

توزیع نیمه لجستیک^۱

اکبر اصغرزاده^۲، صدیقه رحیم پور^۳

چکیده:

در این مقاله، ابتدا توزیع نیمه لجستیک معرفی و در ادامه گشتاورها، ضرایب چولگی و کشیدگی این توزیع محاسبه می‌شوند. روش ماکزیمم درست‌نمایی، جواب صریحی را برای برآورد پارامتر مقیاس این توزیع در اختیار ما قرار نمی‌دهد. با تقریب معادله درست‌نمایی، یک جواب تقریبی برای MLE ارائه داده و کارایی آنها به کمک شبیه‌سازی بررسی می‌شود.

واژه‌های کلیدی: توزیع نیمه لجستیک، ضریب چولگی، برآورد MLE، برآورد گشتاوری.

۱ مقدمه

استاندارد با تابع چگالی

$$f(x) = \frac{2e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} \quad x \geq 0$$

و تابع توزیع

$$F(x) = \frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}} \quad x \geq 0$$

خواهد بود. نمودارهای $f(x)$ و $F(x)$ به ترتیب در شکل‌های ۱ و ۲ رسم شده‌اند. همانطوریکه مشاهده می‌شود $f(x)$ یک تابع اکیداً نزولی از x با یک دنباله طولانی به سمت راست می‌باشد.

همچنین تابع خطر^۵ این توزیع یعنی

$$h(x) = \frac{f(x)}{1-F(x)} = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

یک تابع اکیداً صعودی از x بوده و هنگامی که $x \rightarrow \infty$ ، به یک نزدیک می‌شود. بنابراین این توزیع دارای نرخ

توزیع نیمه لجستیک، یک توزیع مهم و شناخته شده در آزمون طول عمر^۳ و قابلیت اعتماد^۴ می‌باشد. فرض کنید متغیر تصادفی y ، زمان شکست یک قطعه، دارای توزیع نیمه لجستیک با تابع چگالی

$$g(y, \mu, \sigma) = \frac{2e^{-\frac{y-\mu}{\sigma}}}{\sigma(1+e^{-\frac{y-\mu}{\sigma}})^2} \quad y \geq \mu$$

و تابع توزیع

$$G(y, \mu, \sigma) = \frac{2e^{-\frac{y-\mu}{\sigma}}}{\sigma(1+e^{-\frac{y-\mu}{\sigma}})^2} \quad y \geq \mu$$

باشد که $\mu \in \mathbb{R}$ یک پارامتر مکان و $\sigma > 0$ یک پارامتر مقیاس می‌باشد [۲ و ۴].

اگر متغیر تصادفی X را به صورت $X = (Y - \mu)/\sigma$ در نظر بگیریم، در آن صورت x دارای توزیع نیمه لجستیک

^۱ Half-logistic distribution
^۲ دانشگاه مازندران
^۳ Life time-testing
^۴ Reliability
^۵ Hazard function

خطر صعودی است. یعنی با افزایش زمان، قطعه خراب شده و از بین می‌رود. بر این اساس توزیع نیمه لجستیک می‌تواند به عنوان یک مدل طول عمر در آزمون‌های طول عمر بکار رود [۴]. شکل ۳ نمودار تابع خطر $h(x)$ را نشان می‌دهد.

۲ گشتاورها، ضرایب چولگی و کشیدگی

گشتاور مرتبه اول توزیع نیمه لجستیک با یک انتگرال ساده به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} E(X) &= 2 \int_0^{\infty} \frac{x e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx \\ &= 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 \ln \frac{u}{1-u} du \quad (u = (1+e^{-x})^{-1}) \\ &= 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 [\ln u - \ln(1-u)] du = 2 \ln 2 \end{aligned}$$

برای پیدا کردن گشتاورهای بالاتر به صورت زیر اقدام می‌شود. از بسط

$$(1+x)^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-2}{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^n$$

