

## انواع پیوندهای منفی و روابط بین آنها

محمد امینی دهک\*

ابوالقاسم بزرگنیا†

### چکیده

عموماً تنها معیاری که برای تعیین نوع پیوند (منفی یا مثبت) بین متغیرهای تصادفی به کار می‌رود، ضریب همبستگی است. در این مقاله معیارهای متنوع دیگری معرفی می‌شوند که قوی‌تر از ضریب همبستگی‌اند و نوع پیوند بین متغیرها با استفاده از این معیارها تعیین می‌شود. چون هدف بررسی پیوندهای منفی است لذا این معیارها را تحت عنوان پیوندهای منفی بیان می‌کنیم و به بررسی خواص و رابطه‌های بین آنها در حالت دو متغیره می‌پردازیم. سپس کاربرد پیوندهای منفی در مسائل خطایابی را بررسی می‌کنیم.

### مقدمه

لیمن [۴] در سال ۱۹۶۶ میلادی مفاهیم اولیه وابستگی منفی و مثبت را در حالت دو متغیره ارائه داد و قواعد قوی‌تری برای تعیین وابستگی مثبت بعداً در سال ۱۹۷۲ به وسیله اساری و پروشان [۳] بسط یافت. همچنین در سال ۱۹۶۷ اساری، پروشان و واکاپ [۲] مفهوم ارتباط را مطرح کردند که مفهومی قوی‌تر از وابستگی مثبت است. اما با آنکه درباره وابستگی مثبت مقاله‌های زیادی نوشته شده است، درباره وابستگی منفی کمتر مقاله‌ای ارائه شده است. پس از آنکه مفاهیم اولیه وابستگی منفی توسط لیمن ارائه شد، تعمیم چند متغیره مفاهیم وابستگی منفی بعداً به وسیله آماردانان آغاز شد تا

اینکه در سال ۱۹۸۱ ابراهیمی و قوش تعمیم چند متغیره وابستگی منفی را توسعه دادند و در سال ۱۹۹۳ بزرگنیا و تیلور [۱] ارتباط منفی بین متغیرها را مطرح و قضایای حدی برای متغیرهای تصادفی به طور منفی وابسته را بررسی کردند. در این مقاله، مطالب بیشتری درباره انواع وابستگی‌های منفی، ارتباط بین آنها، و خواص آنها در حالت دو متغیره گردآوری شده است.

## ۱ وابستگی مربعی

### ۱.۱ تعریف

زوج تصادفی  $(x, y)$  را به طور منفی وابسته مربعی  $(NQD)$  گوئیم هرگاه

(۱)

$$P(X \leq x, Y \leq y) \leq P(X \leq x) \cdot P(Y \leq y); \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

خانواده تمام توزیع‌هایی را که در نامساوی (۱) صدق می‌کنند با  $\mathcal{G}$  نشان می‌دهیم.

\* محمد امینی دهک، بخش آمار، دانشگاه فردوسی مشهد

† دکتر ابوالقاسم بزرگنیا، بخش آمار، دانشگاه فردوسی مشهد

۲.۱ تعریف

زوج تصادفی  $(X, Y)$  را به طور مثبت وابسته مربعی (PQD) <sup>۲</sup> گوئیم هرگاه

$$(۲) \quad P(X \leq x, Y \leq y) \geq P(X \leq x) \cdot P(Y \leq y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

خانواده تمام توزیعهایی را که در نامساوی صدق می کنند با  $\mathcal{F}_1$  نشان می دهیم.

۳.۱ لم

(الف) در نامساوی (۱) هر کدام از نامساویهای  $X \leq x$  یا  $Y \leq y$  را می توان نظیر به نظیر با  $X < x$  یا  $Y < y$  جایگزین کرد.

(ب) هرگاه نامساوی (۱) برقرار باشد هر یک از نامساویهای زیر را می توان نتیجه گرفت:

$$(۳) \quad P(X \leq x, Y \geq y) \geq P(X \leq x) \cdot P(Y \geq y)$$

$$(۴) \quad P(X \geq x, Y \leq y) \geq P(X \geq x) \cdot P(Y \leq y)$$

$$(۵) \quad P(X \geq x, Y \geq y) \leq P(X \geq x)P(Y \geq y)$$

(ج)

$$(X, Y) \in \mathcal{F}_1 \iff (X, -Y) \in \mathcal{G}_1$$

برهان قسمتهای (الف) و (ب) به سادگی اثبات می شود. ما تنها قسمت (ج) را ثابت می کنیم.

(ج) فرض کنید  $(X, Y) \in \mathcal{F}_1$  در این صورت

$$P(X \leq x, Y \leq y) \geq P(X \leq x) \cdot P(Y \leq y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} P(X \leq x, -Y \leq y) &= P(X \leq x, Y \geq -y) \\ &= P(X \leq x) - P(X \leq x, Y < -y) \end{aligned}$$

$$\leq P(X \leq x) - P(X \leq x) \cdot P(Y < -y)$$

$$= P(X \leq x) \cdot P(-Y \leq y)$$

بنابراین

$$(X, -Y) \in \mathcal{G}_1$$

عکس حکم نیز به همین صورت ثابت می شود.

۴.۱ تعریف

تابعهای حقیقی  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  و  $g(y_1, y_2, \dots, y_n)$  را در فضا مین مختص هماهنگ گوئیم اگر نسبت به آن مختص هر دو غیر نزولی یا هر دو غیر صعودی باشند و آنها را در فضا مین مختص ناهماهنگ گوئیم اگر نسبت به آن مختص یکی غیر نزولی و دیگری غیر صعودی (یکی غیر صعودی و دیگری غیر نزولی) باشد.

۵.۱ قضیه

فرض کنید زوجهای  $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$  مستقل باشند و توزیعهای توأم آنها را به ترتیب با  $F_1, \dots, F_n$  نشان دهیم. اگر  $f$  و  $g$  تابعهایی از  $n$  متغیر باشند و

$$\mathbf{X} = f(X_1, X_2, \dots, X_n), \quad \mathbf{Y} = g(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$$

آنگاه

(الف)  $(X, Y) \in \mathcal{G}_1$  هرگاه برای هر  $i, i = 1, 2, \dots, n$  یکی از شرطهای زیر صادق باشد.

(۱)  $F_i \in \mathcal{G}_1$  و  $f$  و  $g$  در فضا مین مختص هماهنگ باشند.

(۲)  $F_i \in \mathcal{F}_1$  و  $f$  و  $g$  در فضا مین مختص ناهماهنگ باشند.

(ب) متشابهاً  $(X, Y) \in \mathcal{F}_1$  اگر برای هر  $i, F_i \in \mathcal{F}_1$  و  $f$  و  $g$  در فضا مین مختص هماهنگ باشند یا  $F_i \in \mathcal{G}_1$  و  $f$  و  $g$  در فضا مین مختص ناهماهنگ باشند.

(ج) اگر  $U$  و  $V$  متغیرهای تصادفی مستقل و همچنین مستقل از  $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$  باشند و

$$X = f(U, \mathbf{X}), \quad Y = g(V, \mathbf{Y}),$$

$$\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n), \quad \mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$$

آنگاه نتایج (الف) و (ب) تحت مفروضات فوق و بدون هیچ فرضی در رابطه با رفتار  $f$  و  $g$  نسبت به  $U$  و  $V$  برقرارند. (به دلیل طولانی بودن اثبات از بیان آن صرف نظر می کنیم).

۶.۱ مثال

(الف) به ازای هر متغیر تصادفی  $X$  داریم

$$(X, -X) \in \mathcal{G}_1$$

حل: به راحتی ثابت می‌شود که  $(X, X) \in \mathcal{F}_1$  و بنا به لم ۳-۱ (ج) نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

(ب) هرگاه  $f$  تابعی غیر صعودی باشد آنگاه به ازای هر متغیر تصادفی  $X$  داریم

$$(X, f(X)) \in \mathcal{G}_1$$

حل: فرض کنید  $g(x) = x$  بنا به قسمت (الف) قضیه ۵-۱ حکم ثابت می‌شود.

(ج) اگر

$$Y = V + bZ, \quad X = U + aZ$$

برای متغیرهای تصادفی مستقل دلخواه  $U, V, Z$  و مقادیر حقیقی مختلف‌العلامة  $a$  و  $b$  آنگاه

$$(X, Y) \in \mathcal{G}_1$$

(د) اگر  $Y = V - X$  برای متغیرهای تصادفی مستقل دلخواه  $V$  و  $X$ .

$$(X, Y) \in \mathcal{G}_1$$

(ه) اگر  $X = f(U, Z)$  و  $Y = g(V, Z)$  که در آن  $U, Z, V$  مستقل و  $f$  و  $g$  توابعی ناهماهنگ در  $z$  اند. آنگاه

$$(X, Y) \in \mathcal{G}_1$$

مثال فوق با استفاده از قضیه ۵-۱ به راحتی اثبات می‌شود.

۷.۱ لم

(هافدینگ)<sup>۳</sup> اگر  $F_X, F_Y, F$  به ترتیب تابعهای توزیع توأم و حاشیه‌ای  $X$  و  $Y$  باشند، آنگاه با شرط وجود  $E|XY|, E|X|, E|Y|$  و

$$\text{Cov}(X, Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [F(x, y) - F_X(x)F_Y(y)] dx dy$$

(به دلیل طولانی بودن اثبات از آن صرف‌نظر می‌شود)

۸.۱ قضیه

$(X, Y) \in \mathcal{G}_1$  اگر و تنها اگر برای تمام تابعهای غیرنزولی  $f$  و  $g$

$$\text{Cov}(f(X), g(Y)) \leq 0$$

برهان فرض کنید  $(X, Y) \in \mathcal{G}_1$  بنا بر قضیه ۵-۱ در حالت  $m = 1$  چون  $f$  و  $g$  هماهنگ هستند

$$(f(X), g(Y)) \in \mathcal{G}_1$$

و حکم قضیه بنا بر لم ۷-۱ ثابت می‌شود.

برای اثبات عکس حکم، تابعهای غیرنزولی  $f$  و  $g$  را به صورت زیر

تعریف می‌کنیم:

$$f_x(X) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } X > x \\ 0 & \text{اگر } X \leq x \end{cases}$$

$$g_y(Y) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } Y > y \\ 0 & \text{اگر } Y \leq y \quad \forall x, y \in R \end{cases}$$

بنا به فرض داریم:

$$0 \geq \text{Cov}(f_x(X), g_y(Y)) = \text{Cov}(1 - f, 1 - g)$$

$$= P(X \leq x, Y \leq y) - P(X \leq x) \cdot P(Y \leq y)$$

پس  $(X, Y) \in \mathcal{G}_1$ .

۹.۱ نتیجه

فرض کنید  $(X, Y) \in \mathcal{G}_1$  و  $(X, Y) \sim F$  آنگاه  $\tau$  کندال<sup>۴</sup> و  $\rho_s$  اسپیرمن<sup>۵</sup> منفی‌اند.

برهان فرض کنید  $(X_1, Y_1)$  و  $(X_2, Y_2)$  مستقل و با  $(X, Y)$  هم‌توزیع باشند. تعریف می‌کنیم

$$X = \text{Sgn}(X_2 - X_1) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } X_2 - X_1 > 0 \\ 0 & \text{اگر } X_2 - X_1 = 0 \\ -1 & \text{اگر } X_2 - X_1 < 0 \end{cases}$$

بعداً نشان می‌دهیم که رابطه  $P(Y \leq y|X = x)$  نسبت به  $X$  و  $Y$  متقارن نیست ولی در لم ۳-۱ ثابت کرده‌ایم که رابطه (۱) متقارن است. خانواده تمام توزیعهایی را که در تعریف فوق صدق می‌کنند با  $\mathcal{G}_2$  نشان می‌دهیم.

