

توابع مفصل^۱ و اندازه‌های ارتباط^۲

محمد حسین علامت ساز^۳ فائزه شفیعی فر^۴

چکیده

هنگامی که چند واحد (سیستم) در یک محیط مشترک قرار دارند، اغلب تحت تاثیر عوامل محیطی، یا ساختار سیستم، دارای وابستگی می‌باشند. این پدیده، در اکثر موارد عملی و برای اکثر داده‌های واقعی رخ می‌دهد. برای تجزیه و تحلیل داده‌های واقعی، در مرحله اول، ساختار وابستگی متغیرها بررسی می‌شود. برای این منظور، اندازه‌های وابستگی گوناگونی معرفی شده‌اند. امروزه، تابع مفصل به عنوان راهی برای مطالعه اندازه‌های آزاد از مقیاس و وابستگی پیشنهاد می‌شوند، زیرا ویژگی‌های ناپارامتری بودن، ناوردایی و وابستگی تابع متغیرهای تصادفی را به خوبی بیان می‌کنند. در مقاله حاضر چگونگی کاربرد تابع مفصل برای به دست آوردن انواع ارتباط، وابستگی، ضرایب همبستگی ناپارامتری و اندازه وابستگی دنباله‌ای تشریح می‌شود.

کلمات کلیدی: تابع مفصل، ضریب همبستگی ناپارامتری، ضریب وابستگی دنباله‌ای.

اندازه‌های ارتباط که از اوایل قرن بیست معرفی و شناخته شدند، برای اندازه‌گیری شدت وابستگی بدون در نظر گرفتن نوع آن به کار می‌روند.

تابع مفصل در سال ۱۹۵۹ توسط اسکلار معرفی شدند. تابع مفصل تابعی است که یک تابع توزیع چند متغیره را به تابع توزیعهای حاشیه‌ای تک متغیره آن پیوند می‌دهد. طبیعتاً یکی از کاربردهای تابع مفصل ساختن توزیعهای توأم، با استفاده از توزیعهای حاشیه‌ای است، ولی

۱. مقدمه

مفاهیم اولیه وابستگی مثبت و منفی، توسط لهمن [۷] بیان شده است. مفاهیمی که توسط وی ارائه شد، همگی در حالت دو متغیره مطرح شده بودند. ازاری و پروشان و والکپ [۴]، ابراهیمی و گوش [۲] و در سالهای اخیر تیلور، بزرگنیا و امینی [۱] مفاهیم وابستگی را تعمیم و در حالت چند متغیره مورد بررسی قرار دادند.

^۱ Copula Function

^۲ Measures of Association

^۳ دانشجوی کارشناسی ارشد دانشگاه اصفهان

^۴ گروه آمار، دانشگاه اصفهان

مثال ۱- برای $\delta > 0$ تابع توزیع توانم زیر را در نظر بگیرید:

$$-\infty < x, y < \infty \quad (4)$$

$$H(x, y) = \exp\{-[e^{-x} + e^{-y} - (e^{\delta x} + e^{\delta y})^{-1/\delta}]\}$$

بدیهی است وقتی $x \rightarrow \infty$ و $y \rightarrow \infty$ به ترتیب توابع حاشیه‌ای تک متغیره به دست می‌آیند:

$$F(x) = \exp\{-e^{-x}\} \quad -\infty < x < \infty$$

$$G(y) = \exp\{-e^{-y}\} \quad -\infty < y < \infty$$

پس با در نظر گرفت $u = F(x)$ و $v = G(y)$ خواهیم داشت:

$$x = -\ln(-\ln(u)) \quad y = -\ln(-\ln(v))$$

با جایگذاری این مقادیر در رابطه ۴ و با استفاده از رابطه ۲، تابع مفصل به دست می‌آید: [۶]

$$0 < u, v < 1$$

$$C(u, v) = uv \exp\{[-\ln u]^{-\delta} + [-\ln v]^{-\delta}\}$$

۳. اندازه‌های ارتباط

با استفاده از توابع مفصل، محاسبه اندازه‌های ارتباط بسیار آسان است.

