رگرسیون با استفاده از پایگاه اطلاعاتی مشکّک [1]

ماشاالله ماشین‌چی [2]

چکیده

در این مقاله با استفاده از روشهای موجود در نظریه مجموعه‌های مشکک مقدار تخمین یک متغیر وابسته را در حالتی که مقدار متغیر مستقل به صورت مشکک باشد محاسبه می‌کنیم.
همچنین مقدار تخمین یک متغیر وابسته را در حالتی که وابستگی آن به متغیر مستقل به صورت یک پایگاه اطلاعاتی بیان شده باشد ارایه کرده و روشی برای تخمین متغیر وابسته در حالتی که مقدار عددی متغیر مستقل، مفروض باشد ارایه می‌کنیم.

۱ مقدمه

بسیاری از پدیده‌ها تابعی از پیشامدهای دیگرند. مثلاً رشد جمعیت باعث افزایش مصرف می‌شود، عدم رعایت بهداشت در جامعه سبب افزایش بیماریها می‌شود و میزان تولید محصولات کشاورزی تابعی از میزان بارندگی و نوع خاک و عوامل دیگر است. در هر حال در بسیاری از زمینه‌های تحقیقاتی دانستن رابطهٔ بین پدیده‌ها امری اساسی و مورد نیاز است تا رفتار یک یا چند متغیر را بر حسب یک یا چند متغیر دیگر بررسی کنیم. تحت فرضهای مناسب رگرسیون روشی جالب برای بررسی این رابطه‌ها و در نهایت تخمین مقدار عددی یک متغیر مجهول بر حسب سایر متغیرهای معلوم است [۲].
اما موردی را که روشهای رگرسیون به آن نمی‌پردازند حالتی است که پس بدست آوردن منحنی برازش شده بر داده‌ها، مقدار متغیر x به صورت عددی نبوده بلکه به شکل متغیری زبانی مثل «تقریباً زیاد»، «حول و حوش x_0» و غیره باشد که همگی مفاهیمی نادقیق‌اند که به زبان مجموعه‌های مشکک قابل نمایش‌اند. در این مقاله با تلفیقی از روش رگرسیون برای برازش یک منحنی بر مجموعه‌ای از داده‌های مفروض و روشهای ابداع شده در نظریهٔ مجموعه‌های مشکک [۱،۲،۴،۵،۱۱،۱۳] به حل این مسأله پرداخته و با ارایه یک مثال در چگونگی بدست آوردن تخمین y بر حسب متغیر مشکک مفروض x بحث می‌کنیم. در انتهای مقاله با بازبینی مثال ارایه شده برای رگرسیون و آن از نگاه جملات شرطی به

[1] این مقاله را به یاران صمیمی آقایان دکتر شهرام سلیلی و سید عباس ضیایی، به پاس خدمتشان در دانشکدهٔ ریاضی و کامپیوتر دانشگاه شهید باهنر کرمان تقدیم می‌کنم.

[2] ماشاالله ماشین‌چی، دانشکده ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید باهنر کرمان

صورت «اگر–آنگاه»، به معرفی یک پایگاه اطلاعاتی مشکک[۳] پرداخته و بیان می‌کنیم که در برخی مسایل ممکن است رابطهٔ بین y و x به صورت گزاره‌های شرطی اگر–آنگاه یا به عبارتی در قالب یک پایگاه اطلاعاتی مشکک باشد[۱۴]. در این حالت روشهای رگرسیون یا تلفیق روشهای رگرسیون با نظریهٔ مجموعه‌های مشکک کاربرد ندارند و لذا ما در این حالت روش پیدا کردن تخمین y را برای حالتی که x یک مقدار عددی مفروضی باشد ولی رابطهٔ بین y و x به صورت یک پایگاه اطلاعاتی مشکک بیان شده باشد، ارایه می‌کنیم.

