آزمون معکوس‌پذیری زنجیر مارکف بر اساس آزمون نیکویی برازش [۱]

مریم شریف‌دوست [۲] ، نادر نعمت‌الهی [۳] ، عین‌ا... پاشا [۴]

چکیده:

در این مقاله یک روش ساده برای آزمون معکوس‌پذیری [۵] زنجیرهای مارکف بر اساس مقایسه‌ی رفتار زنجیر مارکف با زنجیر زمان معکوس [۶] آن و بر اساس آزمون نیکویی برازش، بدون هیچ محدودیتی معرفی می‌شود. سپس با استفاده از شبیه‌سازی، صحت روش جدید را ارزیابی کرده و در انتها یک مثال عددی آورده می‌شود.

واژه‌های کلیدی: زنجیر مارکف، معکوس‌پذیری، زنجیر زمان معکوس، آزمون نیکویی برازش.

۱ مقدمه

یک فرآیند تصادفی، معکوس‌پذیر نامیده می‌شود اگر رفتار آماری فرآیند با رفتار آماری فرآیند معکوس شده‌ی آن یکسان باشد. معکوس‌پذیری موضوع مورد علاقه اقتصاددانان و دانشمندان علوم فیزیک می‌باشد.

در سال‌های اخیر، اقتصاددانان به عدم معکوس‌پذیری بسیاری از پدیده‌های اقتصادی پی برده‌اند و سعی در یافتن روش‌های مناسب جهت تشخیص معکوس‌پذیری این پدیده‌ها دارند. رابینسون [۱۱] معیاری بر اساس آنتروپی بیان کرد که می‌توانست برای آزمون معکوس‌پذیری نیز استفاده شود. رامسی و روتمن [۱۰] با پیوند تعریف تقارن دوره‌های تجاری در اقتصاد و تعریف معکوس‌پذیری در آمار، آزمونی ارایه نمودند که نیاز به وجود گشتاور ششم داشت که اصولا این شرط در داده‌ها کمتر دیده می‌شود. پس از آن هینیچ و روتمن [۷] آزمونی به نام حوزه فراوانی معرفی کردند. چن و همکاران [۴] کلاسی از آزمون‌ها را بر اساس توابع مشخصه‌ای در نظر گرفتند که نیاز به وجود هیچ گشتاوری نداشت، ولی بر پایه یک توابع وزنی g بود که با تغییر g، آماره آزمون تغییر می‌کرد و بر اساس آن چن و کوآن [۵] مشاهده کردند که شاخص سهام معکوس‌پذیر است.

دو آزمون مهم رامسی و روتمن [۱۰] و چن و همکاران [۴]، که مورد توجه اقتصاددانان قرار گرفته است، معکوس‌پذیری فرآیندهای تصادفی را در حالت کلی و بسیار تقریبی آزمون کرده‌اند و به طور یقین نمی‌توانند پاسخگوی آزمون معکوس‌پذیری زنجیرهای مارکف باشند. با توجه به اهمیت بحث معکوس‌پذیری زنجیرهای

[۱] این مقاله به عنوان بخشی از طرح پژوهشی مورد حمایت دانشگاه آزاد اسلامی واحد خمینی‌شهر بوده است.

[۲] گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد خمینی‌شهر

[۳] گروه آمار، دانشگاه علامه طباطبایی تهران

[۴] گروه آمار، دانشگاه تربیت معلم تهران

[۵] Reversibility

[۶] Reversed chain

مارکف در الگوریتم متروپلیس [7] و نمونه‌گیری گیبس [8]، ارایه آزمونی جداگانه برای معکوس‌پذیری فرآیندهایی که خاصیت مارکف دارند و تعداد حالت‌های آن زیاد نیست، مشاهده می‌شود.