گشتاورهای زوج x می‌شود: برای $(m = 1, 2, 3, \dots)$

$$\begin{aligned} E(X^{2m}) &= \int_0^{\infty} x^{2m} \frac{2e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx \\ &= 2 \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) (e^{-x})^n x^{2m} e^{-x} dx \\ &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) \int_0^{\infty} x^{2m} e^{-(n+1)x} dx \\ &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) \frac{\Gamma(2m+1)}{(n+1)^{2m+1}} \\ &= 2(2m)! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{2m}} \end{aligned}$$

Riemann Zeta-function^۶

$$\begin{aligned} E(X^{2m}) &= 2(2m)! \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2k-2}}{(2k-1)^{2m}} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2k-1}}{(2k)^{2m}} \right\} \\ &= 2(2m)! \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2m} - 2^{-(1-2m)} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2m} \right\} \\ &= 2(2m)! (1 - 2^{-(2m-1)}) \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2m} \\ &= 2(2m)! (1 - 2^{-(2m-1)}) \eta(2m). \end{aligned}$$

که در آن $\eta(s)$ تابع زتای ریمان^۶ بوده که به صورت زیر تعریف می‌شود [۱]:

$$\eta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \quad s > 1$$

با توجه به مقادیر شناخته شده

$$\eta(4) = \frac{\pi^4}{90} \quad \eta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

نتیجه می‌شود که

$$E(X^2) = 2\eta(2) = \frac{\pi^2}{3} \quad E(X^4) = 42\eta(4) = \frac{7\pi^4}{15}$$

گشتاورهای فرد بطور مشابه بصورت زیر بدست می‌آیند:

$$E(X^{2m+1}) = 2(2m+1)! (1 - 2^{-2m}) \eta(2m+1)$$

$$m = 1, 2, 3, \dots$$

در حالت خاص نتیجه می‌شود:

$$E(X^3) = 2(3!) (1 - 2^{-2}) \eta(3) = 9\eta(3) \cong 10/8$$

گشتاور مرکزی مرتبه n توزیع نیمه لجستیک عبارت است از:

ذکر این نکته ضروری است که گشتاورهای فوق را می‌توان از روی تابع مولد گشتاور نیز محاسبه کرد. تابع مولد گشتاور عبارت است از:

$$\beta_n = E(X - E(X))^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} E(X^k) [-E(X)]^{n-k}$$

در حالت خاص داریم:

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \int_0^{\infty} \frac{2e^{tx}e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx \\ &= 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 u^t (1-u)^{-t} du \quad (u = (1+e^{-x})^{-1}) \\ &= 2 \left\{ \int_0^1 u^t (1-u)^{-t} du - \int_0^{\frac{1}{2}} u^t (1-u)^{-t} du \right\} \\ &= 2\Gamma(1+t)\Gamma(1-t) - 2B\left(\frac{1}{2}, 1+t, 1-t\right) \end{aligned}$$

$$\beta_2 = \sigma^2 = \frac{\pi^2}{3} - (\ln 4)^2$$

$$\beta_3 = \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} E(X^k) (-\ln 4)^{3-k} \cong 2/446$$

که در آن $B(x, \alpha, \beta)$ تابع بتای ناقص بوده وبصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\beta_4 = \sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} (-\ln 4)^{4-k} E(X^k) \cong 12/425$$

$$B(x, \alpha, \beta) = \int_0^x t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt$$

از گشتاورهای مرکزی فوق می‌توان ضرایب چولگی و کشیدگی را محاسبه کرد.

ضریب چولگی^۷ برابر است با:

۳ ارتباط با دیگر توزیع‌ها

در این بخش ارتباط توزیع نیمه لجستیک استاندارد با برخی دیگر از توزیع‌ها مطالعه می‌شود.

$$\gamma_1 = \frac{\beta_3}{\sigma^3} = \frac{\beta_3}{(\beta_2)^{\frac{3}{2}}} \cong 1/529$$

بر این اساس توزیع نیمه لجستیک یک توزیع چوله به راست می‌باشد.