۱) کندال:

دو مشاهده مستقل (X_1, Y_1) و (X_2, Y_2) از بردار تصادفی (X, Y) را در نظر بگیرید. تابع

$$\tau = P\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0\} - \quad (5)$$

$$P\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0\}$$

به عنوان تفاوت احتمالهای هماهنگی و ناهمانگی میان دو مشاهده (X_1, Y_1) و (X_2, Y_2) از بردار تصادفی پیوسته (X, Y) با تابع توزیع توانم H و توابع حاشیه‌ای مشترک F (برای X_1 و X_2) و G (برای Y_1 و Y_2) تعریف می‌شود.

قضیة ۱- فرض کنید C تابع مفصل باشد. آنگاه:

$$\tau = \frac{1}{4} \iint_{I^2} C(u, v) dC(u, v) - 1 \quad (6)$$

امروزه توابع مفصل به عنوان ابزاری برای مطالعه اندازه‌های آزاد از مقیاس و وابستگی استفاده می‌شوند. زیرا آنها ویژگی‌های ناپارامتری بودن، نارودایی و وابستگی توابع توزیع متغیرهای تصادفی را به خوبی بیان می‌کنند.

در مقاله حاضر، چگونگی استفاده از توابع مفصل در مورد اندازه‌های ارتباط معروفی چون τ کندال، ρ اسپرمن و γ جنبی و مفاهیم وابستگی مربعی، رگرسیونی، نسبت درستیابی و وابستگی در دنباله را تشریح خواهیم کرد.

۲. تابع مفصل

یک تابع مفصل دو بعدی تابعی مانند $C : I^2 \rightarrow I = [0, 1]$ با ویژگی‌های زیر می‌باشد:

$$\forall t \in [0, 1]; \quad (الف)$$

$$C(0, t) = C(t, 0) = 0, \quad C(1, t) = C(t, 1) = t$$

$$\forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in I; \quad u_1 \leq u_2, \quad v_1 \leq v_2 \quad (ب)$$

$$C(u_1, v_1) - C(u_1, v_2) - C(u_2, v_1) + C(u_2, v_2) \geq 0 \quad (1)$$

تابع مفصل C نسبت به هر یک از متغیرهای خود، غیر نزولی و پیوسته است.

قضیه معروف اسکلار بیان می‌دارد که اگر H یک تابع توزیع دو بعدی با تابع توزیعهای حاشیه‌ای F و G باشد، در نتیجه یک تابع مفصل C وجود دارد به طوری که $H(x, y) = C(F(x), G(y))$. بر عکس، برای هر تابع توزیع تک متغیره F و G و هر مفصل C ، تابع H مذکور یک تابع دو بعدی با توزیعهای حاشیه‌ای F و G تعریف می‌کند. همچنین اگر G, F پیوسته باشند، C یکتاست.

بنابراین

$$u, v \in I = [0, 1]; \quad (2)$$

$$C(u, v) = H(F^{-1}(u), G^{-1}(v))$$

کرانه‌ای تابع مفصل توسط فرشه مشخص شد:

$$\begin{cases} W(u, v) = \max\{u + v - 1, 0\} \\ M(u, v) = \min\{u, v\} \\ W(u, v) \leq C(u, v) \leq M(u, v) \end{cases} \quad (3)$$

اثبات:

