (1 + \rho z + \rho^2 z^2 + \dots) (Ln\pi)^{-1} \end{aligned}$$

پس با استفاده از بسط تیلور تابع لگاریتمی $Ln(1-x)$ داریم:

$$\begin{aligned} P_L(z) &= -(Ln\pi)^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i+1} \sum_{n_1, n_2, \dots} \binom{i+1}{n_1, n_2, \dots} \\ &\times [(\pi - 1)(\rho - 1)]^{n_1 + n_2 + \dots} \\ &\times \rho^{n_2 + 2n_3 + \dots} z^{n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \dots} \end{aligned}$$

با توجه به اینکه $n_1 + n_2 + \dots = i + 1$ با جایگذاری $n_1 = k_1, i \geq 1$ و $n_j = (j-1)k_j$ $j=2, \dots, \infty$ به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} P_L(z) &= -(Ln\pi)^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} z^k \sum_{k_1, k_2, \dots} \frac{(-1 + k_1 + k_2 + \dots)!}{k_1!k_2! \dots} \\ &\times [(\pi - 1)(\rho - 1)]^{k_1 + k_2 + \dots} \rho^{k_2 + 2k_3 + \dots} \end{aligned}$$

۴ صورت کلی و مشترک توزیع‌های خانواده سری توانی پارامتر آماسیده

با تعریف مناسب $\theta, h(\theta)$ و $a(k)$ به سادگی می‌توان دید که توابع جرم احتمال خانواده توزیع‌های پارامتر آماسیده دارای صورت مشترک زیرند:

$$p_k^* = \frac{1}{h(\theta)} \sum_{k_1, k_2} a(k) \times [\theta(1-\rho)]^{k_1+k_2} \rho^{k_2+2k_2+\dots} \quad (12)$$

که در آن $k = 0, 1, 2, \dots$ (به جز در حالت ILS که در آن $k = 1, 2, \dots$ است) و مجموع روی تمام اعداد صحیح و نامنفی k_1, k_2, \dots به طوری که $k_1 + 2k_2 + \dots = k$ (به جز در حالت ILS) که به صورت $k_1 + 2k_2 + \dots = k + 1$ است) انجام می‌پذیرد. تابع مولد احتمال مشترک این توزیع‌ها عبارت است از

$$P^*(z) = \frac{h[\theta G(z)]}{h(\theta)} \quad \theta > 0 \quad (13)$$

که در آن $G(z) = \frac{z(1-\rho)}{1-z\rho}$ تابع مولد احتمال توزیع هندسی $Ge(1-\rho)$ است. بدیهی است که در هر دو عبارت (۱۲) و (۱۳) $h(\theta)$ تابعی مثبت، متناهی و مشتق پذیر است.

تذکر ۳. هرگاه در عبارات (۱۲) و (۱۳) $\rho = 0$ قرارداد شود، به ترتیب همان عبارات متناظر خانواده کلاسیک در (۲) و (۱) حاصل می‌شوند (جدول ۲).

که همان عبارات (۱۰) را نتیجه می‌دهد.

با توجه به تعریف، قضیه زیر در مورد ارتباط توزیع‌های دو جمله‌ای منفی پارامتر آماسیده و سری لگاریتمی پارامتر آماسیده به دست می‌آید.

قضیه ۳. اگر $Y \sim Inb(\pi, \rho, r)$ ، آنگاه همگرایی زیر برقرار است:

$$\lim_{r \rightarrow 0} P(Y = y | Y \geq 1) = P(L = y)$$

که در آن $L \sim ILS(\pi, \rho)$

اثبات: با توجه به اینکه $1 - \pi^2 = P(Y \geq 1)$ ، داریم:

$$\begin{aligned} P(Y = y | Y \geq 1) &= \frac{P(Y = y, Y \geq 1)}{P(Y \geq 1)} \\ &= \frac{P(Y = y, Y \geq 1)}{1 - \pi^r} \end{aligned}$$

لذا، با استفاده از رابطه (۶) داریم:

$$\begin{aligned} P(Y = y | Y \geq 1) &= \frac{\pi^r}{1 - \pi^r} \\ &\times \sum_{y_1, y_2, \dots} \binom{y_1 + y_2 + \dots + r - 1}{y_1, y_2, \dots, r-1} \\ &\times [(\pi - 1)(1 - \rho)]^{y_1 + y_2 + \dots} \rho^{y_2 + 2y_2 + \dots} \\ &= \frac{r\pi^r}{1 - \pi^r} \sum_{y_1, y_2, \dots} \frac{(y_1 + y_2 + \dots + r - 1) \dots (r + 2)(r + 1)}{y_1! y_2! \dots} \\ &\times [(\pi - 1)(1 - \rho)]^{y_1 + y_2 + \dots} \rho^{y_2 + 2y_2 + \dots} \end{aligned}$$

پس چون بنابر قانون هوییتال

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{r\pi^r}{1 - \pi^r} = -(Ln\pi)^{-1}$$

به $\lim_{r \rightarrow 0} P(Y = Y | Y \geq 1)$ تابع جرم احتمال

$P(L = Y)$ توزیع سری لگاریتمی پارامتر آماسیده (۸)

همگراست.

میانگین و واریانس متغیر تصادفی $L \sim ILS(\pi, \rho)$

عبارتند از:

$$E(L) = \frac{-(1-\pi)}{\pi(1-\rho)Ln\pi} \quad (11)$$

$$Var(L) = \frac{-(1-\pi)[Ln\pi(1+\pi\rho) + 1 - \pi]}{\pi^2(1-\rho)^2(Ln\pi)^2}$$

برازش می‌دهیم. برای این کار مقدار مجهول پارامتر λ را به روش گشتاوری برآورد می‌کنیم: $\hat{\lambda} = \bar{X} = 0/13174$. لذا نتایج جدول ۴ بدست خواهد آمد.

پس چون مقدار مشاهده‌ای آماره χ^2 از هر مقدار جدولی بزرگتر است، فرض پوآسون بودن توزیع داده‌ها قویاً رد می‌شود (مثلاً $16/7496 = \chi^2_{0/05}(5)$). اما برای حالت پوآسون پارامتر آماسیده $IPo(\lambda, \rho)$ برآوردهای گشتاوری پارامترهای λ و ρ عبارتند از:

$$\hat{\lambda} = \frac{2\bar{X}^2}{S^2 + \bar{X}} = \frac{2(0/13174)^2}{0/13852 + 0/13174} = 0/12843$$

$$\hat{\rho} = \frac{S^2 - \bar{X}}{S^2 + \bar{X}} = \frac{0/13852 - 0/13174}{0/13852 + 0/13174} = 0/0251$$

لذا جدول محاسبات مربوط به برازش توزیع پوآسون پارامتر آماسیده به داده‌های مذکور به صورت جدول (۵) خواهد بود.

با توجه به مقدار مشاهده‌ای آماره $\chi^2 = 13/6$ و مقایسه آن با $14/8602 = \chi^2_{0/05}(4)$ ، توزیع پوآسون پارامتر آماسیده در سطح معنی دار $\alpha = 0/05$ بر داده‌ها برازش دارد.

تذکر ۴. باید توجه داشت که پارامتر θ تابع $h(\theta)$ در صورت‌های مشترک دو خانواده توزیع‌های سری توانی کلاسیک و پارامتر آماسیده دقیقاً یکسانند و تنها توابع $a(k)$ آنها متفاوتند. همچنین خاطر نشان می‌کنیم که توزیع‌های پارامتر آماسیده خانواده سری توانی از جهات متعددی شبیه توزیع‌های کلاسیک متناظر عمل می‌کنند. برای نمونه می‌توان دید که هرگاه در $IPo(\lambda, \rho)$ پارامتر λ خود متغیری تصادفی با توزیع $\gamma(r, \beta)$ باشد توزیع $Inb(r, \frac{\beta}{1+\beta}, \rho)$ است ([۲] و [۴])

تذکر ۵. به سادگی از طریق توابع مولد احتمال (۱) و (۱۳) می‌توان دید که نسبت واریانس به میانگین در توزیع‌های سری توانی پارامتر آماسیده نسبت به حالت کلاسیک متناظر بزرگتر است. به عبارت دیگر، هرگاه $\rho \in (0, 1)$ باشد، خانواده جدید دارای پراکنش بیشتری می‌باشند.

۵ کاربرد

در این بخش گروهی داده مربوط به تعداد ادعاهای خسارت موتوری (صفر، یک، دو، ..) براساس ۴۲۱۲۴۰ سند (تعداد عبارتند از بیمه شدگان) را که در جدول ۳ رده بندی شده‌اند در نظر می‌گیریم.

حال توزیع پوآسون کلاسیک $Po(\lambda)$ را بر این داده‌ها

جدول ۱

S	p_k	نماد توزیع	نام توزیع
$k = 0, 1$	$\pi^k (1 - \pi)^{1-k}$	$Be(\pi)$	برنولی
$k = 0, 1, \dots, n$	$\binom{n}{k} \pi^k (1 - \pi)^{n-k}$	$bin(n, \pi)$	دوجمله‌ای
$k = 0, 1, 2, \dots$	$\pi (1 - \pi)^k$	$Ge(\pi)$	هندسی
$k = 0, 1, 2, \dots$	$\binom{r+k-1}{k} \pi^r (1 - \pi)^k$	$nb(r, \pi)$	دوجمله‌ای منفی
$k = 0, 1, 2, \dots$	$e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$	$Po(\lambda)$	پوآسون
$k = 0, 1, 2, \dots$	$\pi^k [kLn(1 - \pi)]^{-1}$	$LS(\pi)$	سری لگاریتمی
$P(z)$	$A(k)$	$h(\theta)$	θ
$(1 - \pi) + \pi z$	1	$1 + \theta$	$\frac{\pi}{1-\pi}; 0 < \pi < 1$
$[(1 - \pi) + \pi z]^n$	$\binom{n}{k}$	$(1 + \theta)^n$	$\frac{\pi}{1-\pi}$
$\pi [(1 - (1 - \pi)z)]^{-1}$	1	$(1 - \theta)^{-1}$	$1 - \pi$
$\pi^r [1 - (1 - \pi)z]^{-r}$	$\binom{k+r-1}{k}$	$(1 - \theta)^{-r}$	$1 - \pi$
$e^{\lambda(z-1)}$	$1/k!$	e^θ	$\lambda; \lambda > 0$
$Ln(1 - \pi z)^{-1} Ln^{-1}(1 - \pi)$	$1/k$	$-Ln(1 - \theta)$	π

جدول ۲

$A(k)$	$h(\theta)$	θ	S	نماد توزیع	نام توزیع
$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, n - \sum k_i}$	$(1 - \theta)^n$	$\frac{\pi}{1-\pi}$	$0, 1, 2, \dots$	$Ibin(n, \pi, \rho)$	دوجمله‌ای
$\binom{k+k_2+\dots+r-1}{k_1, k_2, \dots, r-1}$	$-Ln(1 - \theta)^r$	$1 - \pi$	$0, 1, 2, \dots$	$Inb(r, \pi, \rho)$	دوجمله‌ای منفی
$\frac{1}{k_1! k_2! \dots}$	e^θ	λ	$0, 1, 2, \dots$	$IPO(\lambda, \rho)$	پوآسون
$\frac{(-1+k_1+k_2+\dots)}{k_1! k_2! \dots}$	$-Ln(1 - \theta)$	$1 - \pi$	$1, 2, \dots$	$ILS(\pi, \rho)$	سری لگاریتمی

جدول ۳

k : تعداد خسارات درخواستی	۰	۱	۲	۳	۴	۵	≥ 6
O_k : فراوانی مشاهده شده	۳۷۰۴۱۲	۴۶۵۴۵	۳۹۳۵	۳۱۷	۲۸	۳	۰

جدول ۴

k	O_k	π_k	e_k	$(e_k - O_k)^2 / e_k$
۰	۳۷۰۴۱۲	۰/۸۷۹	۳۶۹۲۴۶/۸۸	۳/۶۷
۱	۴۶۵۴۵	۰/۱۱۵	۴۸۶۴۳/۵۷	۹۰/۶۱
۲	۳۹۳۵	۶/۷ * ۱۰ ^{-۳}	۳۲۰۴/۰۹	۱۶۶/۶۷
۳	۳۱۷	۳/۳ * ۱۰ ^{-۴}	۱۴۰/۷	۲۲۰/۹۰
۴	۲۸	۱۰ ^{-۵}	۴/۶۳	۱۱۷/۹۶
۵	۳	۲/۸ * ۱۰ ^{-۷}	۰/۱۲	۶۹/۱۲
≥ 6	۰	۰/۲ * ۱۰ ^{-۷}	۰/۰۱	۰/۰۱
کل	۴۲۱۲۴۰	۱	۴۲۱۲۴۰	$\chi^2 = ۶۶۷/۵۲$

جدول ۵

k	O_k	π_k	e_k	$(e_k - O_k)^2 / e_k$
۰	۳۷۰۴۱۲	۰/۸۷۹	۳۷۰۴۶۹/۹۳	۰/۰۰۹
۱	۴۶۵۴۵	۰/۱۱	۴۶۳۸۵/۳	۰/۵۶
۲	۳۹۳۵	۹/۶ * ۱۰ ^{-۳}	۴۰۶۸/۲۱	۴/۳۶
۳	۳۱۷	۷ * ۱۰ ^{-۴}	۲۹۶/۲	۱/۵
۴	۲۸	۴/۴ * ۱۰ ^{-۵}	۱۹/۱۴	۴/۱
۵	۳	۲/۶ * ۱۰ ^{-۶}	۱/۱۳	۳/۱
≥ ۶	۰	۱/۶ * ۱۰ ^{-۷}	۰/۰۷	۰/۰۷
کل	۴۲۱۲۴۰	۱	۴۲۱۲۴۰	$\chi^2 = ۱۳/۶$

مراجع

- [۱] مومنی، ف. و علامت ساز، م. ح.، ۱۳۸۴، توزیع‌های دو جمله‌ای منفی و پوآسون پارامتر آماسیده، اندیشه آماری، سال دهم، شماره ۲، ۱۹-۱۴.
- [۲] مومنی، ف.، ۱۳۸۲، تعمیم توزیع‌های گسسته کلاسیک، پایان نامه کارشناسی ارشد آمار، دانشگاه اصفهان.
- [3] Bowers, N.L., Gerber, H.V., Hickman, J.C, Sones, D.A. and Nesbitt, C.J. ,1979, *Actuarial Mathematics*, 2nded. Schaumburg, III:Society of Actuaries.
- [4] Grandal, J.,1997, *Mixed Poisson Processes*, Chapman and Hall, London.
- [5] Klove, N., Minkova,L. and Neytchev, P.,2000,Inflated - Parameter Family of Generalized Power Seriesdistributions and their applications in Analysis of Overdispersed Insurance Data. *ARCH, Research Clearing House*,2.
- [6] Minkova, L.,2002, A Generalization of the Classical Discrete Distributions, *Comm. Statists: Theory and Methods*, 31, 6.
- [7] Minkova, L.,2001, A Family of Compound Discrete Distributions. *Compt. Rendue Bulg . Acad. Aci*, 54, 2.
- [8] Rolski, T., Schmidli, H., Schmidli, V. and Teugels,J., 1999, *Stochastic Processes for Insurance and Finace*, John Wiely and Sons, Chichester.
- [9] Winkelmann, R.,2002,*Econometric Analysis of Count Data*, 3rd.ed. Springer Verlag; Berlin.