

برآورد پارامترهای توزیع نرمال بر اساس مشاهدات رکوردی

جعفر احمدی^۱ مهدی دوست پرست^۲

چکیده

فرض کنید X_1, X_2, \dots, X_n یک دنباله از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با تابع توزیع F باشند. X را یک رکورد بالا (پایین) گوئیم هرگاه از تمام مشاهدات قبل از خود بزرگتر (کوچکتر) باشد. در این مقاله، فرض شده است که F متعلق به یک خانواده مکانی - مقیاسی است. بر اساس مشاهدات رکوردی، برآوردگرهایی برای پارامترهای این خانواده به دست می‌آوریم. برای به دست آوردن برآوردگرهای درست‌نمایی ماکسیم، نیاز به حل دستگاه معادلات غیرخطی داریم. در اینجا حالت خاص نرمال بودن توزیع جامعه را در نظر می‌گیریم و با استفاده از روشهای آنالیز عددی، برآوردگرهای درست‌نمایی ماکسیم را برای پارامترهای توزیع نرمال محاسبه می‌کنیم. همچنین با استفاده از معیار کمترین توانهای دوم خطا، بهترین برآوردگرهای خطی ناریب را بر اساس مشاهدات رکوردی برای پارامترهای توزیع نرمال به دست می‌آوریم. کلمات کلیدی: روش نیوتن-رافسن، دستگاه معادلات غیرخطی، رکورد بالا (پایین)، خانواده توزیعهای مکانی - مقیاسی برآوردگر درست‌نمایی ماکسیم، بهترین برآوردگر خطی ناریب.

۱. مقدمه

نظریه رکوردها شاخه‌ای نسبتاً جدید می‌باشد و در چند دهه اخیر رشد اصلی خود را کرده است. این نظریه، علاوه بر ویژگیهای مهم تئوری دارای کاربردهای خاص عملی است. تغییرات جوی، بعضی از مسائل گرافیک، پیشامدهای طبیعی مانند باد و مسائل مربوط به تعیین مقاومت مصالح و محاسبه احتمال کارافت و ... از جمله کاربردهای مهم آن می‌باشد.

تحقیق بر اساس رکوردها تا کنون مورد توجه محققین بسیاری واقع شده است. شاید بتوان گفت چندلر^۳ به طور برجسته‌ای مطالعه مقادیر رکورد را شروع کرد و رزینیک^۴ [۱۳] و شروک^۵ [۱۴]، نظریه مجانبی

رکوردها را تکمیل کردند. بعدها، نظرات جالبی برای نسبت دادن مقادیر رکورد با فرایندهای فرین معین معرفی شد. گلیک^۱ [۱۱] با استفاده از عنوان فریبنده "شکستن رکوردها و شکستن مرزها" تحقیقات بیست و پنج ساله اول را جمع‌آوری کرد. در سالهای اخیر استنباط آماری بر اساس رکوردها نیز مورد توجه قرار گرفته است که می‌توان به کارلین و گلگند^۷ [۸]، فیوروری و هال^۸ [۱۰]، گاتی و پادجت^۹ [۱۲]، احمدی [۱] و احمدی و ارقامی [۳ و ۲] مراجعه کرد. احمدی و ارقامی [۲] با ارائه نظریه اطلاع فیشر بر اساس رکوردها، نشان دادند که در بعضی موارد، رکوردها بسیار مناسب‌تر از مشاهدات عمل می‌کنند. در بخش ۲ این مقاله، تعاریف و نمادهای پایه‌ای را ارائه می‌دهیم.

^۱ Glick

^۲ Carlin and Gelfand

^۳ Feuerverger and Hall

^۴ Gult and Padgett

^۱ دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد

^۲ دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشگاه فردوسی مشهد

^۳ Chandler

^۴ Resnick

^۵ Shorrock

$$-\infty < u_1 < \dots < u_n < \infty \quad (1)$$

$$f_{U_1, \dots, U_n}(u_1, \dots, u_n) = \prod_{i=1}^{n-1} \frac{f(u_i)}{1 - F(u_i)} \times f(u_n)$$

بنابراین اگر U_1, \dots, U_n رکوردهای بالا در نمونه‌ای تصادفی از خانواده مقیاسی- مکانی با تابع چگالی

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma} f\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

و تابع توزیع

$$F(x; \mu, \sigma) = F\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

باشد، در این صورت تابع چگالی نخستین n رکورد بالا به صورت

زیر بیان می‌شود:

$$-\infty < u_1 < \dots < u_n < \infty \quad (2)$$

$$f_{U_1, \dots, U_n}(u_1, \dots, u_n) = \prod_{i=1}^{n-1} \frac{f(u_i^*)}{1 - f(u_i^*)} \times f(u_n^*)$$

که در آن

$$u_i^* = \frac{u_i - \mu}{\sigma}; i = 1, \dots, n$$

رکوردهای بالا از توزیع $F(x)$ هستند.