می‌توان نشان داد که اینتابع تنها از طریق مفصل به توزیع (X_1, Y_1) و (X_2, Y_2) وابسته است. فرض کنید

$$H(x, y) = C(F(x), G(y))$$

باشرطی کردن روی مقادیر (X_1, Y_1) داریم:

$$\begin{aligned} \tau &= 1 - 4 \iint_{I^2, u^\alpha < v^\beta} ((1-\beta)v^{1-\beta} u^\alpha) dudv - \\ &\quad 4 \iint_{I^2, u^\alpha > v^\beta} ((1-\alpha)v u^{1-\alpha}) dudv \end{aligned}$$

$$= 1 - \frac{\alpha(1-\beta)}{\alpha - \alpha\beta + \beta} - 1 + \frac{\alpha}{\beta - \alpha\beta + \alpha}$$

$$= \frac{\alpha\beta}{\beta - \alpha\beta + \alpha}$$

ρ اسپیرمن

سه مشاهده مستقل (X_1, Y_1) ، (X_2, Y_2) و (X_3, Y_3) از بردار (X, Y) را در نظر بگیرید. آنگاه کمیت

$$\rho_s = 3 [P\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0\} - P\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0\}] \quad (4)$$

به ρ اسپیرمن مشهور است.

قضیه ۲- متغیر تصادفی (X, Y) با تابع توزیع توأم H و توزیعهای حاشیه‌ای $F(x)$ و $G(y)$ و تابع مفصل C را در نظر بگیرید. آنگاه:

$$\rho_s = 12 \iint_{I^2} uv dC - 2 \quad (10)$$

اثبات:

سه مشاهده مستقل (X_1, Y_1) ، (X_2, Y_2) و (X_3, Y_3) از بردار (X, Y) را در نظر بگیرید. P را احتمال این که (X_1, Y_1) و (X_2, Y_2) همانگ باشند فرض می‌کنیم، یعنی:

$$\begin{aligned} P &= P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] \quad (11) \\ &= P[X_1 > X_2, Y_1 > Y_2] + P[X_1 < X_2, Y_1 < Y_2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau &= \iint_{R^2} \{P[X_1 < x, Y_1 < y] + P[X_1 > x, Y_1 > y] \\ &\quad - P[X_1 < x, Y_1 > y] - P[X_1 > x, Y_1 < y]\} dH \\ &= \iint_{R^2} \{H(x, y) + [1 - F(x) - G(y) + H(x, y)] \\ &\quad - [F(x) - H(x, y)] - [G(y) - H(x, y)]\} dH \\ &= \iint_{R^2} \{C(u, v) + [1 - u - v + C(u, v)] \\ &\quad - [u - C(u, v)] - [v - C(u, v)]\} dC \end{aligned}$$

که در آن $x = F(u)$ و $y = G(v)$

$$\begin{aligned} \tau &= 4 \iint_{I^2} C(u, v) dC - 2 \iint_{I^2} (u + v) dC + 1 \\ &= 4 \iint_{I^2} C(u, v) dC - 2E(U + V) + 1 \end{aligned}$$

از آنجائی که U و V دارای توزیع یکنواخت بر روی بازه $[0, 1]$ هستند،

$$E(U) = E(V) = \frac{1}{2} \quad \text{داریم:}$$

$$\tau = 4 \iint_{I^2} C(u, v) dC - 1 \quad \text{در نتیجه:}$$

$$\iint_{I^2} C(u, v) dC = \frac{1}{2} \quad (7)$$

$$\iint_{I^2} \frac{\partial}{\partial u} C(u, v) \frac{\partial}{\partial v} C(v, u) du dv$$

لذا رابطه (۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت: [۹]

$$\tau = 1 - 4 \iint_{I^2} \frac{\partial}{\partial u} C(u, v) \frac{\partial}{\partial v} C(v, u) du dv \quad (8)$$

$$\rho_s = 12 \iint_{I'} [C(u, v) - uv] du dv \quad (13)$$

مثال ۳- تابع منفصل فرشه را در نظر بگیرید:

$$C(u, v) = \alpha M(u, v) + (1 - \alpha - \beta)uv + \beta W(u, v)$$

رابطه ۱۱ را برای این منفصل به کار می‌بریم:

$$\begin{aligned} \rho_s &= 12 \left\{ \iint_{I', u < v, u+v-1 > 0} [\alpha u + (1 - \alpha - \beta)uv] du dv + \right. \\ &\quad \left. \iint_{I', u < v, u+v-1 > 0} [\alpha u + (1 - \alpha - \beta)uv + \beta(u + v - 1)] du dv + \right. \\ &\quad \left. \iint_{I', u > v, u+v-1 > 0} [\alpha v + (1 - \alpha - \beta)uv] du dv + \right. \\ &\quad \left. \iint_{I', u > v, u+v-1 > 0} [\alpha v + (1 - \alpha - \beta)uv + \beta(u + v - 1)] du dv \right\} - 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_s &= 12 \left\{ \left[\frac{1}{24} \alpha + \frac{1}{48} (1 - \alpha - \beta) \right] + \left[\frac{1}{48} \alpha - \frac{1}{48} \beta + \frac{5}{48} \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{1}{48} \alpha - \frac{1}{48} \beta + \frac{1}{48} \right] + \left[\frac{1}{48} \alpha - \frac{1}{48} \beta + \frac{5}{48} \right] \right\} - 3 \end{aligned}$$

بنابراین:

$$\rho_s = \alpha - \beta$$

γ جینی:

کبیت زیر یکی دیگر از معیارهای اندازه‌گیری ارتباط است که به γ جینی معروف است:

$$\gamma = 2E(|F(X) + G(Y) - 1| - |F(X) - G(Y)|) \quad (14)$$

قضیه ۳- فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی با منفصل C باشند.

آنگاه اندازه ارتباط جینی برای X و Y عبارت است از:

$$\gamma = 4 \left[\iint_{I'} M(u, v) dC + \iint_{I'} W(u, v) dC \right] - 2 \quad (15)$$

البات:

فرض کنید $x = u$ و $y = v$. در نتیجه

$$\begin{aligned} \gamma &= 2E(|U + V - 1| - |U - V|) \\ &= 2 \iint_{I'} [|u + v - 1| - |u - v|] dC(u, v) \end{aligned}$$

پس با شرطی کردن بر توزیع (X_1, Y_1) و در نظر گرفتن استقلال X_1 و Y_1 داریم:

$$\begin{aligned} P &= \iint_{R'} \{P[X < x]P[Y < y] + \\ &\quad P[X > x]P[Y > y]\} dH \\ &= \iint_{R'} \{F(x)G(y) + (1 - F(x))(1 - G(y))\} dH \\ &= \iint_{I'} \{uv + (1 - u)(1 - v)\} dC \\ &= 2 \iint_{I'} uv dC \\ & \quad \text{پس با توجه به رابطه (۹) داریم:} \end{aligned}$$

$$\rho_s = 6p - 3$$

بنابراین، خواهیم داشت:

$$\rho_s = 12 \iint_{I'} uv dC - 3$$

فرم دیگر ρ_s را می‌توان از رابطه ۱۱ و شرطی کردن روی توزیع (X_1, Y_1) به دست آورد. در این حالت داریم:

$$\begin{aligned} P &= \iint_{R'} \{P[X > x, Y > y] + \\ &\quad P[X < x, Y < y]\} dFdG \\ &= \iint_{I'} \{(1 - F(x) - G(y) + H(x, y)) \\ &\quad H(x, y)\} dudv \end{aligned}$$

با توجه به اینکه U و V دارای توزیع یکنواخت بر بازه $[0, 1]$ هستند:

$$= 2 \iint_{I'} C(u, v) dudv$$

در نتیجه

$$\rho_s = 12 \iint_{I'} C(u, v) dudv - 3 \quad (12)$$

با توجه به توزیع U و V فرم دیگری را نیز می‌توان از رابطه ۱۱ برای ρ_s به صورت زیر به دست آورد: [۹]

