بررسی تقریب توزیع احتمال حداکثر یک میدان تصادفی با میانگین مشخصهٔ اویلر

خلیل شفیعی[۱] سمانه قادری[۲]

چکیده

در این مقاله ضمن معرفی میدانهای تصادفی، مجموعهٔ برون گشت و مشخصهٔ اویلر، با استفاده از شبیه سازی میدانهای تصادفی گاوسی t ، F و χ^2 به بررسی تقریب توزیع احتمال حداکثر این میدانهای تصادفی با میانگین مشخصهٔ اویلر می‌پردازیم.

۱. مقدمه

مطالعهٔ میدانهای تصادفی، در سالهای اخیر بیش از پیش جنبهٔ کاربردی پیدا کرده است. از جمله کاربردهای آن می‌توان به مطالعات انجام شده در زمینه‌های فیزیک، زمین شناسی، زلزله شناسی، پزشکی، مدل‌بندی سطح آب اقیانوسها و مدل‌بندی کهکشان اشاره کرد. بیشتر این مطالعات منجر به بررسی متغیر تصادفی «حداکثر مقدار میدان تصادفی» شده است. اما به دست آوردن توزیع این متغیر تصادفی، بسیار مشکل و می‌توان گفت که جز در مواردی خاص، ناممکن است. به این علت تقریبها و کرانهای متعددی برای بررسی توزیع این متغیر تصادفی به دست آمده است. یکی از این تقریبها، امید ریاضی مشخصهٔ اویلر (EC) مجموعه‌های برون گشت یک میدان تصادفی است. هازوفر[۳] [٦] به صورت شهودی نشان داد که این تقریب، برای متغیر تصادفی گاوسی، تقریبی مناسب است. ادلر[٤] این موضوع را برای میدان تصادفی گاوسی، ثابت کرده است. اما در مورد رفتار این تقریب برای میدانهای تصادفی χ^2 ، t و F بررسیهایی صورت نگرفته است.

در این مقاله با استفاده از شبیه سازی میدانهای تصادفی گاوسی χ^2، t ، F تقریب ذکر شده مورد بررسی قرار می‌گیرد.

[۱] دانشکده علوم ریاضی، گروه آمار، دانشگاه شهید بهشتی

[۲] دانشجوی کارشناسی ارشد آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی تهران

۱-۱ تعاریف

در این بخش تعاریف و مفاهیم مورد نیاز ارائه می‌شوند. در ابتدا لازم است که به تعریف میدان تصادفی بپردازیم.

فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ و مجموعهٔ $C \subset \mathbb{R}^N$ را در نظر بگیرید. میدان تصادفی N بعدی روی مجموعهٔ C ، تابعی است نظیر $X(t,w)$ که روی $(C \times \Omega)$ تعریف شده و برای هر t ی ثابت در مجموعهٔ C ، $X(t,w)$ یک متغیر تصادفی روی $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ است. لذا از نقطه نظر ریاضی، میدان تصادفی روی C به صورت تابع دو متغیرهٔ $X(t,w)$ تعریف می‌شود که دامنهٔ تعریف هر کدام از متغیرهای t و w به ترتیب C و Ω است. بنابراین در حالت $N = ۱$، میدان تصادفی به فرایند تصادفی تبدیل می‌شود. به عنوان مثال می‌توان به حجم آب ذخیره شده در پشت یک سد مشخص $(N = ۱)$ ، به شدت زمین لرزه در تمام نقاط جغرافیایی زلزله خیز در زمانی مشخص (که اگر هر نقطهٔ جغرافیایی را با مختصات دو بعدی طول و عرض جغرافیایی نشان دهیم، $N = ۲$ است) ، به میزان بارندگی در نقاط مختلف ($N = ۳$ ، دو بعد برای طول و عرض جغرافیایی و یک بعد برای ارتفاع)، اشاره کرد.

[۳] Hasofer

[٤] Adler

میدانهای تصادفی را می‌توان از $\mathbb{R}^N$ بـه $\mathbb{R}^m$ تعریـف کـرد. بـرای مثال، اگر تعداد تصادفات و تعداد آسیب دیدگان ناشی از آنها را در نظر بگیریم کـه در سـر چـهار راهـهای یـک شـهر اتفـاق می‌افتـد، بـا میـدان تصادفی سه بعدی مواجه هستیم (دو بعد برای مشخص کردن مختصـات یک چهار راه و یک بعد برای زمان) که روی $\mathbb{R}^۳$ تعریف شده اما $X(t)$ مقادیرش را در $\mathbb{R}^۲$ اختیار می‌کند (یک بعد برای تعداد تصادفات و یک بعد برای تعداد آسیب دیدگان ناشی از آنها). خانوادهٔ توزیعهای متنـاهی ـ بعدی یک میدان تصادفی به صورت زیر تعریف می‌شود.

برای یک مجموعهٔ متناهی و دلخواه از مقادیر t نظیر $t_۱, t_۲, ..., t_n$ ، متغیرهای تصادفی متنـاظر آنــها یعنــی $X(t_۱), X(t_۲), ..., X(t_n)$ دارای توزیع توأم n بعـدی خواهنـد بـود کـه تـابع توزیـع تـوأم آنـها بـه صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$F_{t_۱,...,t_n}(x_۱,...,x_n) = \Pr(X(t_۱) \le x_۱,...,X(t_n) \le x_n) \quad (۱)$$

خـانوادهٔ همـهٔ ایـن توزیعـهای تـوأم را کـه بـه ازای مقـادیر مختلـف n ، $n = ۱,۲,...$ ، و همهٔ مقــادیر ممــکن t_j به دست می‌آید، خــانوادهٔ توزیعهای متناهی ـ بعدی $(fi - di)$ میدان X می‌گویند.

نظیر نظریهٔ فرایندهای تصادفی، مفـهوم همگنی، مفـهومی اساسـی در مطالعهٔ میدانهای تصادفی است.

میــدان تصادفی $X(t)$ ، تعریف شده روی $\mathbb{R}^N$ را اکیدا همگـن (یا اکیدا مانا) گوییم، اگر توزیعـهای متنـاهی ـ بعـدی آن تحت انتقالـهای پارامتر t ، ناوردا باشند.

غالبا زمانی که میدانهای تصادفی را بررسی می‌کنیم، لازم نیست کـه خود را به شرط همگنی اکید محـدود کنیـم و کافیسـت کـه تنـها بـه دو نتیجهٔ حاصل از همگنی اکید اکتفا کنیم. از ایـن رو رده‌ای از میدانـها را معرفی می‌کنیم که آنها را همگن یا مانا می‌نامیم.

فـرض کنیـد کـه $E\{(X(t))^۲\}$ بـه ازای همهٔ مقــادیر $t \in \mathbb{R}^N$ متناهی باشد. در این صورت گوییم میـدان تصـادفی $X(t)$ همگـن اسـت اگر در دو شرط زیر صدق کند:

۱) ثابت $= m$ ، $E\{X(t)\}$ ،

۲) $E\{[X(s) - m][X(t) - m]\}$ تنها تابعی از $s - t$ باشد.

این میدانها را میــدانهای همگن ضعیف، یا میدانهای همگن از مرتبهٔ دوم نیز می‌نامند. در این صورت تابع کوواریـانس، تـابعی تنـها بـر اسـاس N متغیر (به جای $۲N$ متغیر) است. زیرا $C(s,t) = C(s-t)$.

نظیر هر تابع دلخواهی مثل $f(t)$ ، انـواع مختلـف مشـتق پذیـری را می‌توان برای یک میدان تصادفی تعریف کرد. معروفترین نوع آنــها کـه در این مقاله نیز به کار برده شده، مشتق پذیری به صورت قریب به یقیـن است. گوییم که میدان تصـادفی X ، در نقطـهٔ t^* بـه صـورت قریـب بـه یقین مشتق پذیر است اگر

$$\Pr\{w : X_j(t^*, w) \text{ وجود دارد } j = ۱,...,N\} = ۱$$

که X_j نشان دهندهٔ مشتق جزئی مرتبهٔ اول تابع $X(t)$ ، $t \in \mathbb{R}^N$ ، نسبت به مؤلفهٔ j‌ام، $j = ۱,...,N$ ، $\partial X / \partial t_j$ ، است.

ردهٔ مـهمی از میدانـهای تصـادفی، ردهٔ میدانـهای تصـادفی گاوسـی است. میدان تصادفی گاوسی، میدانی است که توزیعهای متناهی ـ بعدی آن، همگی توزیعهای گاوسی (نرمال) چند بعدی باشند. اگر t را ثابت در نظر بگیریم، به راحتی می‌توان همانند نظریهٔ توزیـع متغیرهـای تصـادفی، میدانهای تصادفی $\chi^۲$ ، t و F را به همان صورت تعریف کرد.

در اغلب کاربردها، تحقق مشـاهده شـده از میـدان تصـادفی، همـوار می‌شود تا تأثیر اغتشاش کاهش یابد. میدان هموار شده، از پیچش میدان با یک هسته به دست می‌آید. اما میزان همواری مقداری اختیاری اسـت. توضیحـات بیشـتر در ایـن زمینـه را می‌تـوان در مقالـهٔ سـیگموند و ورسلی[۵] [۷] یافت.

فرض کنید K یک هستهٔ N بعدی باشد (هستهٔ N بعـدی هسـته‌ای است که روی فضای $\mathbb{R}^N$ تعریف می‌شود). میدان تصادفی هموار شـدهٔ گاوسی، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$X(t) = \int K(h-t)dZ(h) \text{ ،}$$

که $Z(h)$ میدان تصادفی گاوسی است که روی زیر مجموعه‌ای از $\mathbb{R}^N$ تعریف شـده اسـت. انتگرالی کـه در عبـارت بـالا آمـده اسـت، از نـوع انتگرال تصـادفی اسـت (بـرای آشـنایی بیشـتر می‌توانیـد بـه [۱] مراجعـه کنید.)

۲. مجموعه‌های برون گشت، مشخصه‌های EC و DT

مطالعهٔ میدانهای تصادفی، غالبا به مطالعـه و بررسـی مسـائل هندسـی خاصی می‌انجـامد کـه در بررسـی و تحلیـل میدانـهای تصـادفی بـه کـار می‌روند. یکی از آنها مفهوم مجموعه‌های برون گشت (تصادفی) میـدان تصادفی حقیقی مقدار $X(t)$ ، $t \in \mathbb{R}^N$ است.

---

[۵] Siegmund and Worsley

فرض کنید $X:\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ میدانی تصادفی باشد. در این صورت برای هر عدد حقیقی ثابت u و هر زیر مجموعه نظیر S از $\mathbb{R}^N$، مجموعهٔبرون گشت بالاتر از سطح u برای میدان تصادفی X در S،به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A_u(X,S)=\{t\in S: X(t)\geq u\}.$$

برای سادگی کار، اگر اشتباهی پیش نیاید، مجموعهٔ برون گشت را به طور اختصار با A_u نشان می‌دهیم.

هندسهٔمجموعه‌های برون گشت در میدانهای تصادفی یک بعدی یا فرایندهای تصادفی، شکل بسیار ساده‌ای دارد. چراکه تنها شامل نقاط یا بازه‌هاست. شکل (۱) تحققی از یک فرایند تصادفی را نشان می‌دهد. مجموعهٔ برون گشت به صورت زیر است:

$$A_u(X,S)=[t_۱,t_۲]\bigcup[t_۳,t_۴].$$

تعداد مؤلفه‌های همبند یک مجموعهٔ برون گشت، موضوع دیگری است که در مطالعهٔ میدانهای تصادفی با آن رو به رو می‌شویم. از آنجا که مطالب مورد بحث و مطالعهٔ ما به میدانهای تصادفی مربوط می‌شوند، لذا برای تعریف تابع مورد نظر، توجه خود را به رده‌ای از اشیاء هندسی که مختلطهای پایه‌ای نامیده می‌شوند، معطوف می‌کنیم. ادلر [۱] نشان داده که مجموعه‌های برون گشت بسیاری از میدانهای تصادفی به این رده تعلق دارند.

$\mathbb{R}^N$ را با مختصاتی دکارتی در نظر می‌گیریم و بردارهای N بعدی δ_j، $j=۱,\dots,N$، (که jامین مؤلفهٔ آن ۱ و بقیهٔمؤلفه‌هایش صفر هستند)،یک پایهٔ متعامد یکه برای $\mathbb{R}^N$است. مجموعهٔ

$$\xi=\{t\in\mathbb{R}^N: t_j=a_j, j\in J, -\infty<t_j<\infty, j\notin J\}$$

یک k ـ صفحه از $\mathbb{R}^N$نامیده می‌شود، اگر J زیر مجموعهٔ N-k عضوی از اعداد صحیح $\{۱,\dots,N\}$ بوده و $a_۱,\dots,a_{N-k}$ اعداد ثابتی باشند. یعنی یک k ـ صفحه، زیر فضای k بعدی از $\mathbb{R}^N$است که توسط k بردار،متوازی با k تا از $\delta_۱,\dots,\delta_N$ ها تولید شده است.

مجموعهٔ فشردهٔ B در $\mathbb{R}^N$ را پایه می‌نامیم اگر $\xi\bigcap B$ برای هر k ـ صفحهٔ ξ از $\mathbb{R}^N$ همبند باشد که شامل $\xi=\mathbb{R}^N$ نیز هست.
واضح است که مجموعهٔ تهی و هر مجموعهٔ محدبی، یک پایه است.

مجموعهٔ $A\subset\mathbb{R}^N$ را مختلط پایه‌ای گوییم اگر بتوان آن را به صورت اجتماع تعداد متناهی از پایه‌ها نمایش داد به طوری که اشتراک هر تعداد دلخواهی از این پایه‌ها، خود پایه باشد. بنابراین اگر $A=B_۱\bigcup\dots\bigcup B_m$ که B_jها، همگی پایه هستند، و $B_{\nu_۱}\bigcap\dots\bigcap B_{\nu_k}$ برای هر ترکیبی از $\nu_۱,\dots,\nu_k$ ها، $k=۱,\dots,m$، یک پایه باشد، در این صورت A مختلط پایه‌ای است.

هدف، تعریف تابعکی صحیح مقدار، نظیر $\varphi(B)$ است که تعداد مؤلفه‌های همبند B را شمارش می‌کند. لذا حداقل خصوصیاتی که باید داشته باشد، این است که برای هر پایهٔ B:

$$\varphi(B)=\begin{cases}۰ & ;B=\phi \quad \text{اگر}\\ ۱ & ;\text{در غیر این صورت}\end{cases} \qquad (۲)$$

و خاصیت دیگر این که اگر A، B، $A\bigcap B$ و $A\bigcup B$ مختلطهای پایه‌ای باشند، در این صورت:

$$\varphi(A\bigcup B)=\varphi(A)+\varphi(B)-\varphi(A\bigcap B). \qquad (۳)$$

با استفاده از مفاهیم مختلف ریاضی، مشخصه‌های متعددی تعریف شده اند. یکی از این مشخصه‌ها، مشخصهٔ اویلر است. تعریف این مشخصه از دیدگاه توپولوژی توسط ادلر [۱] توضیح داده شده است. در این جا تنها این مشخصه را به زبانی ساده توصیف می‌کنیم.

معرفی مشخصهٔ اویلر (EC) به مطالعات اویلر (۱۷۰۷-۱۷۸۳) باز می‌گردد. وی یکی از ریاضیدانان قرن هیجدهم بود که در زمینهٔ چند وجهیها مطالعاتی را انجام داد. او به این نتیجه رسید که اگر تعداد وجوه (F)، تعداد یالها (E) و تعداد رأسهای(V) یک چند وجهی را بشماریم، همواره رابطهٔ $V-E+F=۲$ برقرار است. برای مثال در یک مکعب $F=۶$، $E=۱۲$ و $V=۸$، بنابراین $V-E+F=۲$ (شکل ۲ الف). برای جسم توپری که شامل P چند وجهی است که حداقل در یک وجه به هم چسبیده‌اند، رابطهٔ $V-E+F-P=۱$ همواره برقرار است. برای مثال در شکل ۲ (ب) تعداد وجه‌ها ۱۶، تعداد یالها ۲۸، تعداد رأسها ۱۶ و کل شکل از $P=۳$ چند وجهی تشکیل شده است و دیده می‌شود که $V-E+F-P=۱$ است.

اگر در جسم توپری یک حفرهٔ کامل وجود داشته باشد، رابطهٔ بالا دیگر برقرار نیست. در واقع نتیجه به صورت $V-E+F-P=۰$ خواهد بود (شکل ۲ (ج)). اگر دو حفره یا سه حفره در داخل جسم توپر وجود داشته باشد، در این صورت $V-E+F-P$ به ترتیب برابر ۱- و ۲- خواهد بود (شکل ۲ د، هـ). به همین نحو با اضافه شدن هر حفره، مقدار $V-E+F-P$ یک واحد کاهش می‌یابد.

محاسبهٔ $V-E+F-P$ گامی برای تعریف مشخصهٔ اویلر یک جسم توپر است. مشخصهٔ اویلر یک جسم توپر که متشکل از چندین چندوجهی است، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$EC = V - E + F - P$$

بنابراین مقدار EC برای شکلی نظیر شکل ۲ (هـ) برابر ۲- است (۱+ برای کل شکل و ۳- به دلیل وجود سه حفره که جمعا برابر ۲- می‌شود).

اگر جسم توخالی باشد، نظیر توپ تنیس، در این صورت مقدار EC برابر ۲ است. در مورد تیوب دوچرخه مقدار EC برابر صفر است و اگر سوراخ و یا پنچر شده باشد، برابر ۱- است.

اینک فرض کنید که مجموعه‌ای از اجسام توپر ناهمبند وجود دارد. در این حالت، می‌توان آنها را به چندوجهیها شکست و فرمول را برای هر چندوجهی به کار برده و سپس مقادیر به دست آمده را با هم جمع کرد. بنابراین اگر مجموعه،شامل چندین مؤلفهٔ همبند و بدون حفره باشد، در این صورت مقدار EC، برابر تعداد این مؤلفه‌هاست.

اگر با مجموعه‌ای سه بعدی رو به رو باشیم که دارای مرزی هموار باشد، در این صورت برای پیدا کردن مقدار EC، می‌توان مجموعه را به شبکهٔ مکعبی پوشاند. اگر شبکه به اندازهٔ کافی خوب و مناسب و مرز مجموعه هموار باشد، در این صورت مقدار مشخصهٔ اویلر شبکهٔ داخل مجموعه، برابر مقدار مشخصهٔ اویلر مجموعه است [۱۲].

با توجه به آنچه گفته شد، دیده می‌شود که به دست آوردن مقدار مشخصهٔ اویلر مجموعهٔ برون گشت، کار چندان ساده‌ای نیست. از این رو ادلر[۱] بر اساس توپولوژی دیفرانسیل،مشخصهٔ DT (توپولوژی دیفرانسیل) را برای هر مجموعهٔبرون گشت تعریف کرد. وی همچنین نشان داد که اگر مجموعهٔبرون گشت با مرز زیر مجموعهٔ T، اشتراک نداشته باشد، در این صورت هر دو مشخصه یکی هستند.

تعریف مشخصهٔ DT. فرض کنید $F:\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ از ردهٔ C^2 روی یک زیر مجموعهٔ فشرده‌ای نظیر $T \subset \mathbb{R}^N$ باشد. در این صورت اگر χ_k های تعریف شده در زیر، همگی متناهی باشند، آنگاه مشخصهٔ DT ی مجموعهٔ برون گشت $A_u(F,T)$، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\chi(A) = (-1)^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1}(-1)^k \chi_k \qquad (۴)$$

که χ_k تعداد نقاطی نظیر t ،در T است که در شرایط زیر صدق کنند:

$$F(t) = u \qquad (۵)$$

$$F_j(t) = 0;\ j = 1,\dots,N-1 \qquad (۶)$$

$$F_N(t) > 0 \qquad (۷)$$

(۸) تعداد مقادیر ویژهٔ منفی ماتریس $D_{N-1}(t)$، دقیقا k باشد.

که $D_{N-1}(t)$ ماتریس $(N-1)\times(N-1)$ بعدی است که مؤلفه‌هایش مشتقات جزئی مرتبهٔ دوم $F(t)$ هستند، یعنی:

$$D_{N-1} = (F^{(kl)}) \quad ;k,l = 1,\dots,N-1 .$$

در واقع اگر مجموعهٔ برون گشت، اشتراکی با مرز ناحیهٔ T نداشته باشد، $(A \cap \partial T = \phi)$، در این صورت مشخصه‌های DT و اویلر یکی هستند. به عبارت ساده‌تر می‌توان گفت که مقدار این مشخصه در حالت دو بعدی برابر تعداد مؤلفه‌های همبند مجموعهٔ برون گشت، منهای تعداد حفره‌ها، و در حالت سه بعدی برابر تعداد مؤلفه‌های همبند، منهای تعداد دسته‌ها، بعلاوهٔ تعداد حفره‌هاست. لذا به عنوان مثال، مشخصهٔ اویلر یک کرهٔ پر، یک کرهٔ خالی و یک فنجان به ترتیب برابر یک، دو و صفر است.

۳. امید ریاضی مشخصهٔ DT

همان گونه که در ابتدای این مقاله ذکر شد، از امید ریاضی مشخصهٔ EC به عنوان تقریبی برای توزیع احتمال حداکثر یک میدان تصادفی استفاده می‌شود. اما از آنجا که نوشتن عبارتی صریح برای این مشخصه در حالاتی بیش از سه بعد بسیار پیچیده بوده و از طرفی در اغلب کاربردها مشخصه‌های EC و DT یکی هستند، لذا از میانگین مشخصهٔ DT استفاده می‌شود. ادلر میانگین این مشخصه را تحت شرایطی خاص به دست آورد. با استفاده از این موضوع، حاصل این عبارت برای میدان تصادفی گاوسی تحت شرایطی خاص توسط ادلر و برای میدانهای χ^2، F و t توسط ورسلی به دست آمده است.

فرضیات و علائم مورد نیاز برای بیان قضیهٔ اصلی بدین صورت است.