همچنین ضریب کشیدگی^۸ می‌شود:

۱.۳ ارتباط با توزیع یکنواخت

اگر متغیر تصادفی V دارای توزیع نیمه لجستیک استاندارد باشد، در آن صورت به کمک قضیه تبدیل انتگرال احتمال، می‌توان نشان داد که

$$\gamma_2 = \frac{\beta_4}{\sigma^4} = \frac{\beta_4}{(\beta_2)^2} \cong 6/638$$

ولذا توزیع نیمه لجستیک در مقایسه با توزیع نرمال استاندارد کشیده‌تر یا به عبارتی تیزتر می‌باشد. در شکل ۴ دو تابع چگالی نرمال استاندارد و تابع چگالی نیمه لجستیک استاندارد باهم رسم شده‌اند، که حقایق فوق آشکارا دیده می‌شود.

$$U = \frac{2}{1+e^V}$$

دارای توزیع یکنواخت $U(0, 1)$ می‌باشد.

Skewness coefficient^۷
Kortusis coefficient^۸

۲.۳ ارتباط با توزیع گاما

اگر متغیر تصادفی V دارای توزیع نیمه لجستیک استاندارد باشد، در آن صورت به سادگی می توان نشان داد که

$$T = \ln\left(\frac{1+e^V}{2}\right)^\theta$$

دارای توزیع گاما با پارامترهای $\alpha = 1$ و $\beta = \theta$ می باشد. در حالت خاص $\theta = 2$ ، V دارای توزیع کای دو با دو درجه آزادی یا توزیع نمایی با میانگین دو خواهد بود.

۳.۳ ارتباط با توزیع وایبل

اگر متغیر تصادفی V دارای توزیع نیمه لجستیک استاندارد باشد، در آن صورت تابع چگالی

$$W = \left[\ln\left(\frac{1+e^V}{2}\right)^\theta\right]^{-\frac{1}{\theta}}$$

عبارت است از:

$$f(w) = \frac{\alpha}{\theta} w^{\alpha-1} e^{-\frac{w^\alpha}{\theta}}$$

یعنی W دارای توزیع وایبل با پارامترهای α و $\frac{1}{\theta}$ است. با توجه به ارتباط توزیع وایبل و رایلی، در حالت خاص $\theta = 2$ ، توزیع رایلی با چگالی زیر بدست می آید:

$$f(w) = \frac{2}{\theta} w e^{-\frac{w^2}{\theta}}$$

۴ برآورد پارامترها

فرض کنید y_1, y_2, \dots, y_n یک نمونه تصادفی از توزیع نیمه لجستیک با پارامترهای σ و μ باشد. برای برآورد پارامترهای σ و μ از چندین روش استفاده می کنیم:

۱.۴ روش گشتاوری

با توجه به اینکه متغیر تصادفی $X = (Y - \mu)/\sigma$ دارای توزیع نیمه لجستیک استاندارد می باشد، گشتاورهای اول و دوم y را می توان بصورت زیر محاسبه کرد:

$$E(Y) = \mu + \sigma E(X) = \mu + \sigma \ln 4$$

$$E(Y^2) = E(\mu + \sigma X)^2 = \mu^2 + 2\mu\sigma \ln 4 + \frac{\sigma^2 \pi^2}{3}$$

از حل دستگاه معادلات

$$E(Y) = \bar{y}, \quad E(Y^2) = \bar{y}^2$$

برآوردهای گشتاوری μ, σ بصورت زیر بدست می آیند:

$$\tilde{\mu} = \bar{y} - \ln 4 \sqrt{\frac{\bar{y}^2 - \bar{y}^2}{\frac{\pi^2}{3} - (\ln 4)^2}}, \quad \tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{\bar{y}^2 - \bar{y}^2}{\frac{\pi^2}{3} - (\ln 4)^2}}$$

۲.۴ روش ماکزیمم درستنمایی

تابع درستنمایی نمونه عبارت است از:

$$L(\mu, \sigma) = 2^n \sigma^{-n} e^{-\frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n (y_i - \mu)} \prod_{i=1}^n (1 + e^{-\frac{y_i - \mu}{\sigma}})^{-2} \quad \mu \leq y_{(1)}$$

که $y_{(1)} = \min(y_1, y_2, \dots, y_n)$ کوچکترین عنصر نمونه است. با توجه به اینکه $L(\mu, \sigma)$ یک تابع اکیداً صعودی از μ است لذا برآورد ماکزیمم درستنمایی (MLE) μ عبارت است از:

$$\hat{\mu} = y_{(1)}$$

معادله درست‌نمایی فوق بخاطر حضور جمله $F(x_i)$ جواب صریحی را برای σ به دست نمی‌دهد. با بسط تیلور $F(x_i)$ حول نقطه $\ln 4 = E(X_i)$ می‌توان این جمله را تقریب زده و لذا معادله را حل کرد. برای مطالعه بیشتر روی روش تقریبی MLE، می‌توان به مراجع [۳ و ۴ و ۵] مراجعه کرد. از بسط تیلور $F(x_i)$ حول $\ln 4$ و نگه داشتن دو جمله اول آن داریم:

$$F(x_i) \cong F(\ln 4) + (x_i - \ln 4)f(\ln 4) = \alpha + \beta x_i$$

که در آن

$$\alpha = F(\ln 4) - \ln 4 f(\ln 4) = \frac{3}{5} - \frac{1}{45} \ln 4$$

$$\beta = f(\ln 4) = \frac{1}{25}$$

از تقریب فوق، معادله ماکزیمم درست‌نمایی را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \sigma} \ell(\hat{\mu}, \sigma) &= \frac{-n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n x_i (\alpha + \beta x_i) \\ &= \frac{-n}{\sigma} + \frac{\alpha}{\sigma} \sum_{i=1}^n x_i + \frac{\beta}{\sigma} \sum_{i=1}^n x_i^2 \\ &= \frac{-n}{\sigma} + \frac{\alpha}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i - y_{(1)}) \\ &\quad + \frac{\beta}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i - y_{(1)})^2 \end{aligned}$$

از معادله فوق، چند جمله‌ای درجه دو زیر برحسب σ بدست می‌آید:

$$n\sigma^2 - \alpha \sum_{i=1}^n (y_i - y_{(1)})\sigma - \beta \sum_{i=1}^n (y_i - y_{(1)})^2 = 0$$

با جایگذاری $\hat{\mu}$ به جای μ و مشتق‌گیری از لگاریتم تابع درست‌نمایی داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \sigma} \log L(\hat{\mu}, \sigma) &= \frac{-n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\mu}) \\ &\quad - \frac{2}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \hat{\mu}) e^{-\frac{(y_i - \hat{\mu})}{\sigma}}}{1 + e^{-\frac{(y_i - \hat{\mu})}{\sigma}}} \end{aligned}$$

که جواب صریحی برای σ به دست نمی‌آید. بنابراین برای پیدا کردن MLE برای σ ، باید از روش‌های عددی استفاده کرد.

۳.۴ تقریبی ماکزیمم درست‌نمایی

همانطوریکه مشاهده شد، روش ماکزیمم درست‌نمایی، جواب صریحی را برای σ به دست نمی‌دهد. در اینجا یک روش ساده برای پیدا کردن برآورد MLE تقریبی، با تقریب تابع درست‌نمایی ماکزیمم ارائه می‌شود. از تبدیل $x = (y - \mu)/\sigma$ می‌توان تابع چگالی توزیع نیمه لجستیک را بصورت زیر نوشت:

$$g(y, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma} f(x)$$

که در آن $f(x)$ تابع چگالی توزیع نیمه لجستیک استاندارد است. با توجه به این تابع درست‌نمایی نمونه می‌شود:

$$L(\hat{\mu}, \sigma) = \prod_{i=1}^n g(y_i, \hat{\mu}, \sigma) = \sigma^{-n} \prod_{i=1}^n f(x_i)$$

لگاریتم تابع درست‌نمایی می‌شود:

$$\ell(\hat{\mu}, \sigma) = -n \ln \sigma + \sum_{i=1}^n \ln f(x_i) \quad (1)$$

با مشتق‌گیری نسبت به σ خواهیم داشت:

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \ell(\hat{\mu}, \sigma) = \frac{-n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n x_i F(x_i)$$

از حل معادله فوق برآورد MLE برای σ ، بصورت زیر حاصل می‌شود:

$$A = 15, \quad B = 2/9134, \quad C = 12/4670$$

$$\hat{\sigma} = \frac{B + \sqrt{B^2 + 4AC}}{2A} = 1/0.139$$

$$\hat{\sigma} = \frac{B + \sqrt{B^2 + 4AC}}{2A} \quad (2)$$

که در آن

$$A = n, \quad B = \alpha \sum_{i=1}^n (y_i - y_{(1)})$$

$$C = \beta \sum_{i=1}^n (y_i - y_{(1)})^2$$

ذکر این نکته ضروری است که معادله درجه دوم فوق دو ریشه دارد که یکی از آنها قابل قبول نیست چون $C > 0$ است.

برآورد MLE تقریبی که برای σ ارائه شده است، می‌تواند مقدار اولیه خوبی برای حل تکراری معادله درست‌نمایی (۱) به روش‌های آنالیز عددی باشد.

۲.۵ شبیه سازی

به منظور مقایسه روش تقریبی MLE با روش گشتاوری یک مطالعه شبیه سازی ارائه می‌شود. به روش مونت کارلو، نمونه‌های به اندازه n ($n = 3, 5, 7, 10$) از توزیع نیمه لجستیک استاندارد تولید شده‌اند. برای هر کدام از این نمونه‌ها، برآوردهای MLE تقریبی و گشتاوری σ بدست آمده است. جدول ۱ معدل MSE برآوردها را بر اساس ۱۰۰۰۰ بار شبیه سازی نشان می‌دهد.

جدول ۱: MSE برآوردها

n	۳	۵	۷	۱۰
$MSE(\hat{\sigma})$	۰/۳۰۷۵	۰/۱۹۷۱	۰/۱۴۹۰	۰/۱۱۱۴
$MSE(\hat{\sigma})$	۰/۲۴۹۰	۰/۱۷۴۴	۰/۱۳۲۷	۰/۱۰۰۶

از جدول ۱، مشاهده می‌کنیم که روش تقریبی MLE در مقایسه با روش گشتاوری کارتر می‌باشد. از این رو برآورد MLE تقریبی که برای σ ارائه شده است، می‌تواند مقدار اولیه خوبی برای حل تکراری معادله درست‌نمایی (۱) به روش‌های آنالیز عددی باشد. همچنین مشاهده می‌شود که با افزایش اندازه نمونه، مقادیر MSE کاهش پیدا می‌کند.

برای انجام شبیه سازی و محاسبه مقادیر جدول ۱، از بسته آماری SPLUS استفاده شده است که برنامه مربوطه در زیر آمده است:

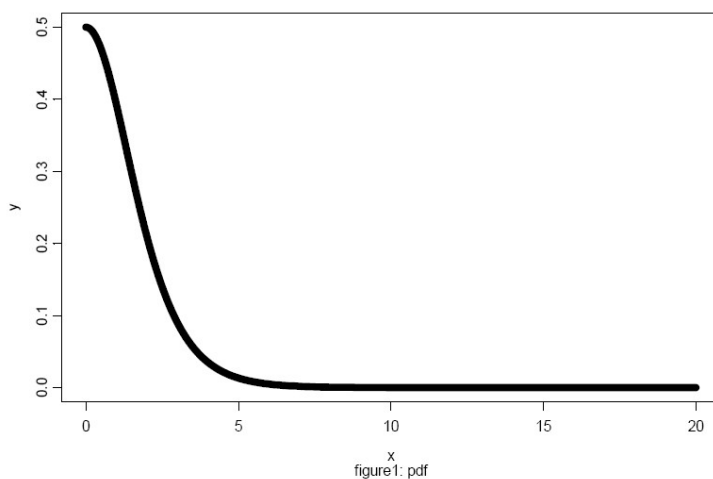
```
simul4-function(n) { # This program obtain MSE
the moment and approximate of sigma # based on
```

در این بخش، به منظور بحث و مقایسه روش‌های برآورد، یک مثال عددی و یک مطالعه شبیه سازی ارائه می‌شود.

۱.۵ مثال عددی

با استفاده از روش مونت کارلو، نمونه‌های به اندازه ۱۵ از توزیع نیمه لجستیک استاندارد تولید شده‌اند. این نمونه‌ها عبارتند از:

```
3.6847 0.4411 3.2591 0.2064 0.8243 1.94267
0.2281 0.8848 1.6586 1.5525 0.4979 0.0795
1.0578 1.2764 1.0354
```



شکل ۱: تابع چگالی نیمه لجستیک

```

C<-(8/25)*sum((x2)
sigma[i] < -(B + sqrt((B2)+(4*A*C)))/(2*A)
m[i]_(sigma[i]-1)2
gsigma[i]_sqrt((mean((x2))-((mean(x))2))/((3.14
2)/3-((log(4)) 2)))
gm[i]_(gsigma[i]-1) 2
}
ms_mean(m)
gms_mean(gm)
t_list(ms=ms,gms=gms)
}
10000 simulated random samples in the standard
# # half logistic dist.
m_matrix(0,10000,1)
gm_matrix(0,10000,1)
sigma_matrix(0,10000,1)
gsigma_matrix(0,10000,1)
for(i in 1:10000) {
u_runif(n)
x_log((1+u)/(1-u))
A_n
B_((3/5)-((8/25)*(log(4))))*sum(x)