تابع چگالی احتمال توأم U_m و U_n را با $f_{m,n}(x, y)$ نشان داده و داریم:

$$-\infty < x < y < \infty, \quad m = 1, 2, \dots, m < n; \quad (3)$$

$$f_{m,n}(x, y) = \frac{1}{(m-1)!(n-m-1)!} \times$$

$$[R(x)]^{m-1} \frac{f(x)}{1-F(x)} [R(x) - R(y)]^{n-m-1} f(y)$$

که در آن $R(x) = -\log(1 - F(x))$.

تابع چگالی احتمال حاشیه‌ای U_n را با $f_n(x)$ نشان می‌دهیم که

$$f_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} [\log\{1 - F(x)\}]^{n-1} f(x)$$

$$; -\infty < x < \infty, \quad n = 1, 2, \dots$$

در بخش ۳، یک خانواده مکانی- مقیاسی را در نظر گرفته و بر اساس مشاهدات رکوردی، برآورد گره‌های درستمایی ماکسیمم برای پارامترهای آن را معرفی می‌نماییم. در این مقاله، توزیع نرمال را در نظر می‌گیریم و با استفاده از شبیه‌سازی، رکوردهای مورد نیاز از توزیع نرمال استاندارد را استخراج می‌کنیم، همچنین بر اساس معیار لوید^۱ با محاسبه گشتاورهای رکوردهای حاصل از توزیع نرمال استاندارد، برآورد گره‌های خطی ناریب برای پارامترها را به دست می‌آوریم.

۲. تعاریف و نمادها

در این بخش چند تعریف پایه‌ای که در این مقاله مورد استفاده قرار می‌گیرد را بیان می‌کنیم.

۱-۲ رکورد

فرض کنید X_1, X_2, \dots دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با توزیع مشترک F باشد. مشاهده X_r را یک رکورد بالا (پایین) می‌گوییم هرگاه از همه مشاهدات قبل از خود بزرگتر (کوچکتر) باشد.

در ادامه، خود را به رکوردهای بالا محدود می‌کنیم. نتایج حاصل را می‌توان برای رکوردهای پایین با اندکی تغییر مورد استفاده قرار داد.

۲-۲ زمان رکورد

طبق تعریف ۱-۲، زمانی که در آن رکورد رخ می‌دهد یک متغیر تصادفی می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود که T_k با احتمال یک برابر یک است و برای $k \geq 2$,

$$T_k = \min\{j : X_j > X_{T_{k-1}}\}$$

که T_k زمان رخ دادن k امین رکورد بالا می‌باشد.

در این مقاله، n امین رکورد بالا را با U_n نشان می‌دهیم. بنابراین طبق تعاریف بالا، دنباله رکوردهای بالا عبارت اند از:

$$U_n = X_{T_n}; \quad n \geq 1$$

۳-۲ توزیع رکوردها

اگر U_1, \dots, U_n رکوردهای بالا در نمونه‌ای تصادفی از یک توزیع با تابع چگالی $f(\cdot)$ و تابع توزیع $F(\cdot)$ باشد، در این صورت تابع چگالی نخستین n رکورد بالا به صورت زیر بیان می‌شود:

$$L(\mu, \sigma; u_1, \dots, u_n) = \frac{1}{\sigma^n} \prod_{i=1}^{n-1} \left\{ \frac{f(u_i^*)}{1 - F(u_i^*)} \right\} f(u_n^*) \quad (5)$$

می‌دانیم یکی از روشهای به دست آوردن برآوردگر درستنمایی، استفاده از تکنیک مشتق گیری از لگاریتم تابع درستنمایی می‌باشد. لذا از رابطه ۵ داریم:

$$\log(L) = -n \log(\sigma) - \quad (6)$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \log(1 - F(u_i^*)) + \sum_{i=1}^n \log(f(u_i^*))$$

با مشتق گیری از رابطه ۶ نسبت به μ و σ به ترتیب داریم:

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \log(L) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{f(u_i^*)}{1 - F(u_i^*)} + \sum_{i=1}^n \frac{f'(u_i^*)}{f(u_i^*)} \quad (7)$$

و

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \log(L) = n + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{u_i^* f(u_i^*)}{1 - F(u_i^*)} + \sum_{i=1}^n \frac{u_i^* f'(u_i^*)}{f(u_i^*)} \quad (8)$$

در معادلات ۷ و ۸، $f'(x)$ مشتق $f(x)$ است. برای به دست آوردن برآوردگر درستنمایی ماکسیم باید دستگاه معادله زیر را حل کنیم:

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \log(L) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \log(L) = 0$$

از آنجا که توجه ما معطوف به توزیع نرمال است، معادلات ۷ و ۸ را بر اساس رکوردهای استخراج شده از توزیع نرمال استاندارد بازنویسی می‌کنیم. تابع چگالی و تابع توزیع نرمال استاندارد را به ترتیب با $\varphi(x)$ و $\Phi(x)$ نشان می‌دهیم که

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}x^2\right\}$$

و

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}t^2\right\} dt$$

از طرفی برای توزیع نرمال داریم:

$$\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}x^2\right\} = -x\varphi(x) \quad (9)$$

اثبات موارد ۴-۱ را می‌توان در آرنولد و بقیه ^{۱۱} [۵] یا احمدی [۱] دید.

مثال - فرض کنید دنباله‌ای از مشاهدات با $n=10$ با مقادیر زیر داشته باشیم:

$$20, 22, 18, 25, 30, 12, 40, 32, 10, 11$$

در این صورت طبق تعریف ۲-۲، رکوردهای بالا عبارت اند از:

$$U_1 = 20, U_2 = 22, U_3 = 25, U_4 = 30, U_5 = 40$$

و زمان رخ دادن رکوردهای بالا عبارت اند از:

$$T_1 = 1, T_2 = 2, T_3 = 4, T_4 = 5, T_5 = 7$$

لازم به ذکر است که دنباله رکوردهای پایین نمونه بالا عبارتند از: ۲۰، ۱۸، ۱۲، ۱۰.

۳. برآورد

در این بخش، با استفاده از مشاهدات رکوردی، پارامترهای جامعه را تخمین می‌زنیم. در زیر بخش ۳-۱، یک خانواده مقیاسی-مکانی را در نظر می‌گیریم و با حل دستگاه معادلات غیرخطی، برآوردگرهای درستنمایی ماکسیم برای پارامترها را به دست می‌آوریم. در این مقاله، با در نظر گرفتن توزیع نرمال و با استفاده از روشهای عددی و شبیه سازی کامپیوتری، برآوردگرهای درستنمایی ماکسیم برای میانگین و واریانس توزیع نرمال، بر اساس داده‌های رکوردی به دست می‌آید. همچنین در زیر بخش ۳-۲، با استفاده از روش لوید که در آرنولد و بقیه آمده است [۵]، بهترین برآوردگر خطی نااریب برای پارامترهای توزیع نرمال محاسبه می‌شود.

۳-۱ برآورد درستنمایی ماکسیم

در این زیر بخش، برآورد درستنمایی ماکسیم μ و σ را در حالت کلی برای هر خانواده مکانی-مقیاسی به دست آورده و نتیجه را برای حالت خاصی که توزیع جامعه نرمال باشد، به کار می‌بریم.

اگر توزیع جامعه از خانواده مکانی-مقیاسی به ترتیب با پارامترهای μ و σ باشد، آنگاه طبق رابطه ۲، تابع درستنمایی بر اساس نخستین n رکورد بالا عبارت است از:

و با جایگذاری در معادله‌های ۷ و ۸ داریم:

$$\frac{\partial f_1}{\partial \sigma} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\varphi(u_i^*)}{1 - \Phi(u_i^*)} +$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} u_i^* \frac{\varphi(u_i^*)}{1 - \Phi(u_i^*)} - \sum_{i=1}^{n-1} u_i^* \left\{ \frac{\varphi(u_i^*)}{1 - \Phi(u_i^*)} \right\}^2$$

$$\sigma \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\varphi(u_i^*)}{1 - \Phi(u_i^*)} - \sum_{i=1}^n u_i + n\mu = 0 \quad (10)$$

$$n\sigma^2 + \sigma \sum_{i=1}^{n-1} \frac{u_i \varphi(u_i^*)}{1 - \Phi(u_i^*)} - \sum_{i=1}^n u_i^2 + \mu \sum_{i=1}^n u_i = 0 \quad (11)$$

اکنون با استفاده از الگوریتم نیوتن-رافسن دستگاه معادلات ۱۰ و ۱۱ را حل می‌کنیم. برای این منظور قرار دهید:

$$f_1(\mu, \sigma) = \sigma \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\varphi(u_i^*)}{1 - \Phi(u_i^*)} - \sum_{i=1}^n u_i + n\mu$$

$$f_2(\mu, \sigma) =$$

$$n\sigma^2 + \sigma \sum_{i=1}^{n-1} \frac{u_i \varphi(u_i^*)}{1 - \Phi(u_i^*)} - \sum_{i=1}^n u_i^2 + \mu \sum_{i=1}^n u_i$$

$$F(\mu, \sigma) = (f_1(\mu, \sigma), f_2(\mu, \sigma))$$

$$x^{(k)} = (\mu^{(k)}, \sigma^{(k)})$$

که $\mu^{(k)}$ مقدار μ و $\sigma^{(k)}$ مقدار σ در مرحله k ام الگوریتم است. برای حل دستگاه $F(\mu, \sigma) = 0$ ، بعد از انتخاب یک تقریب اولیه $x^{(0)}$ ، مراحل زیر را اجرا می‌کنیم:

مرحله ۱- k را برابر صفر قرار می‌دهیم،

مرحله ۲- $F(x^{(k)})$ و ماتریس J یعنی

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \mu} & \frac{\partial f_1}{\partial \sigma} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \mu} & \frac{\partial f_2}{\partial \sigma} \end{pmatrix}$$

را محاسبه می‌کنیم که در آن

$$\frac{\partial f_1}{\partial \mu} = \sum_{i=1}^{n-1} u_i^* \frac{\varphi(u_i^*)}{1 - \Phi(u_i^*)} - \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ \frac{\varphi(u_i^*)}{1 - \Phi(u_i^*)} \right\}^2 + n$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \mu} =$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} u_i u_i^* \frac{\varphi(u_i^*)}{1 - \Phi(u_i^*)} - \sum_{i=1}^{n-1} u_i^2 \left\{ \frac{\varphi(u_i^*)}{1 - \Phi(u_i^*)} \right\}^2 + \sum_{i=1}^n u_i$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \sigma} = 2n\sigma + \sum_{i=1}^{n-1} u_i (1 + u_i^*) \frac{\varphi(u_i^*)}{1 - \Phi(u_i^*)}$$

$$- \sum_{i=1}^{n-1} u_i u_i^* \left\{ \frac{\varphi(u_i^*)}{1 - \Phi(u_i^*)} \right\}^2$$

مرحله ۳- دستگاه معادلات خطی

$$J(x^{(k)}) y^{(k)} = -F(x^{(k)})$$

را نسبت به $y^{(k)}$ حل می‌کنیم.

مرحله ۴- قرار می‌دهیم:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + y^{(k)}$$

مرحله ۵- اگر $x^{(k+1)}$ بقدر کافی دقیق نباشد، یعنی

$$\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_{\infty} \geq \varepsilon$$

که ε اختیاری است، یک واحد به k افزوده و به مرحله ۲ می‌رویم.

مرحله ۶- روند تمام است.

۲-۳ بهترین برآوردگر خطی نااریب

در این بخش، بهترین برآوردگر خطی برای μ و σ با معیار کمترین توانهای دوم بر اساس رگردهای بالا حاصل از توزیع $N(0, 1)$ را به دست می‌آوریم.

اگر $f_n(x)$ تابع چگالی احتمال U_n باشد، در این صورت از رابطه

داریم:

$$-\infty < x < \infty, n = 1, 2, \dots \quad (12)$$

$$f_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} [\log\{1 - \Phi(x)\}]^{n-1} \phi(x)$$

و اگر $f_{m,n}(x, y)$ تابع چگالی احتمال توأم U_m و U_n باشد، در این صورت از رابطه ۳ داریم:

حال از رابطه ۹ $-\infty < x < y < \infty, m = 1, 2, \dots, m < n; \quad (13)$

$$\phi(x) = \int_x^\infty -\phi'(y)dy = \int_x^\infty y\phi(y)dy \quad (17)$$

لذا

$$\alpha_n^{(r)} = 1 + \frac{1}{(n-r)!} \times$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_x^\infty xy [-\log\{1 - \Phi(x)\}]^{n-r} \frac{\phi(x)}{1 - \Phi(x)} \phi(y) dy dx$$

$$= 1 + \alpha_{n-1, n}$$

نتیجه ۱- برای $n \geq 2$ داریم:

$$\beta_{n-1, n} = \beta_{n, n} + \alpha_n(\alpha_n - \alpha_{n-1}) - 1 \quad (18)$$