فرض کنید $Z = Z(t)$، $t = (t_1,\dots,t_N) \in \mathbb{R}^N$، میدان تصادفی حقیقی مقدار همگنی بوده و C زیر مجموعهٔ فشرده و محدبی در $\mathbb{R}^N$ باشد. $D_{N-1} = D_{N-1}(t)$ نشان دهندهٔ ماتریس $(N-1)\times(N-1)$ بعدی بوده که عناصرش مشتقات جزئی مرتبهٔ دوم $Z(t)$ هستند. $\lambda(C)$ نیز نشان دهندهٔ اندازهٔ لبگ مجموعهٔ C است. مدول پیوستگی $Z^{(k)}$ و $Z^{(kl)}$ را درون C به صورت زیر

تعریف می‌کنیم:

$$\omega_k(h) = \sup_{\|t-s\|<h} \left| Z^k(t) - Z^k(s) \right| \quad ; k = 1,\dots,N$$

$$\omega_{kl}(h) = \sup_{\|t-s\|<h} \left| Z^{kl}(t) - Z^{kl}(s) \right| \quad ; k,l = 1,\dots,N$$

که سوپرمم روی همهٔ t و s های واقع در مجموعهٔ C گرفته می‌شود.

قضیهٔ ۱. فرض کنید

(i) برای هر $\varepsilon > 0$، وقتی $h \downarrow 0$:

$$P(\max\{\omega_k(h), \omega_{kl}(h)\} > \varepsilon) = o(h^N)\text{،}$$

(ii) مشتقات جزئی مرتبهٔ دوم $\{Z^{(kl)}, 1 \le k \le N, 1 \le l \le N-1\}$ و $Z^{(N)}$، به شرط $Z, Z^{(1)}, \dots, Z^{(n-1)}$، دارای واریانس شرطی متناهی باشند. همچنین چگالی $\theta_{N-1}(z, z_1, \dots, z_{N-1})$ که چگالی توأم متغیرهای تصادفی $Z, Z^{(1)}, \dots, Z^{(N-1)}$ است، از بالا کراندار باشد و C زیر مجموعه‌ای محدب از $\mathbb{R}^N$ باشد.

در این صورت امید ریاضی مشخصهٔ DT ی مجموعهٔ برون گشت $A_z(Z, C)$ برابر است با:

$$E(\chi(A_z(Z,C))) = E\{Z^{(N)+} \det(D_{N-1}) \mid Z = z, Z^{(1)} = 0, \dots, Z^{(N-1)} = 0\}$$

$$\lambda(c)(-1)^{N-1} \times \theta_{N-1}(z, 0, \dots, 0) \qquad [11]$$

اهمیت قضیهٔ بالا در این است که می‌توان میانگین مشخصهٔ DT ی مجموعه‌های برون گشت را با استفاده از توزیع توأم میدان *Z(t)* و مشتقات جزئی تا مرتبهٔ دوم آن به دست آورد. اینک می‌توان با استفاده از قضیهٔ بالا امید ریاضی مشخصهٔ DT ی میدانهای تصادفی گاوسی χ^2، F و t را به دست آورد.

قضیهٔ ۲. فرض کنید X(t)، $t \in \mathbb{R}^N$، میدان تصادفی گاوسی همگن با میانگین صفر روی $\mathbb{R}^N$ بوده و T زیر مجموعه‌ای فشرده و محدب از $\mathbb{R}^N$ باشد به طوری که مرز آن، ∂T، دارای اندازهٔ لبگ صفر است. فرض کنید که X تقریبا همه جا دارای مشتقات جزئی پیوسته تا مرتبهٔ دوم با واریانسهای متناهی باشد. همچنین توزیع توأم X و این مشتقات جزئی ناتباهیده و مدول پیوستگی X_{ij}، وقتی که $h \downarrow 0$، در شرط زیر صدق کند:

$$P(\max\{\omega_k(h), \omega_{kl}(h)\} > \varepsilon) = o(h^N)$$

در این صورت میانگین مقدار مشخصهٔ DT ی مجموعهٔ برون گشت $A = A_x(X,T)$ برابر است با:

$$E\{\chi(A)\} = |T| \rho_N(x) \qquad (9)$$

$$\rho_N(x) = \frac{\exp(-x^2/2\sigma^2)(\det(\Lambda))^{1/2}}{(2\pi)^{(N+1)/2}\sigma^N} H_{N-1}(x/\sigma) \qquad (10)$$

$$H_n(x) = n! \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j x^{n-2j}}{j!(n-2j)!2^j} \qquad (11)$$

که H_n، چندجمله‌ای ارمیت مرتبهٔ n ام، $\sigma^2 = E\{X^2(t)\}$ و Λ ماتریس کوواریانس X_j است.

قضیهٔ ۳. در حالت $N \ge 2$، اگر شرایط نظم مورد نیاز قضیهٔ ۱ برای هر یک از مؤلفه‌های میدانهای گاوسی $X_i(t)$ برقرار باشد، در این صورت امید ریاضی مشخصهٔ DT ی مجموعهٔ برون گشت میدانهای تصادفی χ^2، $U(t) = \sum_{i=1}^{n} X_i^2(t)$، به صورت زیر خواهد بود:

$$E(\chi(A_u(U,C))) = \frac{\lambda(C)\det(\Lambda)^{\frac{1}{2}} u^{\frac{1}{2}(n-N)} e^{-\frac{1}{2}u}}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} 2^{\frac{1}{2}(n-2)} \Gamma(\frac{n}{2})} P_{N,n}(u)$$

که $P_{N,n}$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ $(N-1)$ برحسب u با ضرایب صحیح است و به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$P_{N,n}(u) = \sum_{j=0}^{[\frac{N-1}{2}]} \sum_{k=0}^{N-1-2j} \binom{n-1}{N-1-2j-k} \frac{(-1)^{N-1-j+k}(N-1)!}{2^j j! k!} u^{j+k}$$

لم ۱ ـ اگر $m + n > N$ و مؤلفه‌های $X_1, \dots, X_n$ و $Y_1, \dots, Y_m$ در شرایط قضیهٔ ۱ صدق کنند، در این صورت میدان تصادفی F، دارای نظم لازم برای برقراری قضیهٔ ۱ است.

قضیهٔ ٤. در حالت $N \ge 2$ و $m + n > N$، اگر شرایط نظم ذکر شده در قضیهٔ ۱ برای هر یک از مؤلفه‌های میدانهای $X_i(t)$، $i = 1, \dots, n$ و $Y_j(t)$، $j = 1, \dots, m$، برقرار باشد، در این صورت امید ریاضی مشخصهٔ DT ی مجموعهٔ برون گشت میدان تصادفی F،

$$F(t)=\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2(t)\right\}\Big/\left\{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}Y_i^2(t)\right\}$$

به صورت زیر خواهد بود:

$$E\big(\chi(A_f(F,C))\big)=\frac{\lambda(C)\det(\Lambda)^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{m+n-N}{2})}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}2^{\frac{1}{2}(N-2)}\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}\left(\frac{nf}{m}\right)^{\frac{n-N}{2}}\times\left(1+\frac{nf}{m}\right)^{-\frac{1}{2}(m+n-2)}K_{N,m,n}(f)$$

که $K_{N,m,n}(f)$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ $(N-1)$ برحسب $\left(\frac{nf}{m}\right)$ و با ضرایب صحیح است و به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$K_{N,m,n}(f)=(-1)^{N-1}(N-1)!\sum_{j=0}^{[\frac{N-1}{2}]}\frac{\Gamma\left(\frac{m+n-N}{2}+j\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n-N}{2}\right)j!}\times\sum_{k=0}^{N-1-2j}\binom{m-1}{k}\binom{n-1}{N-1-2j-k}(-1)^{j+k}\left(\frac{nf}{m}\right)^{j+k}$$

که $T\sim t_m$، $S\sim\chi^2_{m+1}$ و $Z_1,Z_2\sim MN_N(0,\Lambda)$.

لم ۲ـ اگر $m\ge N$ و مؤلفه‌های $X(t)$ و $Y_1(t),\dots,Y_m(t)$ در شرایط قضیهٔ ۱ صدق کنند، در این صورت میدان تصادفی t، دارای نظم لازم برای برقراری قضیهٔ ۱ است.

قضیهٔ ۵. برای $N\ge 2$ و $m\ge N$، اگر هر یک از مؤلفه‌های میدانهای گاوسی $X(t)$ و $Y_i(t)$، $i=1,\dots,m$، در شرایط ذکر شده در قضیهٔ ۱، صدق کنند، در این صورت امید ریاضی مشخصهٔ DT ی مجموعه‌های برون گشت میدان تصادفی t،

$$T(t)=X(t)\Big/\left\{\sum_{i=1}^{m}Y_i^2(t)\Big/m\right\}^{1/2}،$$

به صورت زیر خواهد بود:

$$E(\lambda(A_t(T,C)))=\frac{\lambda(C)\det(\Lambda)^{\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{N+1}{2}}}\left(1+\frac{t^2}{m}\right)^{-\frac{m-1}{2}}Q_{N,m}(t)$$

$$Q_{N,m}(t)=\sum_{j=0}^{[\frac{N-1}{2}]}\frac{(-1)^j(N-1)!}{2^j j!(N-1-2j)!}\times\frac{\Gamma(\frac{m+1}{2})}{\Gamma(\frac{m+2-N+2j}{2})\left(\frac{m}{2}\right)^{\frac{N-1-2j}{2}}}t^{N-1-2j}$$

۴. بررسی $P\{\sup_{t\in T}X(t)\ge x\}$

یکی از قدیمیترین و مشکلترین مسائلی که در حین مطالعهٔ میدانهای تصادفی با آن مواجه می‌شویم، تعیین احتمال

$$P\{\sup_{t\in T}X(t)\ge x\} \qquad (12)$$

است که X یک میدان تصادفی (حقیقی مقدار) است. در اغلب کاربردها، پس از مدل بندی موضوع مورد نظر توسط یک میدان تصادفی، با مسائلی رو به رو می‌شویم که به محاسبهٔ (۱۲) می‌انجامد. مقدار دقیق عبارت (۱۲)، تنها در پنج حالت و برای فرایندهای تصادفی که دارای تابع کوواریانسی به شکل زیرند، محاسبه شده است [۵]:

$$C(t)=e^{-|t|} \qquad \text{(i)}$$

$$C(t)=\begin{cases}1-|t| & ;|t|\le 1 \quad \text{اگر}\\ 0 & ;|t|\ge 1 \quad \text{اگر}\end{cases} \qquad \text{(ii)}$$

$$C(t)=3/2\exp(-\frac{|t|}{3})(1-1/3\exp(-\frac{2|t|}{\sqrt{3}})) \qquad \text{(iii)}$$

$$C(t)=C(-t)=C(t+2) \qquad \text{(iv)}$$

$$C(t)=\begin{cases}1-\alpha t & ;0\le t\le 1 \quad \text{اگر}\\ 1+\alpha(t-1) & ;1\le t\le 2 \quad \text{اگر}\end{cases}$$

وقتی $0\le\alpha\le 2$.

حالت پنجم را کرسی و دیویس[6] [۵] با تابع کوواریانس:

---

[6] Cressie and Davis

$$C(t)=\begin{cases}1-|t|/(1-\beta) & ;|t|\le 1 \quad \text{اگر}\\ -\beta(1-\beta) & ;1\le |t|<(1-\beta)\beta \quad \text{اگر}\end{cases} \qquad (7)$$

وقتی $0 < \beta \le 1/2$ به دست آورده‌اند.

در سایر موارد اغلب از تقریبها و کرانهایی برای بررسی رابطهٔ (۱۲) استفاده می‌شود. یکی از این تقریبها، امید ریاضی مشخصهٔ اویلر است. تعریف EC را به یاد آورید. گفتیم که کاری شبیه شمردن تعداد مؤلفه‌های مجموعهٔ برون گشت را انجام می‌دهد. بدین مفهوم که درحالت دو بعدی، این مشخصه برابر تعداد مؤلفه‌های همبند مجموعهٔ برون گشت، منهای تعداد حفره‌هاست. ادلر [۱] نشان داد که با افزایش مقدار x، تعداد حفره‌ها به سمت ناپدید شدن میل می‌کند و بنابراین با نواحی مجزایی رو به رو خواهیم بود که تنها شامل ماکسیممهای موضعی هستند (شکل ۳ ب). بنابراین برای مقادیر بزرگ x، حفره‌ها به ندرت ظاهر شده و EC تقریبی برای تعداد ماکسیممهای X(t) بالاتر از سطح x و درون T است. با زیادتر شدن مقدار x و نزدیک شدن آن به مقدار ماکسیمم کل X(t) درون T، $X_{\max}$، مشخصهٔ اویلر مقدار صفر را خواهد داشت اگر $X_{\max} < x$ و اگر $X_{\max} > x$، در این صورت مشخصهٔ اویلر مقدار یک را خواهد داشت (شکل ۳ ج). لذا به نظر می‌رسد که امید ریاضی مشخصهٔ اویلر تقریب مناسبی برای (۱۲) باشد، یعنی:

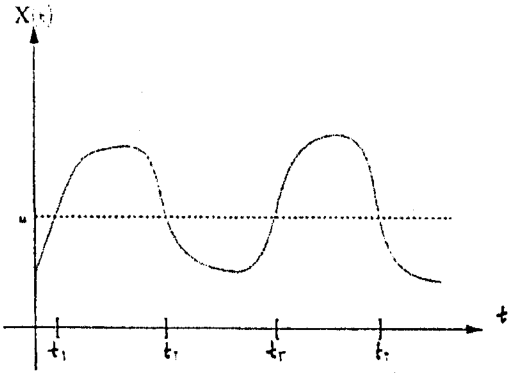
$$P\{X_{\max}\ge x\}\approx E\{\varphi(A_x(T))\}$$

که $\varphi(A_x(T))$ مشخصهٔ اویلر مجموعهٔ برون گشت فرایندی تصادفی، درون مجموعهٔ T و بالاتر از سطح x است.

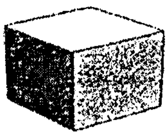
این موضوع در حالت یک بعدی توسط هازفر [۶] به صورت شهودی نشان داده شده است. همچنین ادلر این موضوع را برای میدانهای تصادفی گاوسی تحت شرایطی خاص ثابت کرده است. اما در مورد رفتار این تقریب برای میدانهای تصادفی χ^2، F و t بررسیهایی صورت نگرفته است. در اینجا با استفاده از شبیه سازی این میدانها، به بررسی این موضوع پرداخته‌ایم. روش کار بدین صورت بوده است که ابتدا میدان تصادفی مورد نظر، n بار شبیه سازی شده و هر بار، ماکسیمم مقدار میدان تصادفی یادداشت شده است. سپس با استفاده از نموداری که در آن یک منهای مقدار تابع توزیع تجمعی نمونه و نیز مقدار تقریب مورد نظر (امید ریاضی مشخصهٔ اویلر) در کنار هم رسم شده‌اند، مسئله مورد بررسی قرار گرفته است. بر روی محور افقی مقادیر یادداشت شدهٔ حاصل از حداکثر مقدار میدان تصادفی قرار گرفته‌اند. چون تابع تقریب، به ازای همهٔ مقادیر به دست آمده، تابع احتمال نیست، لذا تنها مقادیری از ماکسیممهای یادداشت شده را در رسم نمودار در نظر گرفتیم که به ازای آن مقادیر، تابع تقریب کوچکتر و یا برابر با یک باشد. در نمودارهای ۱ـ ٤ شکل، نتایج حاصله، گواهی در تأیید نتایج حاصله را برای میدانهای گاوسی و t، با درجات هموار (S) متفاوت، نشان می‌دهد. بدین معنی که برای مقادیر بزرگ، تقریب مورد نظر در مورد میدان تصادفی گاوسی به خوبی عمل می‌کند. این بررسیها حاکی از آن بود که با هموارتر شدن میدان، تقریب مورد نظر بهتر است. در مورد میدان تصادفی t ،همان گونه که نمودارهای ۳ و ٤ نشان می‌دهند، تقریب مورد نظر چندان مناسب نیست، اما با افزایش درجهٔ آزادی و میزان هموار میدان، تقریب مناسبتر می‌شود. خلاصهٔ نتایج حاصل از تمامی نمودارها (در اینجا تنها ٤ مورد آن نمایش داده شده است) در جداول ۱ـ ۳ آورده شده اند. با کمک این جداول دیده می‌شود که برای میدانهای تصادفی χ^2 و F، با افزایش درجهٔ آزادی و نیز میزان هموار میدان، تقریب مورد نظر بهتر است.