۲ پیشنیاز

فرض کنید $(x_i, y_i)\ ;\ i = ۱, ۲, \ldots, n$ داده‌های مفروضی باشند که رابطهٔ بین دو متغیر x و y را نشان می‌دهند. در بسیاری از موارد معادلهٔ یک خط راست می‌تواند وابستگی y را به x نشان دهد. خط راستی که می‌توان به این داده‌ها برازش داد تحت شرایط مناسب، به صورت زیر است

$$\hat{y} = f(x) = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x \qquad (۱)$$

که در آن $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ از حل دستگاه معادلات نرمال:

$$\begin{aligned} \sum_{i=۱}^{n} y_i &= n\alpha + \beta \sum_{i=۱}^{n} x_i \\ \sum_{i=۱}^{n} x_i y_i &= \alpha \sum_{i=۱}^{n} x_i + \beta \sum_{i=۱}^{n} x_i^۲ \end{aligned} \qquad (۲)$$

به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \hat{\beta} &= \frac{n\sum_{i=۱}^{n} x_i y_i - (\sum_{i=۱}^{n} x_i)(\sum_{i=۱}^{n} y_i)}{n\sum_{i=۱}^{n} x_i^۲ - (\sum_{i=۱}^{n} x_i)^۲} \\ \hat{\alpha} &= \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x} \end{aligned} \qquad (۳)$$

با محاسبه $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ خط رگرسیون برازش شده بر داده‌های مفروض، کاملاً مشخص می‌شود. حال فرض کنید که مقدار متغیر x برابر با عدد مشخصی مانند $x_۰$ باشد، آنگاه تخمین y از معادلهٔ (۱) به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\hat{y}_۰ = f(x_۰) = \hat{\alpha}_۰ + \hat{\beta}x_۰$$

البته روشهای رگرسیون تنها به دو متغیر و همچنین برازش یک خط راست منحصر نمی‌شوند و می‌توان آنها را در موارد زیاد دیگری بکار برد. اما موردی را که کتب آماری بدان نمی‌پردازند و در اینجا مورد نظر ما می‌باشد، حالتی است که مقدار متغیر x به صورت یک عدد مشخص نبوده بلکه به شکل متغیری زبانی مانند تقریباً زیاد و حول و حوش $x_۰$ و نظایر آن باشد، که در اینجا آنرا به صورت $\tilde{x}_۰$ نشان می‌دهیم. در این صورت سؤال این است که مقدار $y_۰$ چه خواهد بود؟ چون در این حالت معنی $\hat{y} = f(\hat{x}_۰)$ روشن نمی‌باشد، برای پاسخ به این مطلب نیاز به نظریهٔ مجموعه‌های مشکک و بخصوص اصل توسیع داریم که در اینجا به طور بسیار مختصر برخی از آنها را مرور می‌کنیم. علاقمندان به مطالعهٔ بیشتر می‌توانند به کتابهای [۳،۴،۵،۶،۱۱،۱۳] مراجعه کنند البته در این مقاله از نمادهای مرجع [۱۱] استفاده شده‌است. ما برای اختصار تعریف زیر مجموعه مشکک را دانسته فرض کرده و برای سهولت کار مجموعه همه زیرمجموعه‌های مشکک مجموعه ناتهی X را، که از این به بعد عناصر آنرا مجموعه مشکک می‌نامیم، به صورت $F(X)$ نشان می‌دهیم یعنی

$$F(X) = \{\tilde{A} \mid \tilde{A} : X \to [۰\ ,\ ۱]\}$$

یکی از روشهای ساده و مرسوم برای بیان یک $\tilde{A}$، که آنرا تابع عضویت می‌گوییم، استفاده از «اعداد مشکک مثلثی[۴]» است که به صورت $\tilde{A} = (a, b, c)$ نشان می‌دهیم. در این حالت $\tilde{A} \in F(R)$ و تابع $\tilde{A}$ به صورت زیر تعریف می‌شود، $a, b, c \in R$،

$$\tilde{A}(x) = \begin{cases} ۰ & ,x < a \quad \text{اگر} \\ \frac{x-a}{b-a} & ,a \le x \le b \quad \text{اگر} \\ \frac{c-x}{x-b} & ,b \le x < c \quad \text{اگر} \\ ۰ & ,c \le x \quad \text{اگر} \end{cases}$$