شریف‌دوست و محمودی [۱۲] یک آماره‌ی آزمون بر اساس مقایسه‌ی برآورد ماکزیمم درستنمایی دو طرف معادلات تعادلی جزیی [9] معرفی و روشی برای آزمون معکوس‌پذیری زنجیرهای مارکف بر اساس رفتار آماره‌ی آزمون پیشنهادی، ارایه نمودند. پس از آن شریف‌دوست و همکاران [۱۴] توزیعی تقریبی برای آماره‌ی آزمون پیشنهادی بر اساس روش $\alpha-$ آمیخته [10] و فرض استقلال حدی مولفه‌های آماری معرفی شده، به دست آوردند. آن‌ها [۱۳] توزیع آماری پیشنهادی را بدون فرض استقلال نیز به دست آوردند که برآورد واریانس آماره به روش پیچیده‌ای به دست می‌آمد و نیاز به شرط نادوره‌ای [11] بودن زنجیرهای مارکف داشت.

در این مقاله یک روش ساده برای معکوس‌پذیری زنجیرهای مارکف یا سری‌های زمانی با خاصیت مارکفی، بر اساس آزمون نیکویی برازش و زنجیر زمان معکوس بدون هیچ محدودیتی ارایه می‌شود.

بدین منظور در بخش ۲ تعاریف مقدماتی معکوس‌پذیری زنجیرهای مارکف مطرح می‌گردد. در بخش ۳ آماره‌ی آزمون و توزیع آن معرفی می‌شود. نتایج شبیه‌سازی و مثال کاربردی در بخش ۴ آورده شده است.

[7] Metropolis

[8] Gibbs

[9] Detailed balance equation

[10] α- mixing

[11] aperiodic

۲ معکوس‌پذیری

در حالت کلی برای هر فرآیند تصادفی، معکوس‌پذیری به صورت زیر تعریف می‌شود:

تعریف ۱ فرآیند تصادفی $X = \{X(t) : t \in \mathbb{R}\}$ معکوس‌پذیر است اگر به ازای هر n و s و هر $t_1 < t_2 < ... < t_n$ رابطه‌ی زیر برقرار باشد:

$$\{X(t_1), X(t_2), ..., X(t_n)\} \stackrel{d}{=} \{X(s-t_1), X(s-t_2), ..., X(s-t_n)\}$$

(منظور از حرف d، این است که دو طرف تساوی هم‌توزیع هستند.)

از آن‌جایی که هر فرآیند تصادفی معکوس‌پذیر ماناست [۸]، پس معکوس‌پذیری را در زنجیرهای مارکف مانا جستجو می‌کنیم و بنابراین در این مقاله زنجیر مارکف مانای تحویل‌ناپذیر $X = \{X(n) : n \in Z\}$ با فضای حالت $E = \{1, 2, ..., m\}$، ماتریس احتمال انتقال $P = (P_{ij})_{i,j=1}^m$ و توزیع مانای $\pi = (\pi(1), \pi(2), ..., \pi(m))$ را در نظر می‌گیریم.

قضیه ۱ (معادلات تعادلی جزیی) [۸] زنجیر مارکف تحویل‌ناپذیر مانای $X = \{X(n) : n \in Z\}$ معکوس‌پذیر است اگر و فقط اگر به ازای هر i و j در فضای حالت داشته باشیم:

$$\pi(i)P_{ij} = \pi(j)P_{ij} \qquad (1)$$

معادله‌ی (۱) به معادله‌ی تعادلی جزیی مشهور است.

پس یک راه برای بررسی معکوس‌پذیری زنجیرهای مارکف زمان گسسته، یافتن توزیع مانا با توجه به حل دستگاه معادلات خطی $\pi = \pi P$ و سپس بررسی شرط (۱) می‌باشد.

مثال ۱ زنجیر مارکف با فضای حالت $E = \{1,2\}$ و ماتریس احتمال انتقال $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ را در نظر می‌گیریم. از حل دستگاه معادلات خطی $\pi = \pi P$، توزیع مانای $\pi = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ نتیجه می‌شود و با بررسی شرط (۱) می‌بینیم که زنجیر فوق معکوس‌پذیر است.