از آنجایی که کاربرد این تقریبها، به عنوان P ـ مقدار در کارهای آماری است، لذا در جداول زیرنقاطی که مقدار تابع تقریب در آن نقاط برابر ۰/۰۱، ۰/۰۵ و ۰/۱ هستند، نمایش داده شده‌اند. همچنین تفاضل بین مقدار تابع تقریب و یک منهای مقدار تابع توزیع تجمعی نیز در این نقاط نشان داده شده است. این مقادیر، تحلیلگر را در بیان مناسب بودن یا نبودن تقریب مورد نظر یاری می‌کند.

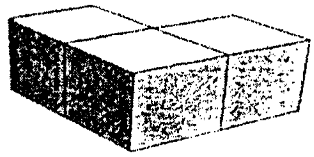
در شکل ۳ [۹] (الف) تصویری ساختگی در حالت دو بعدی (ماکسیمم کل با G و ماکسیمم موضعی با L) نشان داده شده است. قسمت (ب) مجموعهٔ برون گشت (نواحی تیره) بالاتر از آستانهٔ $t = 3/3$، را نشان می‌دهد. چون مجموعهٔ فرامرزی، اشتراکی با کران ندارد، لذا مشخصهٔ اویلر تعداد نواحی مجزا منهای تعداد حفره‌ها را به دست می‌دهد و بنابراین $\varphi_t = 4$. در قسمت (ج) همین که آستانه افزایش یابد، $t = 4/22$، حفره‌ها ظاهر نشده و مشخصهٔ اویلر برابر تعداد ماکسیممهای موضعی است و لذا $\varphi_t = 4$. در قسمت (د) در سطوح بالاتر، $t = 5/6$، مشخصهٔ اویلر مقدار یک را می‌گیرد اگر ماکسیمم کل از t تجاوز کند، و در غیر این صورت مقدار صفر را خواهد داشت و بنابراین $\varphi_t = 1$.