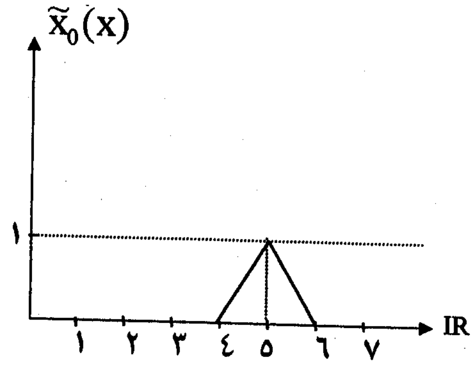
---

[۳] Fuzzy rule-based data base

[۴] Fuzzy triangular numbers

مثال ۱:
فرض کنید $\tilde{x}_۰ \in F(R)$ مجموعه مشکک «حول و حوش ۵» باشد. آنگاه می‌توان $\tilde{x}_۰$ را به صورت عدد مشکک مثلثی $\tilde{x}_۰ = (۴,۵,۶)$ بیان کرد که ضابطه تابع عضویت و نمودار آن به صورت شکل ۱ است.

$$\tilde{x}_۰(x) = \begin{cases} x - ۴ & ۴ \leq x < ۵ \\ -x + ۶ & ۵ \leq x < ۶ \\ ۰ & x < ۴ \text{ یا } x \geq ۶ \end{cases}$$



شکل ۱: مجموعه مشکک $\tilde{X}_0$ حول وحوش ۵

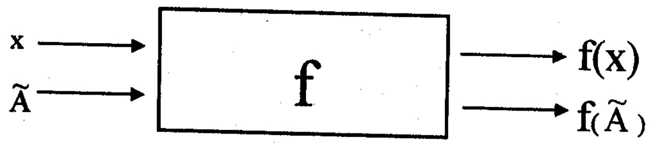
در ادامه این بخش فرض کنید $f : X \to Y$ یک تابع مفروض باشد، آنگاه f یک تابع جدید، که آنرا نیز برای سادگی با f نشان می‌دهیم، به طریق زیر القاء می‌کند

$$f \;:\; F(X) \to F(Y)$$
$$\tilde{A} \longmapsto f(\tilde{A})$$

که در آن

$$f(\tilde{A})(y) = \begin{cases} \sup_{x:f(x)=y} \tilde{A}(x) & ,f^{-۱}(\{y\}) \neq \emptyset \text{ اگر} \\ ۰ & ,f^{-۱}(\{y\}) = \emptyset \text{ اگر} \end{cases} \qquad (۴)$$

مجموعه مشکک $f(\tilde{A}) \in F(Y)$ را که در (۴) تعریف شده است توسیع مستقیم $\tilde{A}$ تحت f گوییم و روند فوق را اصل توسیع[۵] می‌خوانیم. در واقع توسط اصل توسیع می‌توان مفاهیم مختلفی از ریاضیات را مشکک سازی کرد. اصل توسیع را می‌توان چنین تعبیر کرد که اگر رفتار یک سیستم را توسط تابع f مطابق شکل ۲ بیان کنیم، آنگاه این سیستم نه تنها قادر است به ازاء ورودی معمولی x خروجی $f(x)$ را معین کند، بلکه به ازاء ورودی مشکک $\tilde{A}$، می‌تواند خروجی مشکک $f(\tilde{A})$ را نیز مشخص کند. برای مطالعهٔ بیشتر در مورد این دیدگاه به مقاله[۹] مراجعه کنید.



شکل ۲: توجیه اصل توسیع

۳ کاربرد اصل توسیع در رگرسیون

در این بخش با ارایه دو مثال ساده به چگونگی کاربرد اصل توسیع در رگرسیون می‌پردازیم.

مثال ۲:
فرض کنید که رفتار تابع f به صورت جدول زیر مشخص شود

x_i	y_i
۰	۲
۱	۵
۲	۸

جدول ۱: رفتار تابع f توسط سه مشاهده

به عبارتی فرض کنید سه نقطه از تابع $f : R \to R$ مانند جدول ۱ مشخص باشد.
الف) مقدار تخمین $\hat{y}_۰$ برای حالت $x_۰ = ۵$ چقدر است؟
ب) مقدار تخمین $\hat{y}_۰$ برای حالتی که $x_۰$ حول و حوش ۵ باشد چقدر است؟

برای پاسخ به (الف)، می‌توان دید که خط رگرسیون برازش شده بر داده‌های جدول ۱ با استفاده از روابط (۳) به صورت زیر است

$$\hat{y} = f(x) = ۲ + ۳x$$

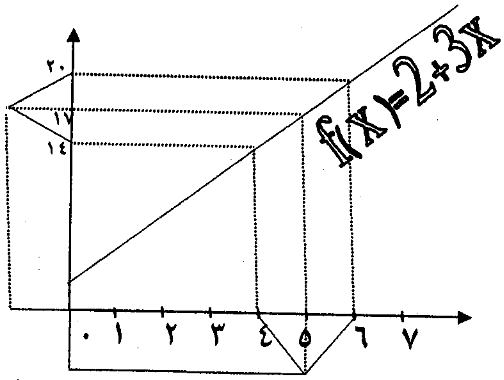
حال با قرار دادن $x = ۵$ در تابع f مقدار $\hat{y}_۰ = f(۵) = ۱۷$ محاسبه می‌شود. اما برای تخمین $\hat{y}_۰$ در حالت (ب) باید مقدار $\tilde{\hat{y}}_۰ = f(\tilde{x}_۰)$ را محاسبه کنیم که در آن $\tilde{x}_۰ \in F(R)$ مجموعه مشکک حول و حوش ۵ است. اگر $\tilde{x}_۰$ را مانند عدد مشکک

---
[۵] Extension principle

مثلثی در مثال۱ به صورت $\tilde{x}_\circ = (۴,۵,۶)$ بگیریم، آنگاه تخمین $\tilde{y}_\circ$ را می‌توان با توجه به اصل توسیع، با استفاده از (۴) و کمی محاسبه، به شکل عدد مشکک مثلثی

$$\tilde{y}_\circ = f(\tilde{x}_\circ) = (۱۴,۱۷,۲۰)$$

بدست آورد، که عبارت است از مجموعه مشکک «حول و حوش ۱۷». البته اگر نخواهیم وارد جزئیات محاسبه شویم می‌توان مقدار $\tilde{y}_\circ$ را از روی شکل۳ و با توجه به اینکه f دارای ضابطهٔ $f(x) = ۲ + ۳x$ است به سادگی ملاحظه کرد



شکل۳: محاسبه‌تخمین $\tilde{y}$ برای یک مقدارمشکک $\tilde{x}_0$

بنابراین در حالت (ب) به جای بدست آوردن یک مقدار عددی برای $\hat{y}_\circ$ یک مقدار مشکک $\tilde{y}_\circ \in F(R)$ را بدست می‌آوریم.

مثال ۳:

فرض کنید که رفتار تابع f به صورت جدول زیر مشخص شود

x_i	y_i
۰	۰
۱	۱
۲	۴
۳	۹

جدول۲: رفتار تابع f توسط چهار مشاهده

در اینجا نیز با استفاده از روشهای رگرسیون که از جزئیات آن صرفنظر می‌کنیم، می‌توان دید که منحنی برازش شده بر داده‌های جدول ۲ به صورت زیر است

$$\hat{y} = f(x) = x^۲$$

[۶] Defuzzification

لذا اگر مجدداً $\tilde{x}_\circ = (۴,۵,۶)$ مجموعه مشکک «حول و حوش ۵» باشد، آنگاه تخمین $\tilde{y}_\circ = f(\tilde{x}_\circ)$ را می‌توان با توجه به اصل توسیع و با استفاده از (۴) به صورت

$$\tilde{y}_\circ = f(\tilde{x}_\circ) = (۱۶,۲۵,۳۶)$$

محاسبه کرد که تعبیر آن عبارت است از مجموعه مشکک «حول و حوش ۲۵».

تذکر۱. در مثال۲(ب) و مثال۳ چنانچه بخواهیم مقداری عددی برای $\tilde{y}_\circ$ بدست آوریم لازم است که $\tilde{y}_\circ$ را «مشکک زدایی[۶]» نماییم.

۴ تخمین با استفاده از پایگاه اطلاعاتی مشکک

برای اینکه روشن کنیم منظور از یک پایگاه اطلاعاتی چیست ابتدا به مثال۲ برمی‌گردیم. همانطور که در این مثال ملاحظه می‌کنیم تابع f توسط سه مشاهده به صورت (x,y) مشخص می‌شود، که می‌توان آنها را به شکل گزاره‌های شرطی زیر بیان کرد

(۵)
- قاعده اول: اگر $x = ۰$، آنگاه $y = ۲$،
- قاعده دوم: اگر $x = ۱$، آنگاه $y = ۵$،
- قاعده سوم: اگر $x = ۲$، آنگاه $y = ۸$،

هنوز هم می‌توان در گزاره‌های (۵) بازنگری کرده آنها را به صورت زیر بیان کرد:

(۶)
- قاعده اول: اگر xحول و حوش صفر باشد، آنگاهyحول و حوش صفر است.
- قاعده دوم: اگر xحول و حوش یک باشد، آنگاهyحول و حوش پنج است.
- قاعده سوم: اگر xحول و حوش دو باشد، آنگاهyحول و حوش هشت است.