هرگاه به ازای کلیه مقادیر حقیقی  $x$  و  $y$ ،  $P(Y \leq y|X = x)$  تابعی غیرصعودی نسبت به  $x$  باشد، آنگاه  $(X, Y)$  را به طور مثبت وابسته رگرسیونی  $\gamma$  (PRD) گوئیم. خانواده تمام توزیعهایی را که در شرط فوق صدق کنند با  $\mathcal{F}_2$  نشان می‌دهیم.

۲.۲ قضیه

هرگاه  $Y = \alpha + \beta X + U$ ،  $\beta \leq 0$  و  $(X, U) \in \mathcal{G}_2$  آنگاه

$$(X, Y) \in \mathcal{G}_2$$

۳.۲ لم

(الف) زوج  $(X, Y)$  NRD است اگر و تنها اگر  $(-X, Y)$  PRD باشد.

(ب) زوج  $(X, Y)$  NRD است اگر و تنها اگر  $(X, -Y)$  PRD باشد.

۴.۲ مثال

(الف) اگر  $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$  آنگاه

$$(X, Y) \in \mathcal{G}_2 \iff \rho \leq 0$$

(ب) اگر  $(U_1, U_2, \dots, U_s)$  دارای توزیع چند جمله‌ای متناظر با  $n$  آزمایش و احتمالهای موفقیت  $p_1, p_2, \dots, p_s$  باشد، آنگاه

$$(U_i, U_j) \in \mathcal{G}_2 \quad ; \forall i \neq j$$

(ج) فرض کنید  $X_1, X_2, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی از توزیع  $F$  باشد و  $X_{u_1} < X_{u_2} < \dots < X_{u_m}$  (م  $<$   $n$ ) رکوردهای بالای نمونه فوق باشند. اگر  $\alpha > 0$  به ازای هر  $x$   $\frac{1-F(x+\alpha)}{1-F(x)}$  تابعی صعودی نسبت به  $x$  باشد، آنگاه

$$(X_{u_m}, X_{u_n} - X_{u_m}) \in \mathcal{G}_2, \quad m \leq n.$$

$$Y = Sgn(Y_2 - Y_1) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } Y_2 - Y_1 > 0 \\ 0 & \text{اگر } Y_2 - Y_1 = 0 \\ -1 & \text{اگر } Y_2 - Y_1 < 0 \end{cases}$$

چون  $EX = EY = 0$  و  $\tau = EXY$  پس بنا بر قضیه ۵-۱

$$\tau = Cov(X, Y) \leq 0.$$

با توجه به رابطه‌ای که بین  $\tau$  و  $\rho_s$  اسپرمن به صورت زیر برقرار است، داریم:

$$\rho_s = \frac{\tau}{(n+1)} + \frac{n-2}{n+1} (2\pi_{C_r} - 1)$$

که در آن

$$\pi_{C_r} = P(X_j - X_i)(Y_k - Y_i) > 0 \quad i < j, k \neq j$$

پس هرگاه  $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), (X_3, Y_3)$ ،  $(n = 3)$  هم توزیع با  $F$  و مستقل باشند داریم،

$$\begin{aligned} \pi_{C_r} &= Cov(Sgn(X_2 - X_1), Sgn(Y_2 - Y_1)) \\ &= 2 \iint F(x, y) f(x) f(y) dx dy \\ &\leq 2 \iint F_x(x) F_y(y) f(x) f(y) dx dy \\ &= \frac{1}{2} \\ &\implies 2\pi_{C_r} - 1 \leq 0, \quad \tau \leq 0 \end{aligned}$$

پس

$$\rho_s \leq 0$$

۲ وابستگی رگرسیونی

۱.۲ تعریف

زوج تصادفی  $(X, Y)$  را به طور منفی وابسته رگرسیونی  $\epsilon$  (NRD) گوئیم هرگاه  $P(Y \leq y|X = x)$  به ازای کلیه مقادیر حقیقی  $x$  و  $y$  تابعی غیرنزولی نسبت به  $x$  باشد یا می‌گوئیم  $Y$  در  $X$  به طور منفی وابسته رگرسیونی است.

