

## مدل‌های آماری برای داده‌های شمارشی وابسته به زمان

حسین باغیشنی<sup>۱</sup> ، سید محمد مهدی طباطبایی<sup>۱</sup>

چکیده:

در سال‌های اخیر پیشرفت‌های قابل ملاحظه‌ای در مدل‌بندی داده‌های وابسته به زمان صورت پذیرفته است. در این مقاله دوره از مدل‌هایی که برای مدل‌بندی داده‌های وابسته به زمان به کار می‌روند، با تأکید بر شمارشی بودن آنها، معرفی شده‌اند. این دوره اولین بار توسط کاکس در سال (۱۹۸۱) معرفی شدند و شامل مدل‌های مشاهده مینا و پارامتر مینا می‌شوند. این دوره و برخی از خواص آنها معرفی شده و بطور خلاصه روش‌های برآورد پارامترهای مدل عنوان شده‌اند. در پایان به منظور نمایش کاربرد وسیع آنها، بکارگیری یکی از اعضای مدل‌های مشاهده مینا با عنوان مدل‌های GLARMA، برای مدل‌بندی تعداد تصادفات رانندگی درون‌شهری مشهد نشان داده شده است.

**واژه‌های کلیدی:** مدل‌های مشاهده مینا، مدل‌های پارامتر مینا، فرآیند پنهان، معادلات برآورد، مدل‌های خطی تعمیم‌یافته خودبرگشت میانگین متحرک (GLARMA).

### ۱ مقدمه

اولین بار کاکس [۵] دوره از مدل‌های آماری را برای مدل‌بندی داده‌های وابسته به زمان دسته‌بندی کرد: مدل‌های مشاهده مینا<sup>۲</sup> و مدل‌های پارامتر مینا<sup>۳</sup>. این دسته‌بندی مبتنی بر نظریه مدل‌های فضای حالت<sup>۴</sup> است که ساختار آنها بر اساس دو معادله مشاهده و حالت شکل می‌گیرد. برای هر دو مدل پارامتر مینا و مشاهده مینا، معادله‌های مشاهده یکسان هستند و اختلاف بین این دو دوره از مدل‌ها به مشخص کردن معادله حالت و مدل‌بندی وابستگی بین مشاهدات در هر کدام برمی‌گردد. مدل‌های پارامتر مینا همبستگی را توسط یک فرآیند

پنهان<sup>۵</sup> که مستقل از مشاهدات گذشته سری مشاهده شده است، وارد مدل می‌کنند. در حالیکه مدل‌های مشاهده مینا، همبستگی را به صورت تابعی از مشاهدات گذشته و متغیرهای تبیینی، مدل‌بندی می‌کنند.

این دوره، از جمله مدل‌های قدرتمندی هستند که برای مدل‌بندی داده‌های شمارشی همبسته بکار گرفته می‌شوند. با فرض مدل‌بندی داده‌های شمارشی با توزیع پواسون، این دوره از مدل‌ها برای داده‌های شمارشی، تعمیمی از یک مدل رگرسیون پواسون معمولی هستند. اگر فرض

<sup>۱</sup> گروه آمار - دانشگاه فردوسی مشهد  
<sup>۲</sup> Observation Driven Models  
<sup>۳</sup> Parameter Driven Models  
<sup>۴</sup> State-Space Models  
<sup>۵</sup> Latent Process

برآورد برای برآورد پارامترهای مدل بهره برد. وست و دیگران [۱۶] مدل‌های پارامتر مینا را از دیدگاه بیزی مورد بررسی قرار دادند. آزالینی [۲]، استراتلی و دیگران [۱۴]، و اندرسون و ایتکین [۱] نیز مطالعات مختلفی بر روی این مدل‌ها انجام داده‌اند. کمپل [۳] از مدل‌های پارامتر مینا برای بررسی رابطه بین دمای محیط و مرگ ناگهانی نوزادان، استفاده کرد. چان و لدولتر [۴] از روش‌های نمونه‌گیری مونت کارلو برای محاسبه برآوردگرهای درست‌نمایی ماکسیمم پارامترهای یک مدل پارامتر مینا استفاده کردند. دیویس و همکاران [۸] روشی برای تشخیص وجود فرآیند پنهان در مدل، پیشنهاد دادند. علاوه بر این توزیع مجانبی برآوردگرهای درست‌نمایی ماکسیمم یک مدل خطی تعمیم‌یافته را در حضور فرآیند پنهان محاسبه کرده و تصحیحی برای اربیبی شدید برآوردگرهای پیشنهادی زگر [۱۷] ارائه دادند.