به آنچه که در (۶) آمده است یک «پایگاه اطلاعاتی مشکک» گوییم. خوانندهٔ علاقمند به این موضوع می‌تواند به فصل‌های چهار و پنج کتاب[۱۳] مراجعه کند. این موضوع اساس کار

کنترل‌کننده‌های مشکک نیز می‌باشد که خواننده برای آگاهی از این موضوع نیز می‌تواند به مقالهٔ[۵] مراجعه کند. در حالت کلی یک پایگاه اطلاعاتی مشکک را می‌توان به شکل زیر بیان کرد:

قاعدهٔ iام: اگر x_1 به صورت A_1^i، x_2 به صورت A_2^i، ...، x_n به صورت A_n^i باشد، آنگاه
y_1 به صورت B_1^i، y_2 به صورت B_2^i، ...
(۷) y_m به صورت B_m^i است،
که در آن $i = 1, 2, \dots, l$ و هر کدام از B_i^j, A_i^jها مجموعه‌های مشکک مفروضی هستند.

قواعد (۷) را شکل متعارف یک پایگاه اطلاعاتی مشکک با ورودیهای چندگانهٔ x_i و خروجیهای چندگانهٔ y_i گویند. در واقع مسئله ما این است که با توجه به قواعد (۷)، تخمین (یا استنتاج) متغیرهای خروجی $y_1, y_2, \dots, y_m$ را بدست آوریم در حالی که بدانیم مقدار متغیرهای ورودی $x_1, \dots, x_n$ به ترتیب عبارتند از $A'_1, A'_2, \dots, A'_n$.
که در آن A_i'ها همگی مجموعه‌های مشکک مفروضی هستند.

تذکر۲. به منظور بدست آوردن تخمین متغیرهای خروجی دو روش (الف) و (ب) به شرح زیر وجود دارد که در رسالهٔ[۱۲] آمده‌اند

الف) ابتدا از هر قاعده در (۷) استنتاج کرده و سپس همهٔ استنتاجها را همسو می‌کنیم،

ب) ابتدا همه قواعد در (۷) را در یک قاعده همسو کرده و سپس از این قاعده استنتاج می‌کنیم.

سپس

ج) پس از انتخاب یکی از مرحله‌های (الف) یا (ب) عملگرهای «و[۷]»، «یا[۸]» و «همسو ساز[۹]» که در قواعد (۷) در قسمت (الف) و (ب) ظاهر می‌شوند داریم. روش معمول این است که برای «و» عملگر min، برای «یا» و «همسو ساز» عملگر max را انتخاب کنند که به آنها عملگرهای «زاده» نیز می‌گویند.

و بالاخره

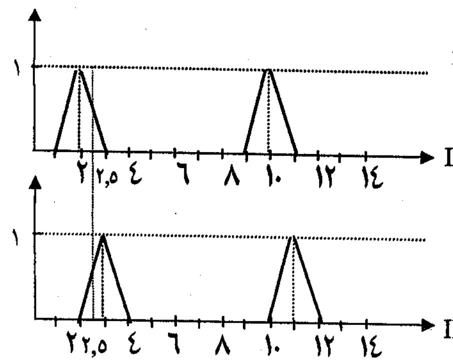
د) پس از انجام مرحله (ج) و بدست آوردن تخمین (یا خروجی) نهایی به صورت یک مجموعهٔ مشکک به مشکک زدایی این خروجی می‌پردازیم. روشهای متعددی برای این کار وجود دارد که علاقمندان می‌توانند به فصل هشت کتاب [۱۳] و همینطور کتاب‌های [۱۴،۱۵] مراجعه کنند.

حال برای روشن شدن مطالب این بخش و برای جلوگیری از طولانی شدن مقاله از توضیح بیشتر در مورد جزئیات این بخش صرفنظر کرده و صرفاً به ارایه یک مثال ساده می‌پردازیم.