حال، چون

$$H(x,y) - F(x)G(y) \geq 0$$

و زوج (X, Y) را وابسته مربعی منفی گویند هر گاه:

$$H(x,y) - F(x)G(y) \leq 0$$

بنابراین اندازه مقطعي وابستگي مربعی در هر نقطه $\in R$ (x, y) برابر

$W(x,y) = H(x,y) - F(x)G(y)$ است. با استفاده از ویژگیهای توابع

مفصل می‌توان یک اندازه، برای وابستگی مربعی مورد انتظار به دست

آورده. این اندازه عبارت است از:

$$E(w) = E(W(x, y)) \quad (16)$$

$$\begin{aligned} &= \iint_{R^2} [H(x, y) - F(x)G(y)] dH(x, y) \\ &= \iint_{I^2} [C(u, v) - uv] dC(u, v) \end{aligned}$$

و در نتیجه

$$E(W) = \frac{1}{12}(3\tau - \rho_s)$$

وابستگی رگرسیونی^۷

زوج متغیر تصادفی (X, Y) را وابسته رگرسیونی مثبت گویند هر گاه

$P[Y \leq y | X = x]$ به ازای تمام x ها بر حسب x نزولی باشد و

وابسته رگرسیونی منفی گویند هر گاه احتمال شرطی فوق بر حسب x

صعودی باشد. با استفاده از توابع مفصل بررسی وابستگی رگرسیونی

بسیار ساده‌تر می‌شود.

قضیه ۴- زوج متغیر تصادفی (X, Y) وابسته رگرسیونی مثبت است

اگر و تنها اگر $\frac{\partial}{\partial u} C(u, v)$ به ازای تمام v ها بر حسب u نزولی باشد

وابسته رگرسیونی مثبت است اگر و تنها اگر $\frac{\partial}{\partial u} C(u, v)$ بر حسب u

صعودی باشد.

اثبات:

$$P[Y \leq y | X = x] = \frac{\frac{\partial}{\partial x} H(x, y)}{\frac{d}{dx} F(x)}$$

$$M(u, v) = \min(u, v) = \frac{1}{2}[u + v - |u - v|]$$

بنابراین داریم:

$$2 \iint_{I^2} M(u, v) dC(u, v) =$$

$$2 \iint_{I^2} u + v - |u - v| dC(u, v) = A$$

چون تابع مفصل یک تابع توزیع دو متغیره با توزیع حاشیه‌ای تک متغیره

یکنواخت بر بازه $(0, 1)$ می‌باشد، داریم:

$$\iint_{I^2} u dC(u, v) = \iint_{I^2} v dC(u, v) = \frac{1}{2}$$

بنابراین

$$A = 2 - 2 \iint_{I^2} |u - v| dC(u, v)$$

همچنین چون

$$W(u + v) = \frac{1}{2}[u, v - 1 + |u + v - 1|]$$

به طور مشابه داریم:

$$2 \iint_{I^2} W(u, v) dC(u, v) = 2 \iint_{I^2} |u + v - 1| dC(u, v)$$

در نتیجه

$$\gamma = 2E(|U + V - 1| - |U - V|)$$

$$= 2[\iint_{I^2} M(u, v) dC + \iint_{I^2} W(u, v) dC] - 2$$

۴. مفاهیم وابستگی

وابستگی مربعی^۸

فرض کنید (X, Y) یک زوج متغیر تصادفی پیوسته با تابع توزیع توان H و توابع توزیع حاشیه‌ای F و G باشد. زوج (X, Y) را وابسته مربعی مثبت گویند هر گاه:

حال با جایگذاری u و v به ترتیب به جای u و v داریم:

$$T = \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C(u, v) dudv \quad (19)$$

$$- \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial}{\partial u} C(u, v) \frac{\partial}{\partial v} C(u, v) dudv$$

با توجه به روابط ۵ و ۷ به سادگی مشاهده می‌شود که انتگرال اول برابر $(1 + \tau)^{-\frac{1}{\tau}}$ و انتگرال دوم برابر $(\tau - 1)^{-\frac{1}{\tau}}$ می‌باشد. بنابراین

$\tau = \frac{1}{2} T$. در نتیجه اگرتابع توزیع (x, y) مطلقاً پیوسته باشد، عبارت

$\frac{1}{\tau}$ مشخص کننده یک اندازه متوسط از وابستگی نسبت درستنمایی است [۸].