در مورد مدل‌های مشاهده مینا نیز مطالعات زیادی صورت گرفته و اعضای مختلفی از آنها معرفی شده‌اند. دیویس و همکاران [۷] مدل‌های مشاهده مینا را برای داده‌های شمارشی پواسونی بطور کامل مورد بررسی قرار دادند و خواص بزرگ نمونه‌ای برآوردگرهای پیشنهادی خود را معرفی کردند. همچنین دیویس و همکاران [۹] بیشتر جزئیات مربوط به این مدل‌ها را برای داده‌های شمارشی وابسته به زمان بررسی کردند. زگر و کواکیش [۱۸] نیز یک رهیافت شبه درست‌نمایی<sup>۷</sup> را در مدل‌های رگرسیونی مارکوفی که حالت خاصی از مدل‌های مشاهده مینا هستند، بکار گرفتند. بخش‌های ۲ و ۳، به ترتیب به

کنیم دنباله مشاهدات  $\{y_t\}_{t=0}^T$  شمارشی هستند، به این معنی که برای هر  $t \in \{0, 1, 2, \dots\}$ ،  $Y_t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ، آنگاه در یک مدل رگرسیون پواسون معمولی فرض می‌شود که این مشاهدات با شرط متغیرهای تبیینی، از یک توزیع پواسون با میانگین  $\mu_t$  استخراج شده‌اند، بطوریکه:

$$P(Y_t = y_t) = \mu_t^{y_t} \frac{e^{-\mu_t}}{y_t!} \quad (1)$$

که  $\mu_t$  تابعی از بردار  $k$  بعدی متغیرهای تبیینی  $x_t$  و پارامترهای نامعلوم  $\beta$  می‌باشد. این تابع، تابع پیوند<sup>۶</sup> نامیده می‌شود زیرا رابطه بین  $\mu_t$  و  $x_t' \beta$  را مشخص می‌کند. یک تابع پیوند مناسب برای توزیع پواسون،  $\mu_t = \exp\{x_t' \beta\}$  است. با انتخاب این تابع پیوند، نتیجه می‌شود  $E[Y_t | x_t] = \text{Var}[Y_t | x_t] = \exp\{x_t' \beta\}$ . دو رده مدل‌های پارامتر مینا و مشاهده مینا، رگرسیون پواسون معمولی را با ضرب میانگین  $\mu_t$  توسط یک متغیر تصادفی مثبت  $\exp\{Z_t\}$  برای لحاظ کردن همبستگی مشاهدات، تصحیح می‌کنند. گاهی مواقع از نماد زیر استفاده می‌شود:

$$\begin{aligned} \lambda_t &= \mu_t \exp\{Z_t\} = \exp\{x_t' \beta + Z_t\} \\ &= \exp\{W_t\} \end{aligned} \quad (2)$$

بطوریکه تشخیص یکی از دو رده مدل‌ها به نحوه ساخت  $Z_t$  برمی‌گردد.

کاکس [۵] دسته‌بندی فوق را پیشنهاد کرد. زگر [۱۷] از مدل‌های پارامتر مینا برای مدل‌بندی اطلاعات تعداد بیماران عصبی استفاده کرد. وی از یک رهیافت معادلات

<sup>۶</sup> Link Function  
<sup>۷</sup> Quasi-Likelihood

تعریف ۱. دنباله  $\{\epsilon_t\}$  یک دنباله اختلاف مارتینگل متناظر با  $\mathfrak{S}_t$  نامیده می‌شود، هرگاه برای تمام  $t$ ها،  
 $E(\epsilon_t | \mathfrak{S}_{t-1}) = 0$ .

استفاده از این مدل در کارهای عملی، منوط به مشخص کردن شکل تابعی برای محاسبه  $\epsilon_t$ ها می‌باشد. دیویس و همکاران [۹ و ۶] از باقی‌مانده‌های پیرسون استفاده کردند. یعنی:

$$\epsilon_t = \frac{Y_t - \lambda_t}{\lambda_t^{1/2}}$$

چون  $E[Y_t | \mathfrak{S}_{t-1}] = \lambda_t$ ، براحتی می‌توان نشان داد که  $\{\epsilon_t\}$ ها تشکیل یک دنباله اختلاف مارتینگل با واریانس واحد می‌دهند. در واقع در این مدل، پارامتری برای واریانس  $\epsilon_t$  وجود ندارد. به عنوان یک نتیجه، واریانس و خودهمبستگی  $\{Z_t\}$  بطور کامل توسط پارامترهای  $\pi_i$  قابل بیان هستند:

$$\sigma_Z^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i^2$$

$$\rho_Z(h) = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \pi_i \pi_{i+h}}{\sum_{i=1}^{\infty} \pi_i^2}$$

در این مدل، امید ریاضی شرطی مشاهدات با شرط متغیرهای تبیینی اریب است. یعنی:

$$E[Y_t | \mathbf{x}_t] = \mu_t \cdot E[\exp\{Z_t\}] \quad (4)$$

از آنجایی که ویژگی‌های توزیعی  $Z_t$  یا  $\exp\{Z_t\}$  نامعلوم است، این معادله بیشتر از این ساده نمی‌شود. دیویس و همکاران [۹] محاسبه تقریبی ناریب از  $\mu_t$  را مبتنی بر

معرفی مدل‌های مشاهده مینا و پارامتر مینا و خواص آنها و همچنین روش‌های برآورد پارامترهای مدل متناظر با هر کدام، پرداخته‌اند. بخش ۴ نیز کاربردی از یک مدل GLARMA<sup>۸</sup> را، که عضوی از رده مدل‌های مشاهده مینا می‌باشد، بر روی تعداد تصادفات رانندگی درون شهری مشهد نشان می‌دهد. در نهایت در بخش ۵، خلاصه‌ای از نتایج عملی بکارگیری دو خانواده مدل‌های پارامتر مینا و مشاهده مینا، مطرح شده و مورد بحث قرار گرفته‌اند.