مثال ۴:
یک سیستم ورودی–خروجی با یک ورودی x و یک خروجی y براساس یک پایگاه اطلاعاتی مشکک با دو قاعده زیر مفروض است. برای ورودی $x_0 = 2/5$ مقدار تخمین $\hat{y}_0$ چقدر است؟

قاعدهٔ اول: اگر x «حول و حوش ۲» باشد،
آنگاه y «حول و حوش ۱۰» است.

قاعدهٔ دوم: اگر x «حول و حوش ۳» باشد،
آنگاه y «حول و حوش ۱۱» است.



شکل۴: یک سیستم ورودی_خروجی براساس دوقاعده

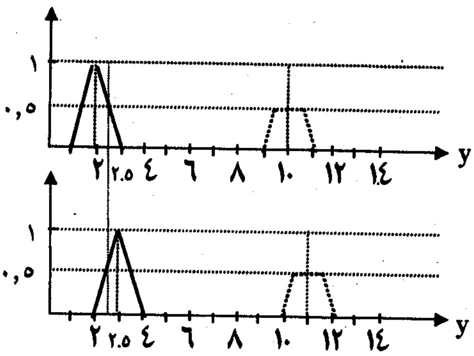
حال برای بدست آوردن مقدار خروجی (تخمین) y از روش (الف) در تذکر ۲ استفاده می‌کنیم. ابتدا از نقطهٔ $x_0 = 2/5$ به موازات محور قائم، عمودی رسم می‌کنیم تا با دو مثلث در مؤلفه‌های ورودی دو قاعدهٔاول و دوم برخورد کند. سپس از آن در محل برخورد دو خط به موازات محور افقی رسم کرده تا با دو مثلث در مؤلفه‌های خروجی در دو قاعدهٔ اول و دوم برخورد کند و دو ذوزنقه بدست آید. تعبیر این است که خروجی قاعدهٔ

[۷] And
[۸] Or
[۹] Aggregator

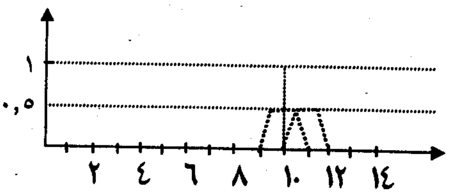
اول یک مجموعهٔ مشکک است که توسط ذوزنقه‌ای با خط پر در شکل ۵ و خروجی قاعدهٔ دوم یک مجموعهٔ مشکک است که توسط ذوزنقه‌ای نقطه‌چین در شکل ۵ مشخص شده‌اند. با این عمل از هر قاعده بطور جداگانه یک استنتاج انجام دادیم و لذا دو خروجی داریم حال باید این دو خروجی را همسو کنیم. در اینجا با استفاده از قسمت (ج) در تذکر ۲ از عملگر max استفاده می‌کنیم و لذا خروجی حاصل از ورودی $x_\circ = ۲/۵$ به صورت یک مجموعهٔ مشکک که در شکل ٦ به صورت یک ذوزنقه رسم شده است بدست می‌آید. در نهایت محل مشکک زدایی جواب خروجی، که مثلاً می‌تواند مرکز ثقل ذوزنقه یا مقدار متوسط ۹ و ۱۲ یعنی ۱۰/۵ باشد که ما مقدار ۱۰/۵ را انتخاب می‌کنیم. دقت شود که اعتقاد ما به این جواب به میزان ۰/۵ یعنی درجه عضویت ۱۰/۵ در جواب خروجی در شکل ٦ است. این موضوع بدین علت است که مقدار ورودی یعنی $x_\circ = ۲/۵$ نیز با درجه عضویت ۰/۵ در ورودی هر کدام از دو قاعده اول و دوم صادق است.