### ۳ / وابستگی نسبت درستنمایی

#### ۱.۳ تعریف

فرض کنید زوج  $(X, Y)$  دارای تابع چگالی احتمال توأم  $f(x, y)$  باشد در این صورت  $(X, Y)$  را به طور منفی وابسته نسبت درستنمایی<sup>۸</sup> (NLRD) گوئیم هرگاه

$$(۶) \quad f(x, y')f(x', y) \geq f(x, y)f(x', y') \quad \forall x < x', y < y'$$

شرط (۱) همراه با شرط  $f(x) \neq 0, \forall x$  با شرط زیر هم ارز است:

$$(۷) \quad \frac{f(y|x')}{f(y|x)} \geq \frac{f(y'|x')}{f(y'|x)} \quad \forall x < x', y < y'$$

پس  $(X, Y)$  را به طور منفی وابسته درستنمایی گوئیم هرگاه

$$(x < x') \frac{f(y|x')}{f(y|x)} \geq \frac{f(y'|x')}{f(y'|x)}$$

خانواده تمام توزیعهای  $F$  را که در شرط (۱) یا (۲) صدق کنند به  $\mathcal{G}_2$  نشان می‌دهیم.

#### ۲.۳ تعریف

اگر  $x < x', \frac{f(y|x')}{f(y|x)}$  تابعی غیرنزولی بر حسب  $y$  باشد  $(X, Y)$  را دارای پیوند (PLDR) گوئیم و خانواده تمام توزیعهای  $F$  را که در تعریف فوق صدق می‌کنند با  $\mathcal{F}_2$  نشان می‌دهیم.

#### ۳.۳ مثال

(الف) توزیع نرمال دو متغیره به  $\mathcal{G}_2$  تعلق دارد اگر و تنها اگر  $\rho \leq 0$ .

(ب) هر دو مؤلفه از توزیع چند جمله‌ای مثال ۲-۴ (ب) عضو  $\mathcal{G}_2$  اند.

(ج) توزیع دیریکله با چگالی زیر در  $\mathcal{G}_2$  است.

$$d(x, y) = Cx^{f_1}y^{f_2}(1-x-y)^{f_3}$$

$$0 \leq x+y \leq 1, x, y \geq 0,$$

$$f_1 = f_2 = \frac{n-1}{2} - 1$$

$$f_3 = \frac{(n-1)(s-2)}{2} - 1$$

### ۴ ارتباط بین متغیرها

#### ۱.۴ تعریف

(بزرگنیا و تابلور (۱۹۹۳)) زوج  $(X, Y)$  را به طور منفی مرتبط<sup>۹</sup> گوئیم هرگاه به ازای تمام تابعهای غیرنزولی  $f$  و  $g$  داشته باشیم،

$$\text{Cov}(f(X), g(Y)) \leq 0$$

خانواده تمام توزیعهای  $F$  مربوط به  $(X, Y)$  را که در تعریف فوق صدق می‌کنند با  $\mathcal{G}_2$  نشان می‌دهیم.

#### ۲.۴ قضیه

تابعهای غیر نزولی از متغیرهای تصادفی به طور منفی مرتبط به طور منفی مرتبط‌اند.

#### ۳.۴ قضیه

اگر به ازای تمام تابعهای دوتایی غیرنزولی  $\lambda$  و  $\delta$  داشته باشیم

$$\text{Cov}(\lambda(X), \delta(Y)) \leq 0$$

آنگاه

$$(X, Y) \in \mathcal{G}_2.$$

برهان برای تابعهای غیرنزولی  $f$  و  $g$  تابعهای دوتایی غیرنزولی  $X_f(x)$  و  $X_g(y)$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$X_f(x) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } f(X) > x \\ 0 & \text{اگر } f(X) \leq x \end{cases}$$

$$X_g(y) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } g(Y) > y \\ 0 & \text{اگر } g(Y) \leq y \quad \forall x, y \in R \end{cases}$$

با استفاده از لم ۱-۷ ثابت می‌شود که

$$\text{Cov}(f(X) \cdot g(Y)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Cov}(X_f(x), X_g(y)) dx dy$$

با توجه به فرض و تعریف ۴-۱ حکم ثابت است.