## ۲ مدل‌های مشاهده مینا

مدل‌های مشاهده مینا در برخی موارد با نام مدل‌های انتقالی<sup>۹</sup> در متون مربوط به داده‌های طولی یاد می‌شوند (دیگل و دیگران [۱۱]). برای معرفی مدل ابتدا فرض کنید  $\mathfrak{S}_{t-1} = \sigma(x_t, Y_s, s \leq t-1)$  سیگما میدان تولید شده توسط مشاهدات گذشته  $Y$  و مقادیر گذشته و حال متغیرهای تبیینی  $x'_t$  باشد. اکنون فرض می‌شود که  $Y_t | \mathfrak{S}_{t-1}$  دنباله‌ای از متغیرهای مستقل از توزیع پواسون با میانگین  $\lambda_t$  هستند. علاوه بر این فرض می‌شود فرآیند حالت  $\log(\lambda_t)$  از یک مدل خطی به شکل  $x'_t \beta + Z_t$  پیروی می‌کند که در آن  $Z_t$  یک فرآیند میانگین متحرک نامتناهی مبتنی بر اغتشاشاتی است که توسط خود داده‌ها تولید می‌شوند و یک دنباله اختلاف مارتینگل<sup>۱۰</sup> تشکیل می‌دهند:

$$Z_t = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i \epsilon_{t-i} \quad (3)$$

<sup>۸</sup> Generalized Linear Autoregressive Moving Average  
<sup>۹</sup> Transitional Models  
<sup>۱۰</sup> Martingale Difference Sequence

## ۱.۲ برآورد و استنباط

مقادیر مشاهده شده  $x_t$  بصورت زیر پیشنهاد کردند:

$$\hat{\mu}_t = \exp \left\{ \hat{W}_t - \sigma_Z^2 / 2 \right\}$$

پارامترهای مدل معرفی شده در بالا، با بردار  $\delta = (\beta_1, \dots, \beta_k, \phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q)$  که از بعد  $(k + p + q)$  است، نشان داده می‌شوند. معمولاً برآورد پارامترهای  $\delta$  با استفاده از روش‌های ماکسیمم درست‌نمایی انجام می‌شود. بطور کلی برآورد پارامترها در مدل‌های مشاهده مینا با استفاده از روش درست‌نمایی شرطی کردن بر روی مقادیر اولیه براحتی صورت می‌پذیرد. در این مدل‌ها، تابع درست‌نمایی شرطی و مشتقات اول و دوم آن براحتی و در یک الگوریتم تکراری با استفاده از روش عددی نیوتون-رافسون قابل محاسبه هستند. انحراف معیار برآوردگرها نیز با در نظر گرفتن همبستگی موجود در داده‌ها محاسبه می‌شوند.

برای برآورد مدل به یک سری زمانی مشاهده شده، باید پارامترهای مدل برآورد شوند. اما برآورد کردن پارامترهای یک مجموع نامتناهی بطور مستقیم، غیرممکن است. بنابراین لازم است تا فرآیند میانگین متحرک نامتناهی، برحسب تعدادی متناهی از پارامترها مشخص شود. دیویس و همکاران [۹] پیشنهاد کردند که وزن‌های میانگین متحرک  $\pi_i$  به عنوان ضرایب یک صافی خودبرگشت میانگین متحرک، پارامتری شوند:

$$\pi(B) = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i B^i = \frac{\theta(B)}{\phi(B)} - 1 \quad (5)$$

بطوریکه:

$$\begin{aligned} \theta(B) &= 1 + \sum_{i=1}^q \theta_i B^i \\ \phi(B) &= 1 - \sum_{i=1}^p \phi_i B^i \end{aligned} \quad (6)$$

روش محاسبه برآوردگرهای ماکسیمم درست‌نمایی یک مدل مشاهده مینا بر اساس توزیع پواسون و با استفاده از باقیمانده‌های پیرسون به عنوان دنباله اختلاف مارتینگل حاصل از مدل، توسط دیویس و همکاران [۹] بطور کامل تشریح شده است. لازم به ذکر است که کدم و فوکیانوس [۱۲] برآورد پارامترها را به روش درست‌نمایی جزئی<sup>۱۱</sup> پایه‌ریزی کرده‌اند. البته نتایج استنباط در این مدل‌ها به دور روش درست‌نمایی جزئی و حاشیه‌ای، با هم تطابق دارند [۱۲].

چند جمله‌ای‌هایی، با نماد عملگر پس‌رو  $B$ ، هستند که تمام ریشه‌هایشان خارج دایره به شعاع واحد قرار می‌گیرند. بنابراین  $Z_t$  را می‌توان با یک فرآیند ARMA نمایش داد:

$$Z_t = \sum_{i=1}^p \phi_i (Z_{t-i} + \epsilon_{t-i}) + \sum_{i=1}^q \theta_i \epsilon_{t-i} \quad (7)$$

چنانچه تابع لگاریتم درست‌نمایی بصورت  $l(\delta) = \sum_{t=1}^n \log f(y_t | \mathcal{F}_{t-1})$  تعریف شود که در آن  $f$  تابع احتمال شرطی  $Y_t$  باشد، آنگاه با فرض توزیع

این دسته از مدل‌ها با عنوان مدل‌های خطی تعمیم‌یافته خودبرگشت میانگین متحرک (GLARMA) از مرتبه  $(p, q)$  یا  $GLARMA(p, q)$  نامگذاری شده‌اند.

<sup>۱۱</sup> Partial Likelihood

ویک فرآیند پنهان برای محسوب کردن همبستگی و فرآیندش<sup>۱۲</sup> مشاهدات در مدل است. با در نظر گرفتن این ساختار، سه رهیافت متفاوت را می‌توان معرفی کرد. در اولین رهیافت برای  $\exp\{Z_t\}$  توزیع گاما فرض می‌شود و در واقع برای داده‌های شمارشی، توزیع پواسون مخلوط شده با اثرات تصادفی گاما در نظر گرفته می‌شود. با این فرض‌ها، چگالی‌های حاشیه‌ای دوجمله‌ای منفی حاصل می‌شوند که بر اساس این چگالی‌های حاشیه‌ای، برآورد پارامترها انجام می‌گیرد.

رهیافت دوم، برای  $Z_t$  فرض توزیع نرمال را در نظر می‌گیرد [۴]. بکارگیری این رهیافت، برآوردگرهای کارا نتیجه می‌دهد اما نیاز به محاسبات سنگین عددی و الگوریتم‌های پیچیده آماری دارد. شکل توزیع‌های حاشیه‌ای و گشتاورهای آنها نیز به صورت بسته وجود ندارند. استفاده از الگوریتم‌های پیچیده آماری مانند الگوریتم MCEM<sup>۱۳</sup> در این رهیافت معمول‌اند. رهیافت سوم، مبتنی بر معادلات برآورد تعمیم‌یافته<sup>۱۴</sup> با مشخص کردن گشتاورهای مرتبه اول و دوم  $Y_t$  است و برآورد پارامترها از طریق آماره‌های مناسب نمونه‌ای انجام می‌گیرد (زگر [۱۷]).

با توجه به تعریف مدل‌های پارامتر مینا، مشاهدات شمارشی  $y_t$  با شرط فرآیند پنهان  $Z_t$  بطور مستقل از یک توزیع پواسون با میانگین  $\lambda_t$  تولید شده‌اند:

$$Y_t | Z_{t-1} \sim Po(\lambda_t).$$

در این مدل، امید ریاضی شرطی  $Y_t$  با شرط متغیرهای

پواسون، تابع زیر بایستی برحسب  $\delta$  ماکسیمم شود:

$$l(\delta) = \sum_{t=1}^n (y_t W_t(\delta) - e^{W_t(\delta)}) \quad (۸)$$

برآوردگر ماکسیمم درست‌نمایی  $\delta$  با  $\hat{\delta}$  نشان داده می‌شود. استنباط در مدل‌های مشاهده مینا با استفاده از نتیجه زیر قابل انجام است:

$$\hat{\delta} \approx N\left(\delta_0, \frac{1}{T}\Omega\right) \quad (۹)$$

که  $\delta_0$  مقدار درست پارامتر است و برآوردی از  $\Omega$  با رابطه زیر قابل دستیابی است:

$$\hat{\Omega} = -\left(\frac{1}{T} \frac{\partial^2 l(\delta)}{\partial \delta \partial \delta'} \Big|_{\delta=\hat{\delta}}\right) \quad (۱۰)$$

در مرحله برازش مدل نیز،  $Z_t$  با استفاده از تکرارهای ARMA محاسبه می‌شود. برای  $t \leq 0$ ،  $e_t = 0$  و برای  $t > 0$ ، مراحل سه‌گانه زیر تکرار می‌شوند:

$$\begin{aligned} \hat{Z}_t &= \phi_1(\hat{Z}_{t-1} + e_{t-1}) + \dots \\ &+ \phi_p(\hat{Z}_{t-p} + e_{t-p}) + \theta_1 e_{t-1} + \dots + \theta_q e_{t-q} \\ W_t &= \mathbf{x}'_t \boldsymbol{\beta} + \hat{Z}_t \\ e_t &= (Y_t - e^{W_t}) e^{-\frac{W_t}{\lambda_t}} \end{aligned}$$

## ۳ مدل‌های پارامتر مینا

همانطور که در مقدمه گفته شد، یک مدل پارامتر مینا برای داده‌های شمارشی معمولاً مبتنی بر فرض رگرسیون پواسون برای مدل‌بندی اثرات متغیرهای تبیینی

<sup>۱۲</sup> Overdispersion  
<sup>۱۳</sup> Monte Carlo EM  
<sup>۱۴</sup> Generalized Estimating Equations

خلاصه به معرفی برخی از آنها پرداخته است.

### ۱.۱.۳ رهیافت معادلات برآورد

چنانچه فرض کنیم  $\exp\{Z_t\} = \epsilon_t$ ، آنگاه  $E[Y_t|\epsilon_t] = \exp(x_t'\beta)$  در این حالت زگر [۱۷] رهیافت معادلات برآورد را برای برآورد ضرایب رگرسیون  $\beta$ ، پیشنهاد کرد که مشابه روش شبه در دستنمایی عمل می‌کند. تمام آنچه که برای برآورد پارامترهای رگرسیونی در این رهیافت لازم است، دو گشتاور حاشیه‌ای اول و دوم  $Y_t$  است.

با شرط معلوم بودن فرآیند پنهان  $\epsilon_t$ ، فرض کنید:

$$\begin{aligned} u_t &= E(Y_t|\epsilon_t) = e^{x_t'\beta} \epsilon_t, \\ w_t &= Var(Y_t|\epsilon_t) = u_t \end{aligned} \quad (11)$$

همچنین فرض کنید  $\epsilon_t$  یک فرآیند ایستای نامنفی غیرقابل مشاهده با میانگین  $E(\epsilon_t) = 1$  و تابع کواریانس  $Cov(\epsilon_t, \epsilon_{t+h}) = \sigma^2 \rho_e(h)$  باشد. بنابراین گشتاورهای حاشیه‌ای  $Y_t$  عبارتند از:

$$\begin{aligned} \mu_t &= E(Y_t) = \exp(x_t'\beta), \\ \delta_t &= Var(Y_t) = \mu_t + \sigma^2 \mu_t^2 \end{aligned} \quad (12)$$

اعمال محدودیت گشتاور اول،  $E(\epsilon_t) = 1$ ، به دلیل قابل تفکیک شدن میانگین فرآیند پنهان از ضریب ثابت رگرسیون است. زیرا چنانچه این شرط را قابل نشویم، میانگین فرآیند پنهان و ضریب ثابت با هم مخلوط می‌شوند و قابل تفکیک و شناسایی نخواهند بود. در واقع با این محدودیت، میانگین حاشیه‌ای  $\mu_t$  تنها به  $x_t'\beta$  وابسته خواهد شد و به گشتاورهای فرآیند پنهان وابسته

تبیینی مدل، برابر است با  $E[Y_t|x_t] = \mu_t E[\exp\{Z_t\}]$ . توزیع  $Z_t$  یا  $\exp\{Z_t\}$  را می‌توان طوری تعیین کرد که  $E[\exp\{Z_t\}] = 1$ . بنابراین برخلاف مدل‌های مشاهده مبنا، در این رده از مدل‌ها می‌توان ضرایب متغیرهای تبیینی را بطور مفیدی تعبیر کرد. در واقع می‌توان ضریب رگرسیونی یک متغیر تبیینی را به عنوان تغییر نسبی در میانگین حاشیه‌ای  $Y_t$  در مقیاس لگاریتمی به ازای یک واحد تغییر در متغیر مورد نظر تعبیر کرد.

[۴] فرض نرمال بودن فرآیند پنهان  $Z_t$  را در نظر گرفتند. بویژه فرض کردند که  $Z_t$  یک فرآیند مانای گاوسی  $AR(1)$  است، یعنی  $Z_t = \phi Z_{t-1} + \nu_t$  که در آن  $\{\nu_t\}$  یک دنباله مستقل و هم‌توزیع با توزیع  $N(0, \sigma_\nu^2)$  می‌باشد. چون  $\{Z_t\}$  یک فرآیند گاوسی با  $E[Z_t] = 0$  است، متغیر تصادفی  $\exp\{Z_t\}$  دارای توزیع لگ-نرمال با  $E[\exp\{Z_t\}] = \exp\{0.5 Var[Z_t]\}$  خواهد بود. به عنوان یک نتیجه می‌توان با کاستن  $\sigma_\nu^2$  از برآورد ضریب ثابت رگرسیون، مقداری نارایب برای  $E[Y_t|x_t]$  در این حالت بدست آورد.

### ۱.۳ برآورد و استنباط

مشکل اساسی مدل‌های پارامتر مبنا، محاسبه تابع در دستنمایی آنها و در نتیجه برآورد پارامترها و استنباط در مورد آنهاست. پیش‌بینی مشاهدات آینده سری نیز نسبت به مدل‌های مشاهده مبنا خیلی مشکل‌تر انجام می‌شود. با توجه به این مشکل اساسی، چندین روش و رهیافت برای برآورد و استنباط در این رده از مدل‌ها، توسط افراد مختلف پیشنهاد شده‌اند که این قسمت بطور

نخواهد بود. از طرفی

$$\rho_Y(t, h) = \frac{\rho_\epsilon(h)}{[\{1 + (\sigma^2 \mu_t)^{-1}\} \{1 + (\sigma^2 \mu_{t+h})^{-1}\}]^{1/2}}$$

چون مخرج کسر برابری آخر بیشتر از یک است، خودهمبستگی در  $Y_t$  کمتر یا مساوی خودهمبستگی در  $\epsilon_t$  است. بنابراین از روی خود مشاهدات نمی‌توان ساختار همبستگی موجود در داده‌ها را درست تشخیص داد و با استفاده از مشاهدات، بطور کلی همبستگی موجود در آنها کم برآورد می‌شود.

### ۲.۱.۳ رهیافت مدل‌های خطی تعمیم‌یافته

مدل پیشنهادی چان ولدولتر [۴] نیز مشکل مدل زگر [۱۷] را داراست. یعنی خودهمبستگی موجود در داده‌های شمارشی نمی‌تواند خودهمبستگی مدل را که توسط فرآیند پنهان تولید می‌شود، با دقت برآورد کند. حتی در این حالت چنانچه  $Z_t \sim N\left(-\frac{\sigma_t^2}{\mu_t}, \sigma_t^2\right)$ ، همان مدل زگر [۱۷] حاصل می‌شود. در عمل در چنین مواقعی، بایستی قبل از برآورد تابع خودهمبستگی مدل، رگرسیون پواسون بر روی متغیرهای تبیینی  $x'_t$  برازش داده شود و سپس ساختار خودهمبستگی از روی باقی‌مانده‌های حاصل از مدل خطی تعمیم‌یافته برازش داده شده، برآورد شود. بنابراین به منظور آزمون وجود فرآیند پنهان و در ادامه آن تشخیص ساختار همبستگی مدل، لازم است یک روش برآورد سازگار برای بردار ضرایب رگرسیون فراهم آید. یک روش ساده و معمول برای محاسبه برآوردگرهای سازگار  $\beta$ ، استفاده از مدل خطی تعمیم‌یافته استاندارد است، زیرا برآوردگرهایی که از این روش بدست می‌آیند،

سازگار و دارای توزیع مجانبی نرمال می‌باشند.

### ۳.۱.۳ رهیافت الگوریتم MCEM

در ابتدای این بخش اشاره شد که مشکل اصلی مدل‌های پارامتر مینا، محاسبه تابع درست‌نمایی آنهاست. بنابراین می‌توان از روش‌های مختلفی برای تقریب این تابع استفاده کرد. الگوریتم EM (دمپسترو همکاران [۱۰]) یکی از روش‌های متداول برای محاسبه برآوردگرهای درست‌نمایی ماکسیمم در اینگونه مسایل پیچیده است. اما در مورد داده‌های شمارشی مشکلی که وجود دارد، غیرقابل اجرا بودن مرحله E، محاسبه امید ریاضی شرطی تابع درست‌نمایی توأم مشاهدات و فرآیند پنهان به شرط مشاهدات، الگوریتم است. زیرا توزیع شرطی فرآیند پنهان با شرط مشاهدات، خیلی پیچیده است. تقریب این امید ریاضی توسط روش‌های تربیع عددی<sup>۱۵</sup> نیز به دلیل بالا بودن بعد انتگرال‌ها، ناکاراست (شان و مک‌کالاک [۱۳]). روشی کاراتر و در عین حال ساده برای اجرای مرحله E، استفاده از روش‌های نمونه‌گیری زنجیر مارکوف مانند نمونه‌گیری گیبز یا الگوریتم متروپولیس است. در نتیجه بجای مرحله E در الگوریتم EM، مرحله MCEM اجرا می‌شود. الگوریتم حاصل را الگوریتم MCEM گویند که اولین بار در [۱۵] پیشنهاد شد.

یک خاصیت مهم الگوریتم EM این است که درست‌نمایی داده‌های مشاهده شده همیشه همراه با دنباله EM صعود می‌کند. برای الگوریتم MCEM این خاصیت برقرار نیست، اما چان ولدولتر [۴] نشان دادند که تحت شرایط

تأخیر ۲ و ۳ مولفه AR معنی‌دار تشخیص داده شدند. دو تأخیر  $y_{t-2}$  و  $y_{t-3}$ ، ساختار همبستگی موجود در داده‌ها پس از حذف اثر متغیرهای تبیینی معرفی شده در بالا را مدل‌بندی می‌کنند. نتایج خلاصه شده برآورد مدل در جدول ۱ گزارش شده‌اند. شکل ۲ که مقادیر برازش داده شده مشاهدات، مبتنی بر مدل، را در مقابل مقادیر واقعی آنها نمودار کرده است، بیانگر مناسب بودن مدل برازش داده شده بر داده‌هاست. در واقع می‌توان گفت این مدل، الگوی تغییرات داده‌ها را بخوبی مدل‌بندی کرده است.

## ۵ بحث و نتیجه‌گیری

در بسیاری از مسایل عملی، هدف اصلی یافتن رابطه بین متغیرهای تبیینی اندازه‌گیری شده با داده‌های شمارشی مشاهده شده وابسته به زمان است. در اغلب موارد، متغیرهای تبیینی که لزوم آنها در مدل احساس می‌شوند، وجود دارند. در چنین مواقعی، برازش مدل‌های مختلف سری زمانی شمارشی قابل مقایسه بر روی داده‌ها به عنوان قسمتی از یک تحقیق، لازم می‌شود. به عنوان مثال در مطالعه تأثیر سیاست‌های اجرایی دولت در تعداد حوادث جاده‌ای منجر به مرگ، باید همه نواحی استان‌های کشور بطور جداگانه بررسی شوند. زیرا زمان‌بندی و طبیعت متغیرهای مرتبط با این اطلاعات در نواحی مختلف، متغیر هستند. در این موارد استفاده از روش‌هایی که به سادگی قابل اجرا باشند و تأثیر متغیرها را بر روی سری زمانی شمارشی مشاهده شده به سرعت محاسبه کنند و علاوه بر این همبستگی موجود در داده‌ها را نیز لحاظ کنند، ارجحیت دارند.

مناسب نظم، یک دنباله MCEM با احتمال بالا به ماکسیمم کننده درست‌نمایی داده‌های مشاهده شده نزدیک می‌شود.

## ۴ تعداد تصادفات رانندگی درون شهری مشهد

این قسمت به تشریح کاربرد یکی از اعضای مدل‌های مشاهده مینا معروف به مدل GLARMA پرداخته است. مجموعه داده‌های شمارشی که برای تحلیل در نظر گرفته شده‌اند، تعداد کل تصادفات ماهیانه رانندگی درون شهری مشهد برای دو سال ۱۳۸۲ و ۸۳ می‌باشند. متأسفانه مجموعه اطلاعات دیگر از سایر عواملی که می‌توانند بر این تعداد تصادفات موثر باشند، در دسترس نبودند. لذا با توجه به وابسته بودن مشاهدات به زمان، و رفتار فصلی سری زمانی مشاهدات که نمودار آن در شکل ۱ نمایش داده شده است، اقدام به برازش یک مدل GLARMA شد. روش برآورد پارامترها و برازش مدل، همان روشی است که برای مدل‌های مشاهده مینا توضیح داده شد. برای مدل‌بندی اثر فصلی موجود در داده‌ها از مولفه‌های هارمونیک ماهیانه و فصلی استفاده شده است. علاوه بر این با توجه به رشد افزایشی سری زمانی مشاهدات، یک مولفه روند خطی  $t/n$  نیز در مدل در نظر گرفته شده است. دلیل استفاده از  $t/n$  بجای  $t$  برای مولفه روند، بدست آوردن برآوردی سازگار برای ضریب رگرسیون این مولفه است.

با توجه به مدل‌های مختلفی که بر روی داده‌ها برازش داده شدند، برای مولفه ARMA مدل GLARMA دو



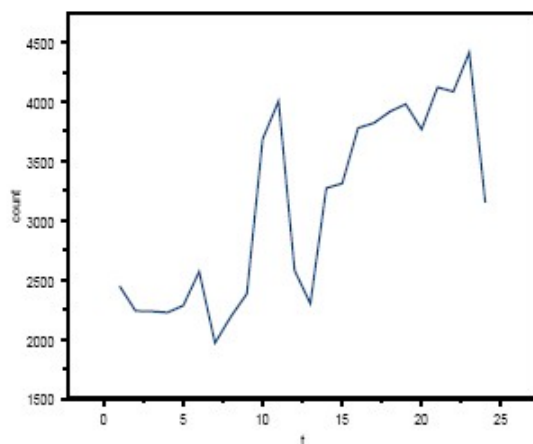
در حال حاضر برآزش مدل‌های پارامتر مینا نیاز به محاسبات کامپیوتری پیچیده و سنگین دارد. اما تعبیر پارامترهای مربوط به متغیرهای تبیینی در این مدل‌ها، ساده و مفید می‌باشد و می‌توان ضریب هر متغیر را به عنوان تغییر نسبی در میانگین حاشیه‌ای  $Y_t$  در مقیاس لگاریتمی به ازای یک واحد تغییر در متغیر تبیینی مورد نظر، تفسیر کرد. از طرف دیگر مدل‌های مشاهده مینا براحتی و با سرعت، قابل اجرا و برآزش هستند. علاوه بر این، این مدل‌ها استنباط اثرات ثابت مدل را در حضور همبستگی داده‌ها تصحیح می‌کنند. اما تعبیر پارامترها

بسته به ساختار همبستگی در نظر گرفته شده در مدل، پیچیده می‌شوند.

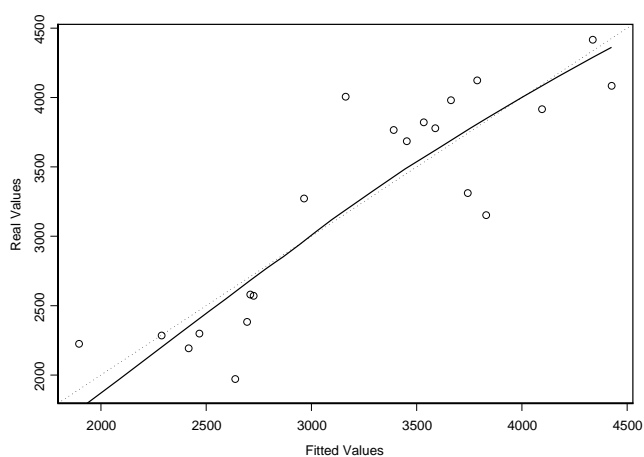
قدردانی: در پایان لازم می‌دانیم از مسئول واحد آمار سازمان آمار و فن آوری اطلاعات شهرداری مشهد، سرکار خانم حاجی‌زاده، برای ارائه اطلاعات مربوط به تصادفات رانندگی شهر مشهد، قدردانی کنیم. همچنین از داوران محترم این مقاله بخاطر نظرات سازنده‌شان در بهبود این اثر، تشکر و قدردانی می‌کنیم.

جدول ۱: برآورد پارامترهای مدل مشاهده مینا

پارامتر	برآورد	انحراف معیار	t-مقدار
ثابت	۱۰/۴۲	۰/۰۱۳	۷۹/۷۱
$t/n$	-۰/۱۰۷	۰/۰۰۸	-۱۳/۰۱
$y_{t-2}$	-۰/۰۰۰۱۶	۰/۰۰۰۰۱	-۱۵/۶۴
$y_{t-3}$	-۰/۰۰۰۱۵	۰/۰۰۰۰۱	-۱۵/۱
$\sin(\frac{Y_t \pi}{\sqrt{Y}})$	-۰/۰۹۵	۰/۰۰۶۶	-۱۴/۴۴
$\cos(\frac{Y_t \pi}{\sqrt{Y}})$	۰/۱۱۲	./۰۰۹	۱۲/۴۶
$\sin(\frac{Y_t \pi}{4})$	۰/۷۷۵	۰/۰۴۵	۱۷/۲
$\cos(\frac{Y_t \pi}{4})$	-۱/۱۶	۰/۰۵۴	-۲۱/۳۶



شکل ۱: نمودار سری زمانی تعداد تصادفات رانندگی شهر مشهد



شکل ۲: مقادیر برازش شده در مقابل مقادیر واقعی سری

مراجع

- [1] Anderson, D.A. and Aitkin, M. ,1985, Variance Component Models with Binary Response: Interviewer Variability, *Journal of the Royal Statistical Society, B*, **47**, 203-210.
- [2] Azzalini, A. ,1982, Approximate Filtering of Parameter-Driven Processes, *Journal of Time Series Analysis*, **3**, 219-223.
- [3] Campbell, M.J. ,1994, Time Series Regression for Counts: An Investigation into the Rela-

- tionship between Sudden Death Syndrome and Environmental Temperature, *Journal of the Royal Statistical Society, A*, **157** 191-208.
- [4] Chan, K.S. and Ledolter, J. ,1995, Monte Carlo EM Estimation for Time Series Models Involving Counts, *Journal of the American Statistical Association*, **90**, 242-252.
- [5] Cox, D.R. ,1981, Statistical Analysis of Time Series: Some Recent Developments, *Scandinavian Journal of Statistics*, **8**, 93-115.
- [6] Davis, R.A., Dunsmuir, W.T.M. and Streett, S.B. ,2003, Observation-Driven Models for Poisson Counts, *Biometrika*, **90**, 777-790.
- [7] Davis, R.A., Dunsmuir, W.T.M. and Streett, S.B. ,2001, Observation-Driven Models for Poisson Counts, *Technical Report*.
- [8] Davis, R.A., Dunsmuir, W.T.M. and Wang, Y. ,2000, On Autocorrelation in a Poisson Regression Model, *Biometrika*, **87**, 491-506.
- [9] Davis, R.A., Dunsmuir, W.T.M. and Wang, Y. ,1999, Modelling Time Series of Count Data, *In Asymptotics, Nonparametrics, and Time Series*, Ed. S. Ghosh, pp. 63-114, New York, Marcel Dekker.
- [10] Dempster, A.P., Laird, N.M. and Rubin, D. ,1977, Maximum Likelihood from Incomplete Data via the EM Algorithm (with Discussion), *Journal of the Royal Statistical Society, B*, **39**, 1-38.
- [11] Diggle, P.J., Liang, K.Y. and Zeger, S.L. ,1994, *Analysis of Longitudinal Data*, Oxford University Press, Oxford.
- [12] Kedem, B. and Fokianos, K. ,2002, *Regression Models for Time Series Analysis*, Wiley, New York.
- [13] Shun, Z. and McCulloch, C.E. ,1995, Laplace Approximation of High-Dimensional Integrals, *Journal of the Royal Statistical Society, B*, **57**, 749-760.

- [14] Stiratelli, R., Laird, N. and Ware, J.H. ,1985, Random Effects Models for Serial Observations with Binary Response, *Biometrics*, **40**, 961-971.
- [15] Wei, C.G. and Tanner, M.A. ,1990, A Monte Carlo Implementation of the EM Algorithm and the Poor Man's Data Augmentation Algorithms, *Journal of the American Statistical Association*, **85**, 699-704.
- [16] West, M., Harrison, P.J. and Migon, H.S. ,1985, Dynamic Generalized Linear Models and Bayesian Forecasting, *Journal of the American Statistical Association*, **80**, 73-96.
- [17] Zeger, S.L. ,1988, A Regression Model for Time Series of Counts, *Biometrika*, **75**, 621-629.
- [18] Zeger, S.L. and Qaqish, B. ,1988, Markov Regression Models for Time Series: A QuasiLikelihood Approach, *Biometrics*, **44**, 1019-1031.