قضیه ۲ (معیار کولموگروف[12]) [۵] زنجیر مارکف مانای X معکوس‌پذیر است اگر و فقط اگر حاصلضرب تمام احتمالات انتقال هر نقطه به خودش برابر با حاصلضرب احتمالات انتقال، با تغییر جهت مسیر باشد؛ به عنوان مثال برای هر حالت i و هر مسیر دلخواه $(i, i_1, i_2, ..., i_k, i)$ معیار کولموگروف می گوید:

$$P_{i,i_1} P_{i_1,i_2} ... P_{i_k,i} = P_{i,i_k} P_{i_k,i_{k-1}} ... P_{i_2,i_1} P_{i_1,i}$$

در بررسی معکوس‌پذیری با استفاده از معیار کولموگروف، هر چند نیاز به حل دستگاه معادلات خطی برای یافتن توزیع مانای π نیست، اما باید تمام مسیرهای رسیدن هر نقطه به خودش بررسی گردد.

مثال ۲ در زنجیر مارکف با فضای حالت $E = \{1,2,3\}$ و ماتریس احتمال انتقال $P = \begin{bmatrix} 0 & 0/6 & 0/4 \\ 0/1 & 0/8 & 0/1 \\ 0/5 & 0 & 0/5 \end{bmatrix}$، راه‌های رسیدن حالت ۱ به خودش را بررسی می‌کنیم. در مسیر $1 \to 3 \to 2 \to 1$ حاصلضرب احتمال انتقال مقدار $P_{12}P_{23}P_{13} = 0/03$ می‌باشد، در حالی که در مسیر عکس، حاصلضرب احتمال انتقال برابر با $P_{13}P_{23}P_{21} = 0$ است. پس این زنجیر معکوس‌پذیر نمی‌باشد.

قضیه ۳ (معیار مک‌کاسلند) [۹] زنجیر مارکف X معکوس‌پذیر است، اگر به ازای تمام i و j در فضای حالت E، ماتریس احتمال توام $\sqcap = P(X_n = i, X_{n'} = j)_{n,n'=1}^{m}$ یک ماتریس متقارن باشد.

هر چند در روش مک‌کاسلند [۹] نیاز به یافتن توزیع مانای زنجیر و بررسی تمام مسیرهای رسیدن هر حالت به خودش را ندارد، اما روش به دست آوردن ماتریس $\sqcap$ مطرح نشده و هیچ آزمونی بر اساس این روش ارایه نگردیده است.
البته با استفاده از زنجیر زمان معکوس، معکوس‌پذیری را می‌توان به طور ساده‌تری تعریف کرد. بدین منظور ابتدا تعریف زنجیر زمان معکوس را در زیر می آوریم.

تعریف ۲ زنجیر مارکف $X = \{X(n) : n \in Z\}$ را در نظر می گیریم. زنجیر $X^* = \{X^*(n) : n \in Z\}$ را زنجیر زمان معکوس X می‌نامند، اگر به ازای اعداد صحیح n و s، $X^*(n) = X(s - n)$.

---
[12] Kolmogorov

قضیه ۴ اگر $X=\{X(n):n\in Z\}$ زنجیر مارکف همگن با فضای حالت $E=\{۱,۲,...,m\}$ باشد آن‌گاه:

الف) X^* زنجیر مارکف است [۸].

ب) در صورتی که زنجیر $X=\{X(n):n\in Z\}$ مانا باشد، زنجیر زمان معکوس X^* نیز دارای همان توزیع ماناست.

ج) اگر $\pi=(\pi(۱),...,\pi(m))$ توزیع مانای زنجیر مارکف باشد، اعضای ماتریس احتمال انتقال X^* به صورت $P^*_{ij}=\frac{P_{ji}\pi(j)}{\pi(i)}$ خواهد بود [۳].

پس خاصیت مارکف و خاصیت مانایی یک زنجیر مارکف با تغییر جهت زمان حفظ می‌شود. اما دلیلی ندارد که ماتریس احتمال انتقال یکسان ایجاد شود؛ به عبارت دیگر ممکن است رفتار فرآیند با تغییر جهت زمان تغییر کند، ولی توزیع مانا ثابت باقی بماند.

قضیه ۵ زنجیر مارکف تحویل‌ناپذیر X معکوس‌پذیر است اگر ماتریس احتمال انتقال X و X^* یکسان باشد [٦].

۳ آزمون معکوس‌پذیری بر اساس آزمون نیکویی برازش

در این بخش، یک آماره‌ی آزمون مناسب برای معکوس‌پذیری زنجیرهای مارکف زمان گسسته بدون محدودیت ارایه می‌نماییم.

زنجیر مارکف مانای زمان گسسته $X=\{X(n):n\in Z\}$ با فضای حالت $E=\{۱,۲,...,m\}$، ماتریس احتمال انتقال $P=(P_{ij})_{i,j=۱}^m$، توزیع مانای $\pi=(\pi(۱),...,\pi(m))$ و زنجیر زمان معکوس $X^*=\{X^*(n):n\in Z\}$ با فضای حالت $E=\{۱,۲,...,m\}$، $P^*=(P^*_{ij})_{i,j=۱}^m$ و توزیع مانای $\pi=(\pi(۱),...,\pi(m))$ را در نظر می‌گیریم.

یک مسیر نمونه‌ای یا تحقق از زنجیر مارکف به صورت $x_۰,x_۱,...,x_n$، ماتریس تعداد انتقال $n=(n_{ij})_{i,j=۱}^m$ را نتیجه می‌دهد که در آن n_{ij} تعداد انتقال مستقیم مشاهده شده از i به j می‌باشد و $n_{i.}=\sum_{j=۱}^m n_{ij}$ و $n=\sum_{i=۱}^m\sum_{j=۱}^m n_{ij}$. همچنین تحقق فوق، تحقق زنجیر زمان معکوس X^* را به صورت $x^*_۰=x_n,x^*_۱=x_{n-۱},...,x^*_n=x_۰$ مشخص می‌کند.

از آن‌جایی که طبق قضیه ۵، معکوس‌پذیری زنجیر مارکف X معادل با برابری ماتریس‌های احتمال انتقال P و P^* است، پس آزمون معکوس‌پذیری زنجیر مارکف X را به صورت $\left\{\begin{array}{l}H_۰:P^*=P\\H_۱:P^*\neq P\end{array}\right.$ در نظر می‌گیریم.

در آزمون نیکویی برازش فوق، با استفاده از آماره‌ی آزمون زیر که توسط آندرسون و گودمن [۱] برای مقایسه‌ی ماتریس‌های احتمال انتقال زنجیرهای مارکف معرفی شده است، خواهیم داشت:

$$X^۲=\sum_{i=۱}^m\sum_{j=۱}^m\frac{(O_{ij}-E_{ij})^۲}{E_{ij}}\sim\chi^۲(m(m-۱)-z)$$

که در آن O_{ij} تعداد انتقال از i به j در فرآیند زمان معکوس X^*، E_{ij} مقادیر مورد انتظار بر اساس ماتریس P و z تعداد صفرهای ماتریس P است.

اگر n^*_{ij} تعداد انتقال از i به j در تحقق X^* و n_{ij} تعداد انتقال از i به j در تحقق X باشد، پس آماره‌ی آزمون فوق به صورت زیر ارایه می‌شود:

$$X^۲_۰=\sum_{i=۱}^m\sum_{j=۱}^m\frac{(n^*_{ij}-n_{ij})^۲}{n_{ij}}=\sum_{i=۱}^m\sum_{j=۱}^m\frac{(n_{ji}-n_{ij})^۲}{n_{ij}}$$

فرض معکوس‌پذیری رد می‌شود اگر $X_\circ^{\text{۲}} > \chi_\alpha^{\text{۲}}(m(m-\text{۱})-z)$؛ در صورتی که z تعداد صفرهای ماتریس تعداد انتقال و $\chi_\alpha^{\text{۲}}(.)$ چندک مرتبه $\text{۱}-\alpha$ توزیع خی–دو باشد.