۵ نتیجه‌گیری

در این مقاله ضمن ارایه کاربرد مجموعه‌های مشکک در رگرسیون به حالتی پرداختیم که رابطهٔ بین متغیر وابسته y و متغیر مستقل x به صورت یک پایگاه اطلاعاتی مشکک مفروض باشد که در آن نمی‌توان از روشهای رگرسیون برای تخمین y استفاده کرد. لذا بایستی روشهای نظریهٔ مجموعه‌های مشکک را در آنها بکار برد. مثال‌های ارایه شده در این مقاله همگی دارای یک متغیر وابسته y و یک متغیر مستقل x بودند ولی این روشها را می‌توان برای حالتی که چندین متغیر وابسته و چندین متغیر مستقل وجود داشته باشد نیز بکار برد. لازم به ذکر است که معمولاً راحت‌ترین حالت هنگامی است که فقط یک متغیر خروجی داشته باشیم که به صورت تابعی معمولی از متغیرهای مستقل بیان شده باشد. روش پایگاه اطلاعاتی مشکک برای درون‌یابی توابع نیز می‌تواند کاربرد داشته باشد[۸]. این دیدگاه کاربردهای وسیعی منجمله در بهینه‌سازی دارد که نگارنده نیز اخیراً در حال مطالعهٔ این موضوع می‌باشد. آنچه که در این مقاله ارایه شد برداشت شخصی مؤلف از منابع مختلف بوده است که آنها را به سلیقهٔ خود طوری تنظیم کرده است که قابل استفاده برای علاقمندان بیشتری گردد. امید که اینچنین باشد.



شکل۵: محاسبه‌خروجی برای‌هر یک‌ازدوقاعده اول‌ودوم



شکل۶: همسوسازی دو خروجی بدست آمده در شکل۵

مراجع

[۱] ارقامی، ناصر رضا؛ مروری بر رگرسیون فازی، گزارش اولین سمینار مجموعه‌های مشکک و کاربردهای آن، دانشگاه شهید باهنر کرمان، ۱۳۷۱.

[۲] رضائی، عبدالمجید و سلطانی، افشین؛ مقدمه‌ای بر تحلیل رگرسیون کاربردی، مرکز نشر دانشگاه صنعتی اصفهان، ۱۳۷۷.

[۳] زاهدی، مرتضی؛ تئوری مجموعه‌های فازی و کاربردهای آن، نشر کتاب دانشگاهی، ۱۳۷۸.

[۴] کاسکو، بارت؛ تفکر فازی، ترجمهٔ علی غفاری و سایرین، انتشارات دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی، ۱۳۷۷.

[۵] طاهری، سید محمود؛ آشنایی با نظریهٔ مجموعه‌های فازی، انتشارات جهاد دانشگاهی مشهد، ۱۳۷۵.

[۶] طاهری، سید محمود؛ کنترل فازی، مقاله در دست چاپ، دانشگاه صنعتی اصفهان، ۱۳۷۹.

[۷] ماشین‌چی، ماشاالله؛ استدلال تقریبی و عملگرهای استلزام کارگاه ریاضیات فازی، ۲۶امین کنفرانس ریاضی کشور، دانشگاه شهید باهنر کرمان، صص ۱۱۶—۹۱، ۱۳۷۴.

[۸] ماشین‌چی، ماشاالله و سایرین؛ درون‌یابی توابع با استفاده از کنترل‌کننده‌های فازی، ۲۶امین کنفرانس ریاضی کشور، صص ۲۲۷—۲۲۱، ۱۳۷۴.

[۹] ماشین‌چی، ماشاالله؛ ریاضیات مفاهیم نادقیق و سیستمهای هوشمند، گزارش کامپیوتر، جلد ۱۶، شماره ۱۳۰، صص ۳۰—۲۵، ۱۳۷۵.

[۱۰] ماشین‌چی، ماشاالله؛ تاریخچهٔ مختصری از ریاضیات مشکّک، اندیشهٔ آماری، جلد ۴، شماره ۱، صص ۱۴—۱۰، ۱۳۷۸.

[۱۱] ماشین‌چی، ماشاالله؛ مجموعه‌های مشکک، انتشارات دانشگاه شهید باهنر کرمان، ۱۳۷۹.

[۱۲] ناسوتی فرد، علیرضا؛ عملگرهای عطف و استلزام غیر استاندارد در فرآیند چند قاعده‌ای استنتاج، رسالهٔ کارشناسی ارشد، دانشگاه شهید باهنر کرمان، ۱۳۷۵.

[۱۳] وانگ، لی؛ سیستم‌های فازی و کنترل فازی و کاربردهای آن، ترجمهٔ محمّد تشنه‌لب و سایرین، انتشارات دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی، ۱۳۷۷.

[14] Bardossy, A. and Duckstein, L.; Fuzzy rule-based modeling with applications to geophysical, *Biological and Engineering Systems*, CRC Press, 1995.

[15] Jamshidi, M., Vadiee, N. and Ross, T.J.; Fuzzy logic and control, *Software and hardware applications*, Vol. 2, Prentic Hall International Edition, 1993.