وابستگی در دنباله^۱

متغیر تصادفی Y را صعودی در دنباله راست^۱ بر جسب متغیر تصادفی X گویند، هر گاه $[Y \leq y | X > x]$ $p[Y \leq y | X > x]$ به ازای تمام مقادیر y ، بر حسب x صعودی باشد. اگر $Y|X$ صعودی در دنباله راست باشد، آنرا با نماد $LTD(Y|X)$ استفاده می‌شود.

متغیر تصادفی Y را نزولی در دنباله چپ^۱ بر حسب متغیر تصادفی X گویند اگر و تنها اگر $[Y \leq y | X \leq x] p[Y \leq y | X \leq x]$ به ازای تمام مقادیر y بر حسب x نزولی باشد. اگر $Y|X$ نزولی در دنباله چپ باشد، آنرا با نماد $LTD(Y|X)$ نشان می‌دهند [۴ و ۵].

قضیه ۵- فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی با تابع توزیع توأم $H(x, y)$ و به ترتیب با توابع حاشیه‌ای $F(X)$ و $G(Y)$ باشند و تابع مفصل $C(u, v)$ باشد. آنگاه:

الف) $LTD(Y|X)$ اگر و تنها اگر $C(u, v)/u$ به ازای تمام v ها بر حسب u نزولی باشد.

ب) $LTD(Y|X)$ اگر و تنها اگر $u/v + C(u, v)/u - v + 1$ به ازای تمام v ها بر حسب u صعودی باشد، یا $u/v - C(u, v)/u - 1$ به ازای تمام v ها بر حسب u نزولی باشد.

Likelihood ratio dependence^۲

Right Tail Increasing^{۱۰}

Left Tail Decreasing^{۱۱}

$$= \frac{\frac{\partial}{\partial u} C(u, v) \frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial u}} = \frac{\partial}{\partial x} C(u, v)$$

و حکم ثابت می‌شود [۹].

وابستگی نسبت درستنمایی^۸

زوج متغیر تصافی (X, Y) با تابع چگالی پیوسته h ، وابسته نسبت درستنمایی مثبت است اگر و تنها اگر

$$\forall x_1 < x_2, y_1 < y_2;$$

$$h(x_2, y_2)h(x_1, y_1) - h(x_1, y_2)h(x_2, y_1) \geq 0$$

و اگر نامساوی فوق بر عکس باشد زوج متغیر تصافی (X, Y) وابسته نسبت درستنمایی منفی می‌باشد [۶ و ۷]. تعریف می‌کنیم:

$$T = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{y_2} \int_{-\infty}^{x_1} [h(x_2, y_2)h(x_1, y_1) - h(x_1, y_2)h(x_2, y_1)] dx_2 dy_2 dx_1 dy_1 \quad (17)$$

$$T = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{y_2} \int_0^{x_1} [c(u_2, v_2)c(u_1, v_1) - c(u_1, v_2)c(u_2, v_1)] du_2 dv_2 du_1 dv_1$$

که در آن $c(u, v)$ چگالی مفصل، یعنی

$$c(u, v) = (\partial^2 / \partial u \partial v) C(u, v)$$

می‌باشد. بنابراین:

$$h(x, y) = c(F(x), G(y))f(x)g(y)$$

که f و g توابع چگالی X و Y هستند.

برای ارزیابی T ، ابتدا فرض می‌کنیم $(u_2, v_2) T(u_1, v_1)$ ییانگر انتگرال دوگانه درونی باشد. لذا به سادگی داریم:

$$T(u_2, v_2) = C(u_2, v_2) \frac{\partial^2}{\partial u_2 \partial v_2} C(u_2 - v_2) \quad (18)$$

$$- \frac{\partial}{\partial u_2} C(u_2, v_2) \frac{\partial}{\partial v_2} C(u_2, v_2)$$

Likelihood Ratio Dependence^۹

می‌توان نشان داد. ضریب وابستگی در دنباله، اندازه وابستگی در دنباله را نشان می‌دهد. ضریب وابستگی در دنباله بالایی برای متغیرهای تصادفی (X, Y) عبارت است از:

$$\lambda_U = \lim_{u \rightarrow 1} P[Y > G^{-1}(u) | X > F^{-1}(u)] \quad (23)$$

با این شرط که حد فاصله $[0, 1]$ وجود داشته باشد که در آن:

$$F^{-1}(u) = \inf\{x \in R | F(x) > u\}; \forall u \in (0, 1)$$

اگر $[0, 1] \in (0, 1)$ و $Y, X, \lambda_U \in (0, 1)$ را به طور مجانبی وابسته در دنباله بالایی گویند. اگر $\lambda_U = 0$ و $Y, X, \lambda_U \in (0, 1)$ را به طور مجانبی مستقل در دنباله بالایی گویند.

ضریب وابستگی در دنباله پایینی عبارت است از:

$$\lambda_L = \lim_{u \rightarrow 0} P[Y \leq G^{-1}(u) | X \leq F^{-1}(u)] \quad (24)$$

اگر $[0, 1] \in (0, 1)$ و $Y, X, \lambda_L \in (0, 1)$ را به طور مجانبی وابسته در دنباله پایینی گویند. اگر $\lambda_L = 0$ و $Y, X, \lambda_L \in (0, 1)$ را به طور مجانبی مستقل در دنباله پایینی گویند.

قضیه ۶- فرض کنید C تابع مفصل X و Y باشد، آنگاه:

$$\lambda_U = \lim_{u \rightarrow 1} (1 - 2u + C(u, u)) / (1 - u) \quad (25)$$

$$\lambda_L = \lim_{u \rightarrow 0} C(u, u) / u \quad (26)$$

اثبات:

معادل با تعریف (۲۳) می‌توان نوشت:

$$P[Y > G^{-1}(u) | X > F^{-1}(u)] =$$

$$\frac{P[Y > G^{-1}(u), X > F^{-1}(u)]}{P[X > F^{-1}(u)]} =$$

$$\frac{1 - p[X \leq F^{-1}(u)] - p[Y \leq G^{-1}(u)]}{1 - p[X \leq F^{-1}(u)]}$$

$$+ \frac{p[X \leq F^{-1}(u), Y \leq G^{-1}(u)]}{1 - p[X \leq F^{-1}(u)]}$$

همچنین

اثبات:

فرض کنید C یک تابع مفصل برای متغیرهای تصادفی X و Y باشد، و $G(y) = v$ و $F(x) = u$. آنگاه:

$$p[Y \leq y | X \leq x] = \frac{P[Y \leq y, X \leq x]}{P[X \leq x]} \quad (20)$$

$$= \frac{C(u, v)}{u}$$

پس حکم (الف) برقرار است. از طرف دیگر

$$p[Y > y | X > x] = \frac{P[Y > y, X > x]}{P[X > x]} \quad (21)$$

$$= \frac{1 - P[Y \leq y \text{ or } X \leq x]}{1 - P[X \leq x]} \\ = \frac{1 - u - v + C(u, v)}{1 - u}$$

$$P[Y \leq y | X > x] = 1 - P[Y > y | X > x] \quad (22)$$

$$= \frac{v - C(u, v)}{1 - u}$$

بنابراین قسمت (ب) نیز برقرار است.