زیرا

$$\beta_{n-1, n} = Cov(U_{n-1}, U_n)$$

$$= E(U_{n-1}U_n) - E(U_{n-1})E(U_n)$$

$$= \alpha_{n-1, n} - \alpha_{n-1}\alpha_n = (\alpha_n^{(r)} - 1) - \alpha_{n-1}\alpha_n$$

$$= \alpha_n^{(r)} - \alpha_{n-1}\alpha_n - 1$$

$$= \alpha_n^{(r)} - (\alpha_n)^2 + (\alpha_n)^2 - \alpha_{n-1}\alpha_n - 1$$

$$= \beta_{n, n} + \alpha_n(\alpha_n - \alpha_{n-1}) - 1$$

در جدولهای ۱ و ۲ به ترتیب مقادیر α_n و $\beta_{m, n}$ را تا $n = 10$ و $m \leq n \leq 10$ تعیین کرده‌ایم.

حال فرض کنید U_1, \dots, U_n اولین رکورد بالا از توزیع نرمال باشند، آنگاه با استفاده از روش لوید و با در نظر گرفتن معیار کمترین توانهای دوم [۴]، بهترین برآوردگرهای خطی نااریب برای μ و σ عبارت اند از:

$$\mu^* = \sum_{i=1}^n a_i U_i, \quad \sigma^* = \sum_{i=1}^n b_i U_i$$

که در آن بردارهای سطری a و b به صورت زیر داده می‌شوند:

$$a = \frac{\alpha'B^{-1}\alpha'\alpha'B^{-1} - \alpha'B^{-1}\alpha'B^{-1}}{(\alpha'B^{-1}\alpha)(\alpha'B^{-1}\alpha) - (\alpha'B^{-1}\alpha)^2} \quad (19)$$

$$b = \frac{\alpha'B^{-1}\alpha'B^{-1} - \alpha'B^{-1}\alpha'\alpha'B^{-1}}{(\alpha'B^{-1}\alpha)(\alpha'B^{-1}\alpha) - (\alpha'B^{-1}\alpha)^2} \quad (20)$$

$$f_{m, n}(x, y) = \frac{1}{(m-1)!(n-m-1)!} \times$$

$$[-\log\{1 - \Phi(x)\}]^{m-1} \frac{\phi(x)}{1 - \Phi(x)} \times$$

$$[-\log\{1 - \Phi(x)\} + \log\{1 - \Phi(y)\}]^{n-m-1} \phi(y)$$

با در نظر گرفتن

$$\alpha_n = E(U_n) \quad (14)$$

$$\alpha_n^{(r)} = E(U_n^r), \quad \alpha_{m, n} = E(U_m U_n)$$

$$\beta_{n, n} = Var(U_n), \quad \beta_{m, n} = Cov(U_m, U_n) \quad (15)$$

قضیه زیر را خواهیم داشت:

قضیه ۱- برای رکوردهای بالا از توزیع نرمال استاندارد داریم:

$$\alpha_{n-1, n} = \alpha_n^{(r)} - 1; \quad n \geq 2 \quad (16)$$

پوهان: از روابط ۱۲ و ۱۴ برای $n \geq 2$ داریم:

$$\alpha_n^{(r)} = \frac{1}{(n-1)!} \int_{-\infty}^{\infty} x^r [-\log\{1 - \Phi(x)\}]^{n-1} \phi(x) dx$$

از رابطه ۹ داریم:

$$\alpha_n^{(r)} = \frac{-1}{(n-1)!} \int_{-\infty}^{\infty} x [-\log\{1 - \Phi(x)\}]^{n-1} d\phi(x)$$

با استفاده از تکنیک انتگرال گیری جزء به جزء می‌توانیم بنویسیم:

$$\alpha_n^{(r)} = \frac{1}{(n-1)!} \int_{-\infty}^{\infty} [-\log\{1 - \Phi(x)\}]^{n-1} \phi(x) dx + \frac{1}{(n-2)!} \int_{-\infty}^{\infty} x [-\log\{1 - \Phi(x)\}]^{n-2} \frac{\phi(x)}{1 - \Phi(x)} dx$$

$$= 1 + \frac{1}{(n-2)!} \times$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x [-\log\{1 - \Phi(x)\}]^{n-2} \frac{\phi(x)}{1 - \Phi(x)} \phi(x) dx$$

$$U_1 = -0.412356, \quad U_2 = 0.351102,$$

$$U_3 = 0.569187, \quad U_4 = 0.689999$$

برای به دست آوردن درستمایی ماکسیم پارامترهای توزیع نرمال، روش تکرار عددی نیوتن-رافسن را با فرض $\varepsilon = 0.1$ طبق الگوریتم بخش ۳-۱ به کار برده ایم و نتایج زیر به دست آمده است:

$$\hat{\mu} = -0.645881 \approx -0.6, \quad \hat{\sigma} = 0.382291 \approx 0.4$$

بهترین برآوردگر خطی نااریب μ و σ طبق روابط زیر بخش ۳-۲ عبارت اند از:

$$\begin{aligned} \mu^* &= ((-0.412356) \times 0.7799) + (0.351102 \times 0.3152) \\ &+ (0.569187 \times 0.2073) + 0.689999 \times (-0.3025) \\ &= -0.30166132264 \approx -0.3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma^* &= (-0.412356) \times (-0.4069) + (0.351102) \times \\ &(-0.1460) + (0.569187) \times (0.0926) + \\ &(0.689999 \times 0.6454) = 0.5091454028 \approx 0.5 \end{aligned}$$

همچنین با توجه به جدول ۵ خطای استاندارد برآوردگرهای خطی نااریب عبارت اند از:

$$S.E(\mu^*) = 0.5091454028 \sqrt{0.9475} \approx 0.496$$

$$S.E(\sigma^*) = 0.5091454028 \sqrt{0.2227} \approx 0.240$$

$$B = (\beta_{ij}); 1 \leq i \leq j \leq n$$

$$\alpha' = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \quad \text{و} \quad \gamma' = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)_{1 \times n}$$

واریانس و کواریانس برآوردگرهای بالا عبارت اند از:

$$\frac{Var(u^*)}{\sigma^2} = \frac{\alpha' B^{-1} \alpha}{(\alpha' B^{-1} \alpha)(\gamma' B^{-1} \gamma) - (\alpha' B^{-1} \gamma)^2} \quad (21)$$

$$\frac{Var(\sigma^*)}{\sigma^2} = \frac{\gamma' B^{-1} \gamma}{(\alpha' B^{-1} \alpha)(\gamma' B^{-1} \gamma) - (\alpha' B^{-1} \gamma)^2} \quad (22)$$

$$\frac{Cov(\mu^*, \sigma^*)}{\sigma^2} = \frac{\alpha' B^{-1} \gamma}{(\alpha' B^{-1} \alpha)(\gamma' B^{-1} \gamma) - (\alpha' B^{-1} \gamma)^2} \quad (23)$$

با استفاده از میانگین، واریانس و کواریانس داده شده در جدولهای ۱ و ۲ ضرایب a و b را با توجه به معادله‌های (۱۹) و (۲۰) برای $n = 2, \dots, 10$ تعیین کرده و به ترتیب در جدولهای ۳ و ۴ می‌آوریم. همچنین مقادیر $Var(\mu^*)/\sigma^2$ ، $Var(\sigma^*)/\sigma^2$ و $Cov(\mu^*, \sigma^*)/\sigma^2$ را از معادله‌های (۲۱) - (۲۳) محاسبه کرده و در جدول ۵ آورده ایم.

مثال ۳-۳

در این زیر بخش، به منظور استخراج رکوردهای توزیع نرمال استاندارد از بسته آماری *Minitab R11* استفاده شده است که در این شبیه سازی ۴ رکورد به دست آمده است:

جدول ۱: میانگین رکوردهای بالا از توزیع $N(0,1)$

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
μ_n	۰.۹۰۳۲	۱.۴۹۹۰	۱.۹۶۷۸	۲.۳۶۶۷	۷۱۴۷.۲	۳.۰۳۳۹	۳.۳۲۴۷	۳.۵۹۴۲	۳۸۴۱.

جدول ۲: واریانس و کوواریانس n رکورد بالای اول از توزیع $N(0,1)$

n	m										
	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	
۱	۱.۰۰۰۰										
۲	۰.۰۹۵۶	۰.۷۷۹۹									
۳	۰.۴۵۳۴	۰.۰۹۵۳	۰.۷۰۲۲								
۴	۰.۳۷۷۵	۰.۴۹۶۴	۰.۰۵۸۹	۰.۶۶۱۱							
۵	۰.۳۲۹۳	۰.۴۳۳۱	۰.۰۵۱۱۵	۰.۰۵۷۷۳	۰.۶۳۵۳						
۶	۰.۲۹۵۱	۰.۳۸۸۵	۰.۰۴۵۸۹	۰.۰۵۱۸۱	۰.۰۵۷۰۲	۰.۶۱۷۴					
۷	۰.۲۶۹۶	۰.۴۱۹۴	۰.۰۴۱۹۴	۰.۰۴۷۳۲	۰.۰۵۲۱۲	۰.۰۶۴۳	۰.۶۰۴۱				
۸	۰.۲۴۹۵	۰.۳۸۸۳	۰.۰۳۸۸۳	۰.۰۴۳۸۵	۰.۰۴۸۲۷	۰.۰۵۲۲۶	۰.۰۵۵۹۵	۰.۰۵۹۳۸			
۹	۰.۲۳۳۲	۰.۳۰۷۳	۰.۰۳۳۳۱	۰.۰۴۱۰۰	۰.۰۴۵۱۴	۰.۰۴۸۸۸	۰.۰۵۲۳۳	۰.۰۵۵۵۴	۰.۰۵۸۵۶		
۱۰	۰.۲۱۹۷	۰.۲۸۹۵	۰.۰۴۳۲۱	۰.۰۳۸۶۴	۰.۰۴۲۵۳	۰.۰۴۶۰۶	۰.۰۴۹۳۱	۰.۰۵۲۳۴	۰.۰۵۵۱۹	۰.۰۵۷۸۸	

جدول ۳: ضرایب بهترین برآوردگرهای خطی نااریب μ بر اساس n رکورد اول بالا از توزیع $N(\mu, \sigma^2)$

n	m										
	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	
۲	۱.۰۰۰۰	۰.۰۰۰۰									
۳	۰.۸۶۳۹	۰.۳۴۴۲	-۰.۲۰۶۳								
۴	۰.۷۷۹۹	۰.۳۱۵۲	۰.۲۰۷۳	-۰.۳۰۲۵							
۵	۰.۷۲۱۱	۰.۲۹۵۶	۰.۱۹۵۳	۰.۱۴۵۵	-۰.۳۵۷۶						
۶	۰.۶۷۶۸	۰.۲۸۰۶	۰.۱۸۵۳	۰.۱۳۸۹	۰.۱۱۰۶	-۰.۳۵۷۶					
۷	۰.۶۴۱۷	۰.۲۶۸۵	۰.۱۷۴۴	۰.۱۳۳۵	۰.۱۰۶۴	۰.۰۸۸۳	-۰.۴۱۶۷				
۸	۰.۶۱۳۰	۰.۲۵۸۶	۰.۱۷۲۱	۰.۱۲۸۹	۰.۱۰۲۹	۰.۰۸۵۴	۰.۰۷۳۰	-۰.۴۳۳۹			
۹	۰.۵۸۸۹	۰.۲۵۰۱	۰.۱۶۶۸	۰.۱۲۵۱	۰.۰۹۹۹	۰.۰۸۳۰	۰.۰۷۹۰	۰.۰۶۱۱	-۰.۴۴۳۹		
۱۰	۰.۵۶۸۳	۰.۲۴۲۸	۰.۱۶۲۱	۰.۱۲۱۷	۰.۰۹۶۳	۰.۰۸۰۰	۰.۰۶۱۹	۰.۰۶۰۳	۰.۰۵۳۴	-۰.۴۵۶۰	

جدول ۴: ضرایب بهترین برآوردهای خطی نااریب σ بر اساس n رکورد اول بالا از توزیع $N(\mu, \alpha^2)$

n	m									
	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8	b_9	b_{10}
۲	-۱.۱۰۷۲	۱.۱۰۷۲								
۳	-۰.۵۸۶۰	-۰.۲۰۴۱	-۰.۲۰۶۳							
۴	-۰.۴۰۶۹	-۰.۱۴۶۰	-۰.۰۹۲۶	۰.۶۴۵۴						
۵	-۰.۳۱۵۰	-۰.۱۱۵۰	-۰.۰۷۳۸	-۰.۰۳۷۳	۰.۵۵۸۰					
۶	-۰.۲۵۸۸	-۰.۰۹۶۴	-۰.۰۶۱۹	-۰.۰۴۳۵	-۰.۰۲۵۳	۰.۴۹۷۹				
۷	-۰.۲۲۰۷	-۰.۰۸۳۳	-۰.۰۵۳۷	-۰.۰۳۹۴	-۰.۰۳۰۹	-۰.۰۲۵۳	۰.۴۵۳۳			
۸	-۰.۱۹۳۰	-۰.۰۶۶۲	-۰.۰۴۷۷	-۰.۰۳۵۰	-۰.۰۲۷۵	-۰.۰۲۲۶	-۰.۰۱۹۱	۰.۴۱۸۶		
۹	-۰.۱۷۱۹	-۰.۰۶۶۲	-۰.۰۴۳۰	-۰.۰۳۱۶	-۰.۰۲۷۹	-۰.۰۲۰۵	-۰.۰۱۷۴	-۰.۰۱۵۰	۰.۳۹۰۶	
۱۰	-۰.۱۵۵۳	-۰.۰۶۰۳	-۰.۰۳۹۲	-۰.۰۲۸۹	-۰.۰۲۲۸	-۰.۰۱۸۸	-۰.۰۱۵۹	-۰.۰۱۳۸	-۰.۰۱۲۱	۰.۳۶۷۳

جدول ۵: واریانس و کوواریانس بهترین برآوردهای خطی نااریب بر اساس n رکورد بالای اول از توزیع $N(\mu, \alpha^2)$

n	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
$Var(u^*)/\sigma^2$	۱.۰۰۰۰	۰.۹۷۴۳	۰.۹۴۷۵	۰.۹۲۳۰	۰.۹۰۱۱	۰.۸۸۱۶	۰.۸۶۴۲	۰.۸۴۸۵	۰.۸۳۴۲
$Var(\sigma^*)/\sigma^2$	۰.۷۲۱۵	۰.۷۲۱۵	۰.۲۲۲۷	۰.۲۲۲۷	۰.۱۲۷۹	۰.۱۰۴۹	۰.۰۸۸۵	۰.۰۷۶۶	۰.۰۶۷۴
$Cov(u, \sigma^*)/\sigma^2$	-۰.۴۴۷۷	-۰.۳۴۹۳	-۰.۲۹۲۱	-۰.۲۹۲۱	-۰.۲۰۵۰	-۰.۲۰۵۰	-۰.۱۸۸۱	-۰.۱۷۴۴	-۰.۱۶۲۹

مراجع

- [1]Ahmadi, J., 2000, *Record Values-Theory and Applications*, Ph.D. Thsies, Ferdowsi Univeristy of Mashhad, Iran.
- [2]Ahmadi, J. and Arghami, N.A., 2001, *On the Fisher Information in Record Values*, *Metrika* 53, 3, 195-206.
- [3]Ahmadi, J. and Arghami, N.A., 2002, *Nonparametric Confidence Intervals Based on Record Values Data, to appear in Statistical Papers*.
- [4]Arnold, B.C., Balakrishnan, N. and Nagaraja, H.N., 1992, *A First Course in Order Statisitcs*, John Wiley, New York.
- [5]Arnold, B.C., Balakrishnan, N. and Nagaraja, H.N., 1998, *Records*, John Wiley, New York.
- [6]Balakrishnan, N. and Chan, P.S., 1998, *On the Normal Record Values and Associated Inference*, *Statistics and Probability Letters*, 39, 73-80.
- [7]Balakrishnan, N. and Cohen, A.C., 1991, *Order Statistics and Inference: Estimation Method*, Academic Press, San Diego.
- [8]Carlin, P.B. and Gelfand, A.E., 1993, *Parametric Likelihood Inference for Record Breaking Problems*, *Biometrika*, 80, 3, 507-515.
- [9]David, H.A., 1981, *Order Statistics*, 2nd Ed, Wiley, New York.
- [10]Feuerverger, A. and Hall, P., 1998, *On Statistical Inference Based on Record Values*, *Extremes*, 12, 169-190.
- [11]Glick, N., 1978, *Breaking Records and Breaking Boards*, *Am.Math.Monthely* 85, 2-26.
- [12]Gulati, S. and Padgett, W.J., 1994, *Smooth Nonparametric Estimation of the Distribution and Density Functions from Record-Breaking Data*, *Comm.Stat., Theory Methods*, 23(5), 1259-1274.
- [13]Resnick, S.I., 1973, *Records Values and Maxima*, *Ann.Probab.* 1, 650-662.
- [14]Shorrock, R.W., 1973, *Record Values and Inter-Record Times*, *J.Appl.Probab.* 10, 543-555.