یادآوری می‌کنیم که در ماتریس احتمال انتقال $\text{۲}\times\text{۲}$ با یک عنصر صفر، درجه آزادی توزیع خی–دو برابر با عدد یک خواهد شد. به همین دلیل از تصحیح یتس[۱۳] به صورت زیر استفاده می‌کنیم [۲] .

$$X_\circ^{\text{۲}} = \sum_{i=\text{۱}}^{\text{۲}}\sum_{j=\text{۱}}^{\text{۲}} \frac{(|O_{ij}-E_{ij}|-\frac{\text{۱}}{\text{۲}})^{\text{۲}}}{E_{ij}}$$
$$= \frac{(|n_{\text{۱۲}}-n_{\text{۲۱}}|-\frac{\text{۱}}{\text{۲}})^{\text{۲}}}{n_{\text{۲۱}}} + \frac{(|n_{\text{۲۱}}-n_{\text{۱۲}}|-\frac{\text{۱}}{\text{۲}})^{\text{۲}}}{n_{\text{۱۲}}}$$

در بخش بعد به ارزیابی روش آزمون فوق از طریق شبیه‌سازی می‌پردازیم.

۴ شبیه‌سازی

در این بخش، زنجیرهای مارکف مانا به طول $n+\text{۱}$ را شبیه‌سازی کرده و ماتریس تعداد انتقال را به دست می‌آوریم. سپس آماره‌ی آزمون پیشنهادی $X^{\text{۲}}$ و P–مقدارهای مربوط به آزمون معکوس‌پذیری را محاسبه می‌کنیم و می‌بینیم که نتایج آزمون پیشنهادی با مباحث نظری و آزمون‌های قبلی کاملاً سازگار است.

مثال ۳ (زنجیر ارنفست[۱۴]) m مهره شماره‌گذاری شده و دو ظرف به شماره‌های یک و دو مفروضند. x مهره در ظرف اول و بقیه در ظرف دوم قرار دارند. هر بار شماره‌ای به تصادف انتخاب و مهره‌ای نظیر این شماره از ظرفی که در آن قرار دارد، خارج کرده و در ظرف دیگر قرار می‌دهیم. اگر X_n تعداد مهره‌های موجود در ظرف اول پس از n بار تکرار مستقل آزمایش فوق باشد، پس $\{X(n): n=\circ,\text{۱},\text{۲},...\}$ یک زنجیر مارکف است و برای هر $\text{۱}\le x\le m$ داریم:

$$P_{xy} = \frac{m-x}{m}I_{\{x+\text{۱}\}}(y) + \frac{x}{m}I_{\{x-\text{۱}\}}(y)$$
$$P_{\circ y} = I_{\{\text{۱}\}}(y) \quad , \quad P_{my} = I_{\{m-\text{۱}\}}(y)$$

که در آن $\mathrm{I}_{\{x\}}(y) = \begin{cases} \text{۱} & y=x \\ \circ & y\neq x \end{cases}$.

با $n+\text{۱}$ بار شبیه‌سازی و محاسبه‌ی ماتریس تعداد انتقال، آماره $X^{\text{۲}}$ و P–مقدارها، نتایج را در جدول (۱) خلاصه کرده‌ایم.

جدول ۱. نتایج شبیه‌سازی مثال ۳.