با توجه به این قضیه، نتیجه زیر بدیهی می‌باشد.

نتیجه - فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی پیوسته با مفصل C باشند، آنگاه:

الف) $LTD(Y|X)$ اگر و تنها اگر

$$\frac{\partial}{\partial u} C(u, v) \leq \frac{C(u, v)}{u}$$

ب) $RTI(Y|X)$ اگر و تنها اگر

$$\frac{\partial}{\partial u} C(u, v) \geq \frac{v - C(u, v)}{1 - u}$$

۵. ضریب وابستگی در دنباله

وابستگی در دنباله مفهومی است که از مطالعه وابستگی بین مقادیر انتهایی ناشی می‌شود. این نوع وابستگیها را به خوبی توسط تابع مفصل

$$= \frac{1 - 2u + u^{\frac{1}{\theta}}}{1 - u}.$$

$$P[Y \leq G^{-1}(u) | X \leq F^{-1}(u))] =$$

$$\frac{P[Y \leq G^{-1}(u), X \leq F^{-1}(u)]}{P[X \leq F^{-1}(u)]}$$

در نتیجه

$$\lambda_U = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u}$$

$$= 2 - \lim_{u \rightarrow 1} 2^{\frac{1}{\theta}} u^{\frac{1}{\theta}-1} = 2 - 2^{\frac{1}{\theta}}$$

بنابراین برای $1 < \theta < \infty$ ، C_θ وابستگی در دنباله بالایی دارد و برای $\theta = 1$ به طور مجازی مستقل در دنباله بالایی می‌باشد.

$$\lambda_L = \lim_{u \rightarrow 0} C(u, u) / u = 0; 1 \leq \theta < \infty$$

به طور مجازی مستقل در دنباله پایینی می‌باشد.

و حکم ثابت می‌شود [۳].

مثال ۴- منفصل دو متغیره گامبل به صورت زیر است:

$$\theta \geq 1; \quad (27)$$

$$C_\theta(u, v) = \exp(-[(-Lnu)^\theta + (-Lnv)^\theta]^{\frac{1}{\theta}})$$

آنگاه

$$\frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u} = \frac{1 - 2u + \exp(2^{\frac{1}{\theta}} Lnu)}{1 - u}$$

مراجع:

[1] امینی دهک، محمد، ۱۳۷۳، تحلیل پیوندهای منفی، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه فردوسی مشهد.

- [2] Ebrahimi, N. and Ghosh, M., 1981, *Multivariate Negative Dependence*, Commun.Stat. Theory Methods, 4, 307-337.
- [3] Emberechts, P., Lindskog, F. and Mcneil, A., 2001, *Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management*, Risklab.ETHZ, Zurich, WWW.math.ethz.ch/finance, will appear in : Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance.
- [4] Esary, J.D., Proschan, F. and Walkup, D.W., 1967, *Association of Random Variables with Applications*, Ann.Math.Statist., 38, 1466- 1474.
- [5] Esary, J.D and Proschan, F., 1972, *Relationships among Some Concepts of Bivariate Dependence*, Ann.Math.Statist., 43, 651- 655.
- [6] Joe, H., 1997, *Multivariate Models and Dependence Concepts*, Chapman & Hall, London.
- [7] Lehman , E.L., 1966, *Some Concept of Dependence*, Ann.Math.Statist, 37, 1137- 1153.
- [8] Nelsen. R.B., 1992, *On Measures of Association as Measures of Positive Dependence*, Statistics & Probability Letters 14, 269- 274.
- [9] Nelsen, R.B., 1999, *An Introduction to Copuals*, Springer, New York.
- [10] Nelsen, R.B., 2001, *Concordance and Copulas: A Survey Distributions with Given Marginals and Statistical Modeling*, (C.Cuadras, J.Fortiana, J.A.Rodriguez Lallena, Eds), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, in press.