```

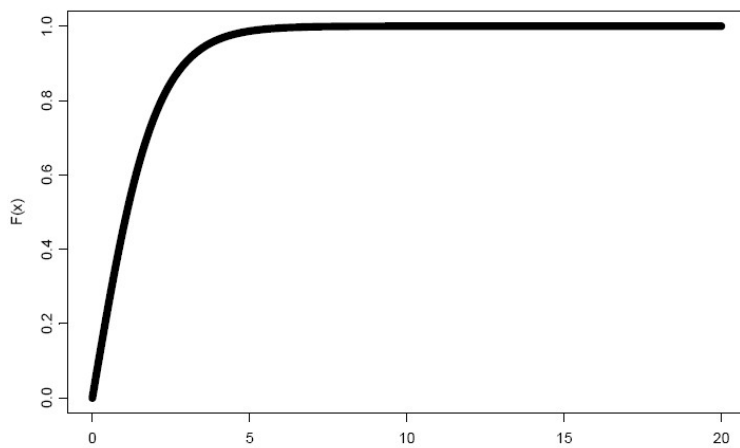


Figure2. Half-Logistic cdf

شکل ۲: تابع توزیع تجمعی نیمه لجستیک

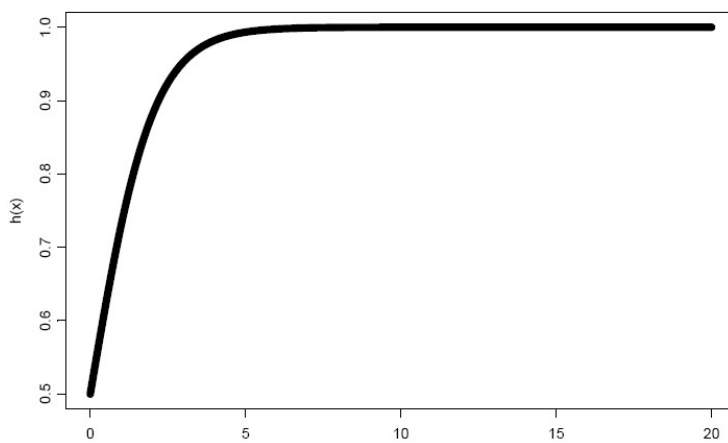
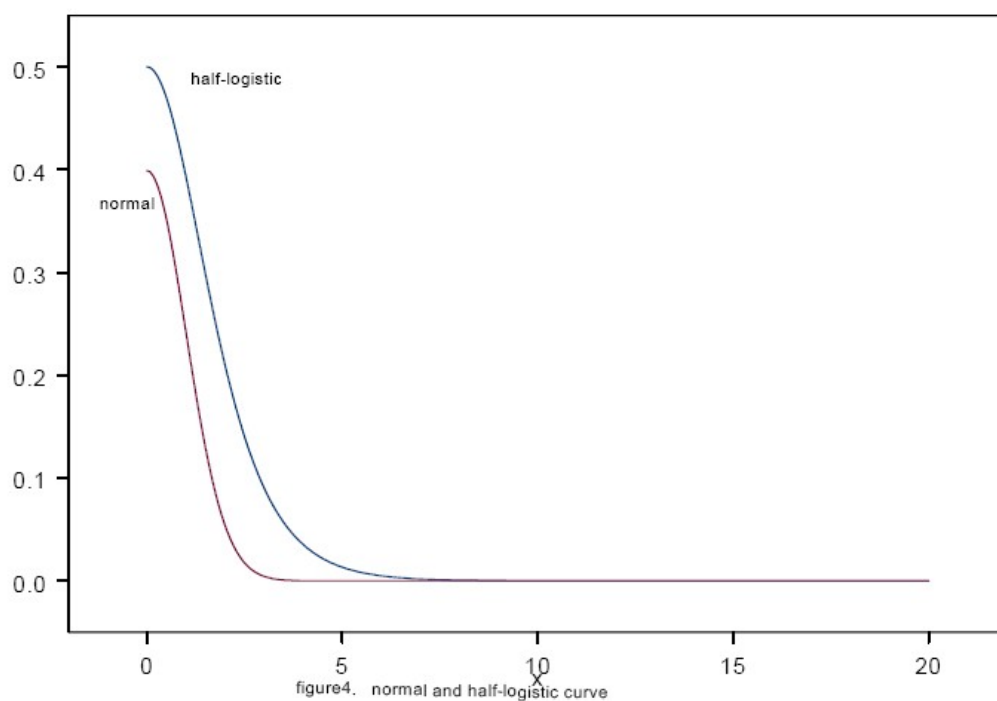


Figure3. Half-Logistic Hazard Rate

شکل ۳: نمودار تابع خطر $h(x)$



شکل ۴: تابع چگالی نرمال استاندارد و نیمه لجستیک استاندارد

مراجع

- [1] Balakrishnan, N and Nevzorov, V. B. ,1993, *A Primer on Statistical Distributions*, John Wiley & Sons, New York.
- [2] Balakrishnan, N ,1992, *Handbook of the logistic distribution*, Marcel Dekker, New York.
- [3] Balakrishnan, N and Cohen ,1991, *Order Statistics and Inference: Estimation Methods*, Academic Press, San Diego.
- [4] Balakrishnan, N , Wong, K. H. T. ,1991, Approximate MLE's for the location and scale parameters of the half logistic distribution with Type-II right censoring, *IEEE Trans. On Reliab.* 40, 140-145.
- [5] Tiku, M. L., Tan, W. Y., Balakrishnan, N. ,1986, *Robust Inference*, Marcel Dekker, New York.