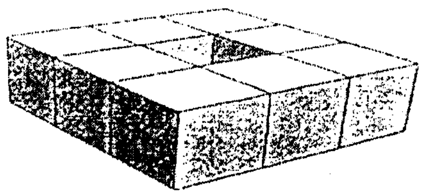
شکل ۱



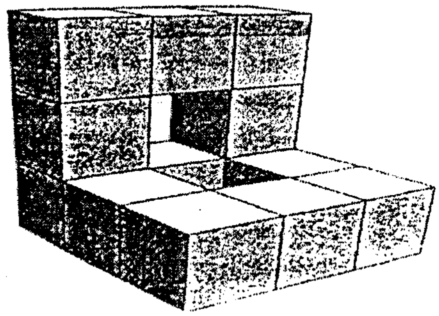
(الف) ۱=۱−۶+۱۲−۸



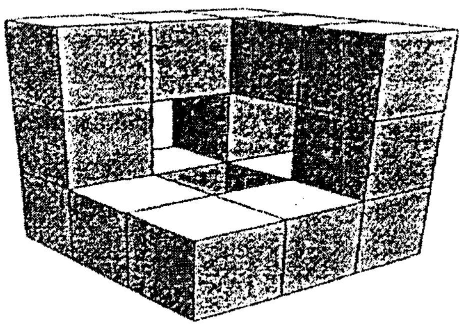
(ب) ۱=۳−۱۶+۲۸−۱۶



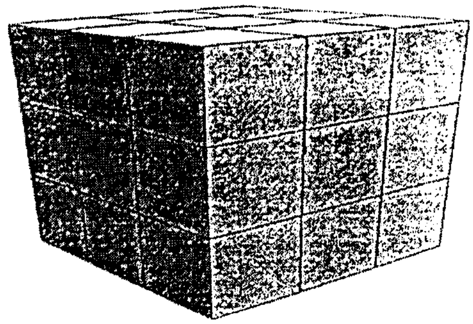
(ج) ۰=۸−۴۰+۶۴−۳۲



(د) ۱−=۱۳−۶۴+۱۰۰−۴۸

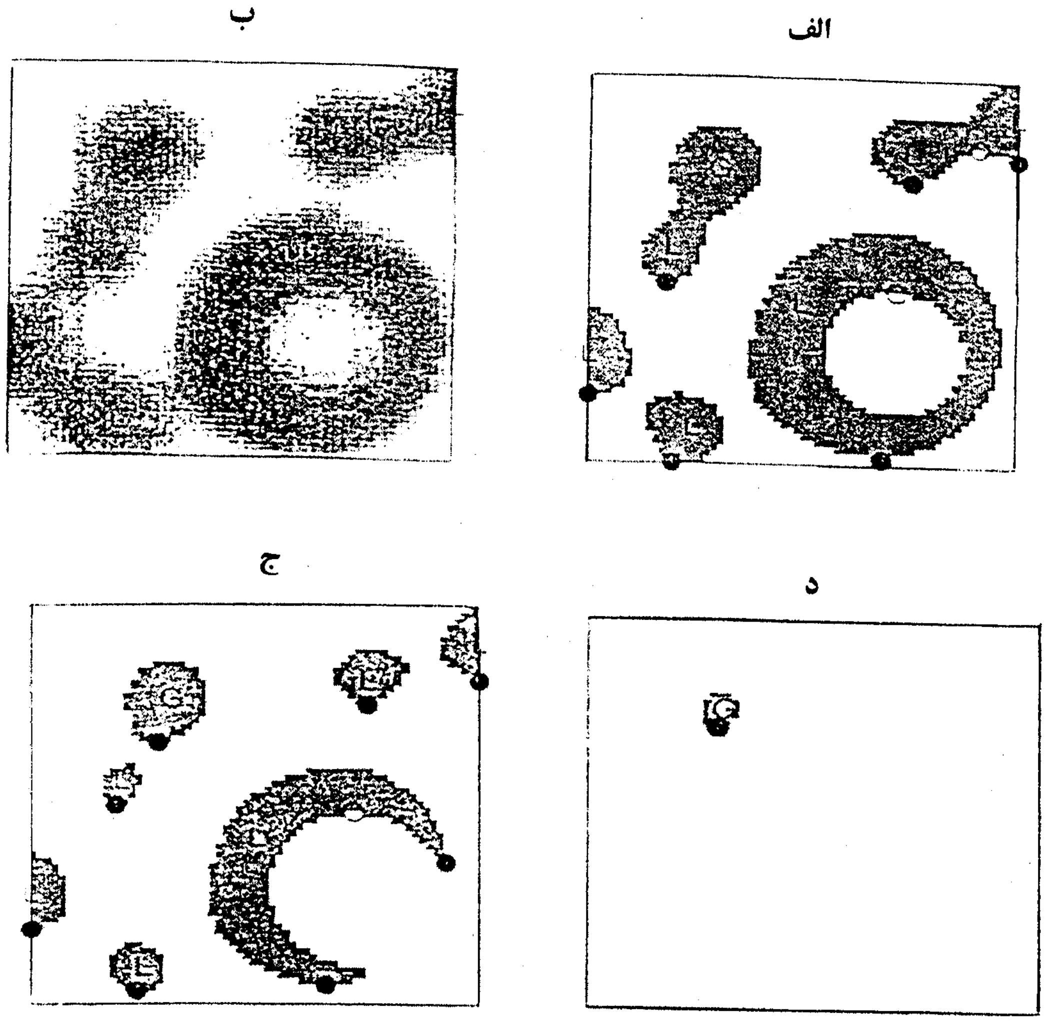


(ه) ۲−=۱۶−۷۸+۱۲۰−۵۶

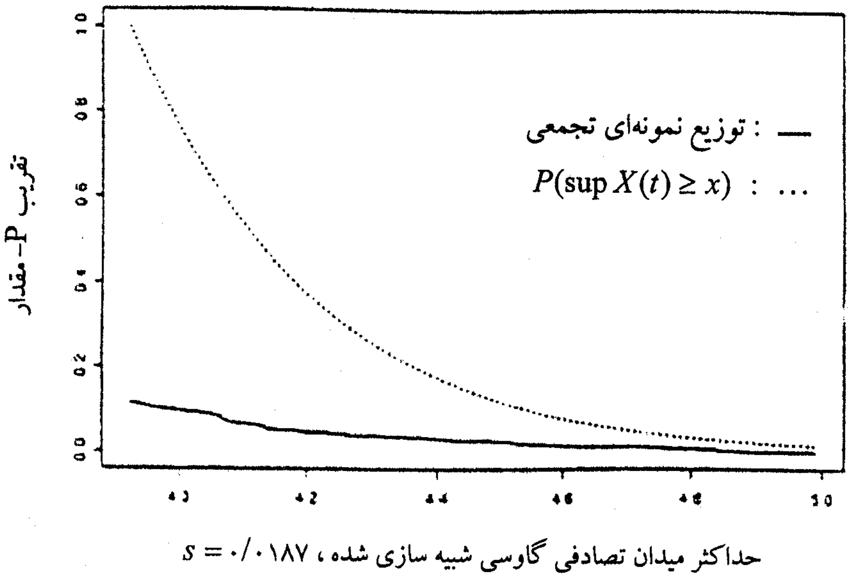


(و) ۲=۲۶−۱۰۸+۱۴۴−۶۴

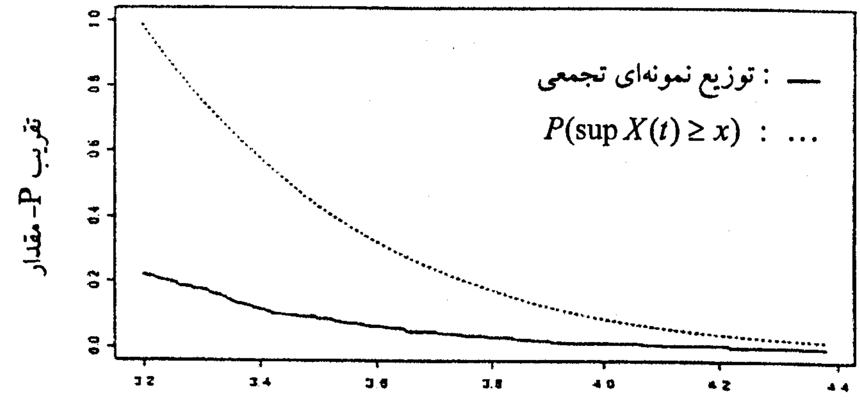
شکل ۲. مشخصهٔ اویلر چندوجهی [۱۲]



شکل ۳

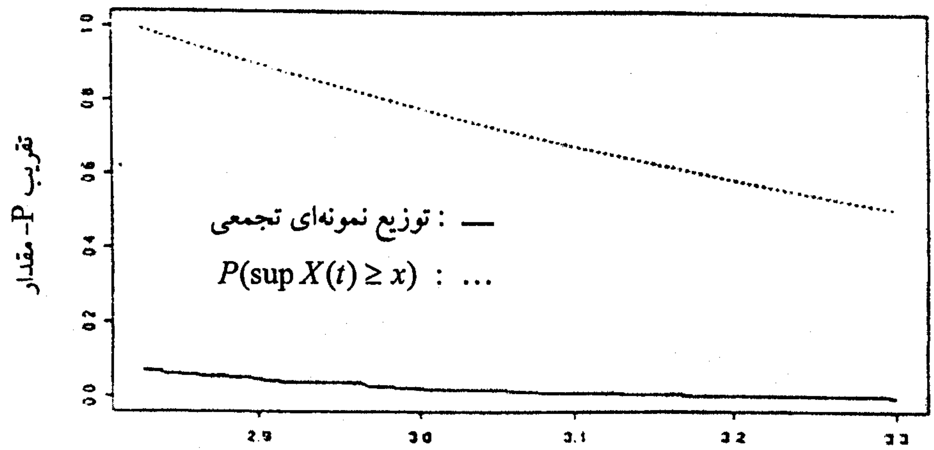


شکل ۱-٤ (بررسی تقریب $P(\sup_{t\in T} X(t) \geq x)$ ، میدان گاوسی، $S_{11}=1$)



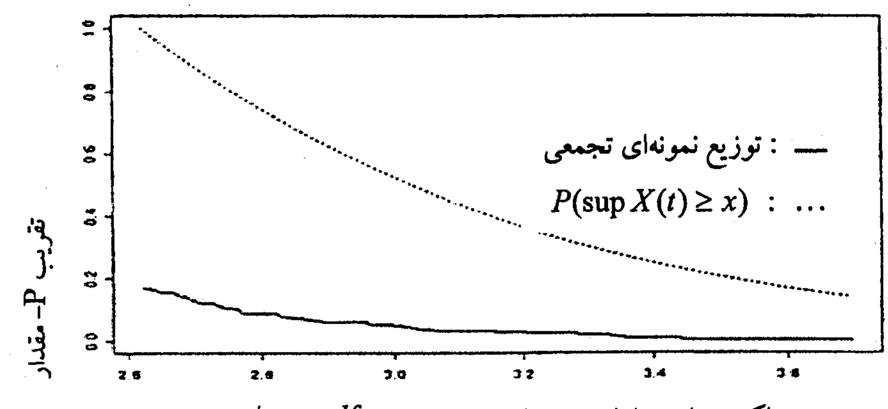
حداکثر میدان تصادفی گاوسی شبیه سازی شده با $S_{۱۱} = ۰/۱۱۷$

شکل ۲-٤ (بررسی تقریب $P(\sup_{t\in T} X(t) \geq x)$ ، میدان گاوسی، $S_{۱۱} = ۰/۱۱۷$)



حداکثر میدان تصادفی شبیه سازی شده با $s = ۰/۰۱۸۷, df = ۱۵$

شکل ۳-٤ $P(\sup_{t\in T} X(t) \geq x)$ ، **میدان t،** ($S_{۱۱} = ۰/۰۱۸۷$ ، $df = ۱۵$)



حداکثر میدان تصادفی شبیه سازی شده با $s = ۰/۰۱۸۷, df = ۲۵$

شکل ٤-٤ $P(\sup_{t\in T} X(t) \geq x)$ ، **میدان t،** ($S_{۱۱} = ۰/۰۱۸۷$ ، $df = ۲۵$)

جدول ۱: نتایج حاصل از شبیه سازی میدانهای تصادفی F

df	s	n	n(۰/۱)	d(۰/۱)	n(۰/۰۵)	d(۰/۰۵)	n(۰/۰۱)	d(۰/۰۱)
(۱۰,۱۵)	۱	۳۰۰	۱۸/۷۲	۰/۰۹	۲۳/٤٥٦٥٤	۰/۰٤٦٦۷	—	—
	۰/۱۱۷	۲٥۰	۱٤/۰٦٦۱٦	۰/۱	۷/٦٤۲۱	-۰/۲۰۲	—	—
	۰/۰٥۲۱	۳۰۰	۱۰/۸۰۸٦۲	۰/۰۸۳۳	۱۱/۸۳۷۲٤	۰/۰۳٦٦۷	۱۱/۸۳۷۲٤	—
	۰/۰۱۸۷	٤۰۰	۸/۰۹۱۱	۰/۰٤٥	۸/۹۰۰۷۲۳	۰/۰۰۷٥	۱۳/۹٤۷۷۷	—
(۱٥,۱۰)	۱	۳۰۰	٦/۹۱۱۳	۰/۱	—	—	—	—
	۰/۱۱۷	۲٥۰	۲٤/٤۸٤۳۲	۰/۰۸٤	—	—	—	—
	۰/۰٥۲۱	۳۰۰	۲۰/۰۸۸۳۸	۰/۰۹	—	—	—	—
	۰/۰۱۸۷	۲٥۰	۱٥/۲۸۱۳۸	۰/۰۸	۲۲/۰۰۹۹۳	-۰/۰۳٥٤	—	۰/۰۱

جدول ۲: نتایج حاصل از شبیه سازی میدانهای تصادفی χ^2

df	s	n	n(۰/۱)	d(۰/۱)	n(۰/۰۵)	d(۰/۰۵)	n(۰/۰۱)	d(۰/۰۱)
۱۰	۱	٦٥۰	٤۳/۳۹۷۷	۰/۰۷٦۹	٤٥/۹۰٦۹	۰/۰٥	٤۹/۹٦٦٦	۰/۰۰۸٥
	۰/۱۱۷	۲٥۰	۳۷/۸۱۲۲	۰/۰۷٦	۳۹/۳٦۲۸	۰/۰۳۸	٤٥/۱٦۲۹	۰/۰۱
	۰/۰٥۲۱	۲٥۰	۳٥/٦۹۲۷	۰/۰۹۲	۳۷/٦۰۲۰۹	۰/۰٤٦	٤٤/۰۳	۰/۰۱
	۰/۰۱۸۷	٥۰۰	۳۱/۸٤۰۳۳	۰/۰٦٦	۳٤/۸۸۰۲	۰/۰۳۸	٤٤/۰٥۷۱	۰/۰۱
۱٥	۱	۳۰۰	٥۲/۹۳۳۲	۰/۰۸۳۳	٥٥/٦۳۸۱	۰/۰٤٦۷	—	—
	۰/۱۱۷	۲٥۰	٤٦/۹۰٥۱	۰/۰۸	٥۰/٥۳٥٥	۰/۰٥	—	—
	۰/۰٥۲۱	۲٥۰	٤۳/۱٦٦۹	۰/۰٤٤	٤٥/۹٤۳٤	۰/۰۳٤	۲٥/٤	۰/۰۱
	۰/۰۱۸۷	۳۰۰	٤۱/۲۳۷٥	۰/۰۹	٤٤/۲۰۸٤	۰/۰٤٦۷	—	—
۲٥	۱	٥۰۰	۷۰/۱۲۰۷	۰/۰۸۲	۷۱/۹۷۳٦	۰/۰۳٦	۷۹/٦۰۷٥	۰/۰۰۸
	۰/۱۱۷	۱۰۰	٦۳/٤٥۳۲	۰/۰٦	٦٦/۱۳۰۹	۰/۰۰٦	—	—
	۰٥۲۱	۲٥۰	٦۰/۳۹۱٥	۰/۰۸	۷٤/۸۲	۰/۰٥	۷٤/۸۲	—
	۰/۰۱۸۷	۲٥۰	٥٦/۸۷٥۳	۰/۰۹٦	٦٦/٦۸	۰/۰٥	٦٦/٦۸	—

جدول ۳: نتایج حاصل از شبیه سازی میدانهای تصادفی گاوسی

s	n	$n(\cdot/\backslash)$	$d(\cdot/\backslash)$	$n(\cdot/\cdot\circ)$	$d(\cdot/\cdot\circ)$	$n(\cdot/\cdot\backslash)$	$d(\cdot/\cdot\backslash)$
۱	۵۰۰	٤/٥١٤٨	۰/۰۷۸	٤/۷۳۷۳	۰/۰٤	——	——
۰/۱۱۷	۵۰۰	۳/۹۲۵۹	۰/۰۸٤	٤/۲۱۵۱۱	۰/۰٤٤	——	——
۰/۰۵۲۱	۵۰۰	۳/٦٦۳٦	۰/۰۷٤	۳/۹۱۵۳	۰/۰۰٦	——	——
۰/۰۱۸۷	۵۰۰	۳/۲۵۸۳	۰/۰٦	۳/۵۲٦۳	۰/۰۱	٤/۱۹۳٦۱	۰/۰۱

منابع

[1] Adler, R.J., (1981), *The Geometry of Random Fields,* Wiley, New York.

[2] Adler, R.J., (1999), *On Excursion Sets, Tube Formulae, and Maxima of Random Fields* .

[3] Adler, R.J. and Hasofer, A.M., (1976), *Level Crossings for Random Fields,* Annals of Probability, 4, 1-12.

[4] Anderson, T.W., (1984), *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis,* 2nd Edition, Wiley, New York.

[5] Cressie, N. and Davis, R.W., (1981), *The Suprimum Distribution of Another Gaussian Process,* J. Appl. Prob. 18, 131-138.

[6] Hasofer, A.M., (1978), *Upcrossings of Random Fields, Supplement to Advances in Applied Probability,* 10, 14-21.

[7] Siegmund, D.O. and Worsley, K.J., (1995), *Testing for a Signal With Unkown Location and Scale in a Stationary Gaussion Random Field,* Annals of Statistics, 23, 608-639.

[8] Shafie, Khalil, (1998), Ph.D. Thesis, *The Geometry of Gaussian Rotation Space Random Field,* Department of Mathematics and Statistics, Mcgill University, Montreal.

[9] Worsley, K.J., Evans, A.C., Marrett, S. and Neelin, P., (1992), *A Three Dimensional Statistical Analysis for CBF Activation Studies in Human Brain,* Journal of Cerebral Blood Flow and Metabolism, 12, 900-918.

[10] Worsley, K.J., Evans, A.C.,Marrett, S. and Neelin, P., (1993), *Detecting Changes in Random Fields and Applications to Medical Images,* Journal of the American Statistical Association.

[11] Worsley, K.J., (1994), *Local Maxima and the Expected Euler Characteristic of Excursion Sets of* $\chi^{۲}$, *F and t Fields, Advances in Applied Probability,* 26, 13-42.

[12] Worsley, K.J., (1996), *The Geometry of Random Images,* Chance, 9(1), 27-40.

[13] Worsley, K.J., Marrett, S., Neelin, P.D. and Evans, A.C., (1996), *Searching Scale Space for Activation in PET Images,* Human Brain Mapping, 4, 74-90.

[14] Worsley, K.J., (1998), *Testing for Signals with Unkown Location and Scale in a* $\chi^{۲}$ *Random Field, with an Application to fMRI.*

[۱۵] سمانه قادری، ۱۳۸۰، بررسی تقریب توزیع احتمال حداکثر یک میدان تصادفی با میانگین مشخصهٔ اویلر، رسالهٔ کارشناسی ارشد، دانشگاه شهید بهشتی تهران.