۴.۴ قضیه

$$h(u) = P(Y > y | X = u), \quad \forall u \in R$$

اگر  $X$  و  $Y$  متغیرهای تصادفی دوتایی باشند و  $(X, Y) \in \mathcal{G}_2$  آنگاه

داریم

$$(1 - X, 1 - Y) \in \mathcal{G}_2$$

$$P(Y > y, X \leq x) = \int_{-\infty}^x P(Y > y | X = u) dF_X(u)$$

$$= \int_{-\infty}^x h(u) dF_X(u) \geq \int_{-\infty}^{x'} h(u) dF_X(u) = P(Y > y, X \leq x')$$

۵.۴ نتیجه

اگر  $X$  و  $Y$  متغیرهای تصادفی دوتایی باشند، آنگاه

در نتیجه

$$(X, Y) \in \mathcal{G}_2 \iff \text{Cov}(X, Y) \leq 0$$

$$P(Y \leq y | X \leq x) \leq P(Y \leq y | X \leq x'), \quad \forall x < x'$$

حال اگر  $x' \rightarrow \infty$ ، آنگاه

۶.۴ قضیه

برای هر زوج تصادفی  $(X, Y)$  داریم

$$P(Y \leq y | X \leq x) \leq P(Y \leq y)$$

$$\implies P(X \leq x, Y \leq y) \leq P(X \leq x)P(Y \leq y), \quad \forall x, y \in R$$

$$(X, Y) \in \mathcal{G}_2 \iff (X, Y) \in \mathcal{G}_1$$

پس

و یا

$$(X, Y) \in \mathcal{G}_1 \implies \mathcal{G}_2 \subset \mathcal{G}_1$$

$$\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_2$$

۲.۵ نتیجه

برهان بنا بر قضیه ۱-۸ و تعریف، حکم ثابت است.

$$\mathcal{G}_1 \not\subset \mathcal{G}_2$$

تذکر

۳.۵ مثال

با وجود اینکه در حالت دو متغیره،  $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_2$  ولی به ازای مقادیر  $n$  بزرگتر از ۲ ثابت می شود که برای دنباله ای از متغیرهای تصادفی  $X_1, X_2, \dots, X_n$

فرض کنیم  $(X, Y)$  دارای توزیع احتمال توأمی مطابق با جدول زیر باشد.

$y \backslash x$	۱	۲	۳	
۱	۰	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$
۲	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	۰	$\frac{2}{4}$
۳	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{4}$	

۱- توزیع احتمال توأم  $(X, Y)$

$$\mathcal{G}_2 \subset \mathcal{G}_1$$

روابط بین پیوندها

۵ پیوندهای (ND) و (NRD)

برای این توزیع سهولت ثابت می شود که  $(X, Y) \in \mathcal{G}_1$ . اما

$$P(X \leq 2 | Y = 2) = 1 > P(X \leq 2 | Y = 3) = \frac{2}{4}$$

در نتیجه،

$$(Y, X) \notin \mathcal{G}_2$$

از طرفی جدول ۲ در زیر نشان می دهد که  $(X, Y) \in \mathcal{G}_2$ . پس این مثال

۱.۵ قضیه

$$\mathcal{G}_2 \subset \mathcal{G}_1$$

برهان فرض کنید  $(X, Y) \in \mathcal{G}_2$ ، بنا بر تعریف،

$$P(Y > y | X = x) = 1 - P(Y \leq y | X = x), \quad \forall x, y \in R$$

تابع غیر صعودی از  $X$  است. تابع  $h(u)$  را به صورت زیر تعریف می کنیم.

نشان می‌دهد که رابطه و تعریف ۱-۲ نسبت به  $X$  و  $Y$  نامتقارن است.

$P(Y = y   X = x)$	$y$	۱	۲	۳
$X = ۱$		۰	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
$X = ۲$		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$X = ۳$		$\frac{2}{4}$	۰	$\frac{1}{4}$

۲- توزیع احتمال شرطی  $Y|X$

۲.۶ نتیجه

$$G_2 \not\subset G_3.$$

۳.۶ مثال

فرض کنید  $X, Y = U - X$  و  $U$  مستقل باشند در این صورت بنا بر قضیه ۱-۲،  $(X, Y) \in G_2$ . اما همواره نمی‌توان نتیجه گرفت که  $(X, Y) \in G_3$ .

حل برای اثبات این حکم فرض کنید  $h(u) = \frac{1}{\pi(1+u^2)}$ ,  $u \in R$  یک متغیر تصادفی مستقل از  $U$  باشد آنگاه رابطه

$$f(x, y')f(x', y) \geq f(x, y)f(x', y'), \forall x < x', \forall y < y'$$

همواره برقرار نیست. زیرا

$$f(x, y) = g(x)h(x+y), g(x) \neq 0$$

پس کافی است رابطه زیر را بررسی کنیم:

$$h(x+y') \cdot h(x'+y) \geq h(x+y)h(x'+y'), x < x', y < y'$$

که رابطه فوق نیز همواره برقرار نیست.

با توجه به مطالب بیان شده در این قسمت مقاله می‌توان جدول زیر را

تنظیم کرد:

	NLRD	NRD	ND	NA
NLRD		↗	↗	↗
NRD	↗		↗	↗
ND	↗	↗		↗
NA	↗	↗	↗	

۷ کاربرد در مسائل خطایابی

مسئله آزمون فرض  $H$  را در برابر مجموعه فرضهای مقابل  $K_i, i = 1, \dots, s$  در نظر بگیرید و فرض کنید فرض  $H$  به نفع  $K_i$  در سطح  $\alpha_i$  رد می‌شود اگر و تنها اگر

$$T_i \geq C_i, i = 1, \dots, s, C_i \in R, \alpha_i = P_H[T_i \geq C_i]$$

۶ پیوندهای NLRD و NRD

۱.۶ قضیه

$$G_2 \subset G_3 \subset G_1.$$

برهان فرض کنید  $(X, Y) \in G_3$  در نتیجه  $\frac{f(y|x')}{f(y|x)}$ ,  $x < x'$  تابعی غیرصعودی بر حسب  $y$  است تابع ساده  $\psi(y)$  را برای هر  $y$  به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\psi(y) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } y \leq y_0 \\ \forall y_0 \in R \\ 0 & \text{اگر } y > y_0 \end{cases}$$

حال فرض کنیم  $Y_1$  و  $Y_2$  مستقل و هم توزیع با  $Y$  باشند تعریف می‌کنیم:

$$E_x \phi(Y) = \int \phi(y) f(y|x) dy$$

داریم

$$I = \frac{1}{4} E_x [(\psi(Y_1) - \psi(Y_2)) \left( \frac{f(Y_1|x')}{f(Y_1|x)} - \frac{f(Y_2|x')}{f(Y_2|x)} \right)] \geq 0$$

پس از انجام محاسبات نتیجه می‌شود که

$$E_{x'} \psi(Y) \geq E_x \psi(Y)$$

در نتیجه

$$\int_{-\infty}^{y_0} f(y|x) dy \leq \int_{-\infty}^{y_0} f(y|x') dy, \forall x < x'$$

پس

$$P(Y \leq y_0 | X = x) \leq P(Y \leq y_0 | X = x'), \forall x < x', y_0 \in R$$

$$(X, Y) \in G_2.$$

بنابراین

تصادف رتبه‌بندی می‌کند.

$K_i$ : نامین موضع برتری دارد و دیگر موضوعات تفاوتی ندارند.

فرض کنید: رتبه نامین موضع توسط  $K$  امین فرد  $R_{ik}$

$$R_i = \sum_{k=1}^m R_{ik} = \text{مجموعه رتبه‌های نامین موضع}$$

فرض  $H$  به نفع  $K_i$  رد می‌شود اگر و تنها اگر  $R_i$  به اندازه کافی بزرگ باشد.

$$\alpha_i = P_H[RH] = P_H[R_i \geq C_i]$$

پس از انجام محاسبات ثابت می‌شود که

$$P(R_{ik} \leq x, R_{jk} \leq y) = \frac{xy}{n(n-1)} - \frac{\min(x,y)}{n(n-1)}$$

$$P(R_{ik} \leq x) = \frac{x}{n}, \quad \forall k, \forall x, y \in R$$

$$P(R_{ik} \leq x, R_{jk} \leq y) = \frac{xy}{n(n-1)} - \frac{\min(x,y)}{n(n-1)}$$

$$\leq P(R_{ik} \leq x)P(R_{jk} \leq y) = \frac{xy}{n^2}, \quad \forall x, y \in R$$

و از آنجا بنا بر قضیه ۱-۱،

$$(R_i, R_j) \in \mathcal{G}_1, \quad \forall i \neq j.$$

پس با فرض  $\alpha = \sum_{i=1}^m \alpha_i$  خواهیم داشت:

$$\alpha - \frac{1}{p} \left(1 - \frac{1}{m}\right) \alpha^2 \leq P = P_H\left[\bigcup_{j=1}^m (R_j \geq C_j)\right] \leq \alpha.$$

می‌توان کاربردهای دیگری از متغیرهای تصادفی دارای پیوند منفی را مورد بحث قرار داد که آن را به فرصتهای دیگر موکول می‌کنیم.

فرض کنید  $s$  پارامتر  $\theta_1, \dots, \theta_s$  تحت فرض  $H$  مساوی باشند و یا دقیقاً یکی از آنها با دیگران اختلاف داشته باشند.

$$\begin{cases} H: \theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_s \\ K_i: \theta_i \neq \theta_j, \quad j = 1, \dots, s, \quad i \neq j \end{cases}$$

در چنین مواقعی هدف کنترل احتمال  $P$ ی رد کردن  $H$  به خطا به نفع هر یک از فرضهای مقابل  $K_i$  است. با به کار بردن برابری بونفرونی و

$$\alpha = \sum_{i=1}^s \alpha_i, (T_i, T_j) \in \mathcal{G}_1, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, s$$

و انجام محاسبات لازم، داریم

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^s P_H[T_j \geq C_j] - \sum_{i < j} P_H[T_i \geq C_i, T_j \geq C_j] &\leq P \\ &= P_H\left[\bigcup_{j=1}^s (T_j \geq C_j)\right] \leq \sum_{j=1}^s P_H[T_j \geq C_j] \\ &\leq \alpha - \frac{1}{p} \left(1 - \frac{1}{s}\right) \alpha^2 \leq P \leq \alpha. \end{aligned}$$

نابرابری فوق نشان می‌دهد که برای مقادیر کوچک  $\alpha$ ،  $\alpha$  تقریب خوبی برای  $P$  است. نابرابری فوق در صورتی صادق است که هر زوج از آماره‌های آزمون در  $\mathcal{G}_1$  باشند:

$$\forall i \neq j, \quad (T_i, T_j) \in \mathcal{G}_1$$

## ۱.۷ مثال

فرض کنیم  $n$  موضوع به وسیله  $m$  فرد به طور مستقل رتبه‌بندی می‌شوند و  $H$ : بین موضوعات تفاوتی وجود ندارند، بنابراین هر یک از افراد، آنها را به

## مراجع

- [1] Bozorgnia, A. Patterson. R. F. and Tyloor. R. L. (1993) Limit Theorems for Negatively Dependent Random Variables. *University of Georgia Technical Report*.
- [2] Esary. J. D. Proschan, F. and walkup, D. W. (1967) Association of r. v, s. with Applications. *Ann. Math. Stat.* 38, 144-147.
- [3] Esary J. D. and Proschan, F. (1972) Relationships Among Some Concepts of Bivariate Dependence Positive. *Ann. Math. Stat* 43, 661-665.
- [4] Lehmann, E. (1966). Some Concepts of Dependence. *Ann. Math. Stat* 37-1137-1153.