$n+\text{۱}$	$X^{\text{۲}}$	P– مقدار
۱۰۰	$\text{۸/۵}\times\text{۱۰}^{-\text{۲}}$	$> \circ/\text{۹۹۵}$
۵۰۰	$\text{۲/۳}\times\text{۱۰}^{-\text{۲}}$	$> \circ/\text{۹۹۵}$
۱۰۰۰	$\text{۱/۵}\times\text{۱۰}^{-\text{۲}}$	$> \circ/\text{۹۹۵}$
۵۰۰۰	$\text{۳/۰۶}\times\text{۱۰}^{-\text{۳}}$	$> \circ/\text{۹۹۵}$

همانطور که می‌دانیم زنجیر ارنفست یک زنجیر مارکف معکوس‌پذیر است و نتایج آماری $X^{\text{۲}}$ در سطح خطای کمتر از ۰/۰۰۵ با نتایج نظری سازگار است.

مثال ۴ زنجیر مارکف معکوس‌ناپذیر مثال ۲ را در نظر می‌گیریم. با توجه به $n+\text{۱}$ بار شبیه‌سازی، نتایج حاصل از محاسبه‌ی ماتریس تعداد انتقال، آماره‌ی پیشنهادی و P–مقدارها، در جدول (۲) آورده شده است.

جدول ۲. نتایج شبیه‌سازی مثال ۴.

$n+\text{۱}$	$X^{\text{۲}}$	P– مقدار
۱۰۰	۵۸/۳۱۶۶۷	$> \circ/\circ\circ\text{۵}$
۵۰۰	۱۳۵/۱۶۵۱	$> \circ/\circ\circ\text{۵}$
۱۰۰۰	۱۰۰/۹۶۸۳	$> \circ/\circ\circ\text{۵}$
۵۰۰۰	۱۷۹۵/۷۷۵	$> \circ/\circ\circ\text{۵}$

[۱۳] Yates
[۱۴] Ehrenfest

نتایج جدول فوق حاکی از رد فرض معکوس‌پذیری در سطح خطای کمتر از ۰/۰۰۵ می‌باشد.

مثال ۵ مجموعه داده‌های مورد بررسی، مربوط به بررسی معکوس‌پذیری قیمت گازوییل در پمپ بنزین‌های ویندسور[۱۵]، انتاریو[۱۶] و کانادا[۱۷] در فاصله‌ی زمانی ۲۷ نوامبر ۱۹۸۹ تا ۲۵ سپتامبر ۱۹۹۴ می‌باشد. این داده‌ها مشاهدات هفتگی به طول ۲۷۰ هفته است. مک‌کاسلند [۹] نسبت $\frac{r_t}{w_t}$ را محاسبه نمود، که در آن r_t قیمت خرده‌فروشی و w_t قیمت عمده‌فروشی می‌باشد و نسبت‌ها را به ۶ دسته طبق جدول (۳) تقسیم‌بندی کرد و آن را به صورت یک زنجیر مارکف ۶ حالتی همگن مانا در نظر گرفت.

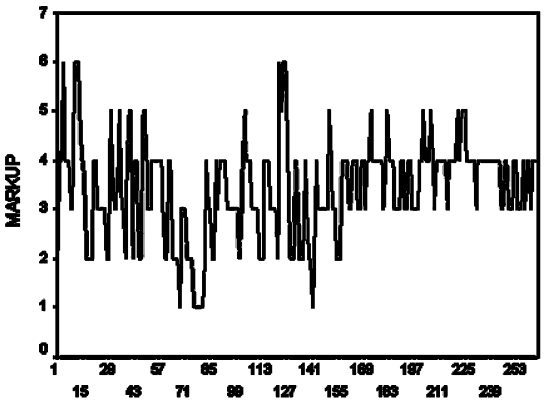
جدول ۳. دسته‌بندی مک‌کاسلند برای $\frac{r_t}{w_t}$.

حالت	برد	حالت	برد
۱	$\frac{r_t}{w_t} < ۱$	۴	$۱/۲ \le \frac{r_t}{w_t} < ۱/۳$
۲	$۱ \le \frac{r_t}{w_t} < ۱/۱$	۵	$۱/۳ \le \frac{r_t}{w_t} < ۱/۴$
۳	$۱/۱ \le \frac{r_t}{w_t} < ۱/۲$	۶	$۱/۴ \le \frac{r_t}{w_t}$

ماتریس تعداد انتقال داده‌های مک‌کاسلند به صورت زیر محاسبه، و رفتار داده‌ها در شکل (۱) رسم گردیده است.

$$n = \begin{bmatrix} ۵ & ۳ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۴ & ۲۳ & ۱ & ۱۳ & ۲ & ۱ \\ ۰ & ۱۵ & ۴۳ & ۱۹ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۳۲ & ۶۸ & ۹ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۲ & ۱۱ & ۴ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۳ & ۳ \end{bmatrix}$$

مقدار آماره‌ی پیشنهادی برای این داده‌ها $X_{\circ}^{۲} = ۲۵۰/۵۴$ می‌باشد که در مقایسه با $\chi^{۲}_{\circ/\circ۵}(۲۱) = ۳۲/۶۷۱$ در سطح معنی‌دار ۰/۰۵ فرض معکوس‌پذیری رد می‌شود، که این نتایج با نتایج مک‌کاسلند و آزمون‌های قبلی سازگاری دارد.



شکل ۱. نمودار رفتار داده‌های مک‌کاسلند.

مراجع

[1] Anderson, T.W. and Goodman, L.A. (1957), Statistical inference about Markov chains, *The Annals of Mathematical Statistics*, 28 , 89-110.

Windsor[۱۵]
Ontario[۱۶]
Canada[۱۷]

[2] Bishop, Y.M.M., Fienberg, S.E. and Holland, P.W. (1975), *Discrete Multivariate Analysis Theory and Practice*, Cambridge, MA: MIT-Press.

[3] Bremaud, P. (1999), *Markov Chains, Gibbs Field, Monte Carlo Simulation and Queues*, Springer-Verlag, New York Inc.

[4] Chen, Y.T., Chou, R.Y. and Kuan, C.M. (2000), Testing time reversibility without moment restriction, *Journal of Econometrics*, 95, 199-218.

[5] Chen, Y.T. and Kuan, C.M. (2001), Time reversibility and EGARCH effect in U.S. stock index return, *In Proceeding of international conference of modeling and forecasting financial volatility.*

[6] Grimmett, C.R. and Strizaker, D.R. (1991), *Probability and Random Processes*, Oxford University Press Inc., New York.

[7] Hinich, M.J. and Rothman, R.(1998), A frequency domain test of time reversibility, *Macroeconomic Dynamics*, 2, 72-88.

[8] Kao, E.P.C. (1996), *An introduction to Stochastic Processes*, Duxburg Press, Houston University.

[9] McCausland, W.J. (2007), Time reversibility of stationary regular finite state Markov chains, *Journal of Econometrics*, 136, 303-318.

[10] Ramsey, J.B. and Rothman, P. (1996), Time irreversibility and business cycle asymmetry, *Journal of Money, Credit Banking*, 28, 3-20.

[11] Robinson, P.M. (1991), Consistent nonparametric entropy-based testing, *Review of Economic Studies*, 58, 437-453.

[12] Sharifdoost, M. and Mahmoodi, S. (2009a), Testing in Markov chains, *Proceeding of 7-th Seminar of Probability and Stochastic Processes*, 13-14 August, Isfahan University of Technology, 217-222.

[13] Sharifdoost, M., Mahmoodi, S. and Pasha, E. (2009b), A statistical test for time reversibility of finite-state Markov chains, *Journal of Applied Mathematical Sciences*, 3(52), 2563-2574.

[14] Sharifdoost, M., Mahmoodi, S. and Pasha, E. (2009c), Testing in time Reversibility in the Regular Stationary Finite-State Markov Chains, *Proceeding of 5-th Asian Mathematical Conference*, Malaysia 22-26 June, 6-10.