برآورد تعداد تانکهای دشمن

غلامحسین شاهکار*

در جریان جنگی، n تانک ازکل N تانک دشمن به وسیلهٔ نیروهای خودی به غنیمت گرفته شده‌اند. تانکهای دشمن با اعداد ۱ تا N شماره‌گذاری شده و شمارهٔ تانکهای به غنیمت گرفته شده را شناسایی کرده‌ایم. می‌خواهیم N یعنی تعداد تانکهای دشمن را برآورد کنیم.

فرض کنید X_1، X_2، ...، X_n شمارهٔ تانکهای به غنیمت گرفته شده باشد. $E[Y = \max_{1\le i\le n} X_i]$ را محاسبه کرده و با استفاده از آن N را برآورد می‌کنیم. داریم:

$$P(Y=k)=\frac{\binom{k-1}{n-1}}{\binom{N}{n}},\qquad k=n,n+1,\ldots,N$$

زیرا اگر ماکسیمم شمارهٔ تانکهای به غنیمت گرفته شده یعنی Y، k باشد در این صورت $n-1$ شمارهٔ دیگر همه زیر $k-1$ قرار دارند. پس

$$E(Y)=\sum_{k=n}^{N} kP(Y=k)=\sum_{k=n}^{N}\frac{K\binom{k-1}{n-1}}{\binom{N}{n}}$$
$$\frac{1}{\binom{N}{n}}\sum_{k=n}^{N}\frac{k(k-1)!}{(n-1)!(k-n)!}=\frac{n}{\binom{N}{n}}\sum_{k=n}^{N}\binom{k}{n} \qquad (1)$$

برای محاسبهٔ عبارت $\sum_{k=n}^{N}\binom{k}{n}$ توجه کنید که $\binom{k}{n}$ ضریب x^n در بسط چندجمله‌ای $(1+x)^k$ است و در نتیجه $\sum_{k=n}^{N}\binom{k}{n}$ ضریب x^n در بسط چندجمله‌ای $\sum_{k=n}^{N}(1+x)^k$ است. چون

$$\sum_{k=n}^{N}(1+x)^k=(1+x)^n\sum_{k=0}^{N-n}(1+x)^k$$
$$=(1+x)^n\frac{(1+x)^{N-n+1}-1}{(1+x)-1}$$
$$=\frac{1}{x}\left[(1+x)^{N+1}-(1+x)^n\right]$$

و ضریب x^n در بسط چندجمله‌ای بالا $\binom{N+1}{n+1}$ است لذا داریم:

$$\sum_{k=n}^{N}\binom{k}{n}=\binom{N+1}{n+1}$$

با قرار دادن این عبارت در (۱) به دست می‌آوریم:

$$E(Y)=\frac{n\binom{N+1}{n+1}}{\binom{N}{n}}=\frac{n\frac{(N+1)!}{(n+1)!(N-n)!}}{\frac{N!}{n!(N-n)!}}=\frac{n(N+1)}{n+1}$$

برای برآورد N یعنی تعداد کل تانکهای نیروی متخاصم، معادلهٔ $E(Y)=\frac{n(N+1)}{n+1}$ را نسبت به N حل کرده و به جای $E(Y)$ برآورد آن یعنی $(\max_{1\le i\le n} X_i)$ را قرار می‌دهیم. داریم:

$$\hat{N}=\left[\frac{n+1}{n}(\max_{1\le i\le n} X_i)\right]$$

*) دکتر غلامحسین شاهکار، گروه آمار، دانشکدهٔ علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد