یک راه حل کلی برای به دست آوردن کوتاهترین فاصله اطمینان در یک خانواده از توزیعها

فضل اله لک[1] علیرضا نعمت اللهی[2]

چکیده

برای به دست آوردن کوتاهترین فاصله اطمینان پارامترهای مجهول توزیعهایی که تکیه‌گاه آنها به پارامتر مجهول بستگی دارد، روشهایی درکتابهای کلاسیک آمار ریاضی و برخی مقالات ارائه شده است. در این مقاله یک راه حل مناسب کلی برای یافتن کوتاهترین فاصله اطمینان برای پارامترهای مجهول یک خانواده از توزیعها با تکیه‌گاه وابسته به پارامتر مجهول ارائه می‌شود.

مقدمه

مبحث فاصله اطمینان یا برآورد فاصله‌ای، یکی از مهمترین مباحث آماری است که کاربردهای گسترده‌ای در سایر علوم دارد. در این مبحث معمولاً یافتن کوتاهترین فاصله به نحوی که پارامتر مجهول را با ضریب اطمینان داده شده در برداشته باشد، مورد علاقه می‌باشد. چنین فاصله اطمینانی را کوتاهترین فاصله اطمینان می‌نامند. برای به دست آوردن کوتاهترین فاصله اطمینان روشهایی در کتابهای کلاسیک آمار ریاضی نظیر [۱ و۳] و برخی مقالات نظیر[۲] وجود دارد. در منبع [۶] مثالهای متعدد و فراوانی از توزیعهای مختلف به همراه روشهایی برای یافتن کوتاهترین فاصله اطمینان برای پارامترهای مجهول ارائه شده است. در این مقاله سعی شده است با جمع‌بندی روشهای ارائه شده از این منبع و منابع دیگر، کوتاهترین فاصله اطمینان برای یک خانواده از توزیعهایی که تکیه گاه آنها به پارامترهای مجهول بستگی دارد، در قالب دو قضیه بیان شود.

قضیهٔ ۱

فرض کنید $X_1,\dots,X_n$ یک نمونهٔ تصادفی از یک توزیع با چگالی زیر باشد:

$$f(x\mid\theta)=\frac{g(x)}{h(\theta)};a(\theta)<x<b(\theta)$$

وقتی که a یک تابع نزولی و h و b توابعی صعودی از θ باشند. آنگاه کوتاهترین فاصلهٔ اطمینان برای $h(\theta)$ با ضریب $(1-\alpha)$ عبارت است از:

$$\left[h(\hat{\theta}),\,h(\hat{\theta})\alpha^{\frac{-1}{n}}\right]$$

که در آن

$$\hat{\theta}=\max(a^{-1}(Y_1),b^{-1}(Y_n))$$

و

$$Y_1=\min(X_1,\dots,X_n),Y_n=\max(X_1,\dots,X_n).$$

---
[1] بخش آمار و ریاضی، دانشگاه خلیج فارس

[2] بخش آمار، دانشگاه شیراز

اثبات:

ابتدا توجه کنید که

$$\begin{Bmatrix} a(\theta) < Y_1 \\ b(\theta) > Y_n \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \theta > a^{-1}(Y_1) \\ \theta > b^{-1}(Y_n) \end{Bmatrix}$$

بنابراین

$$\theta > \max(a^{-1}(Y_1), b^{-1}(Y_n))$$

با استفاده از قضیهٔ فاکتورگیری می‌توان به راحتی نشان داد که

$$\hat{\theta} = \max(a^{-1}(Y_1), b^{-1}(Y_n))$$

یک آمارهٔ بسنده برای θ است. توجه کنید که $\hat{\theta}$ برآورد ML (درستنمایی ماکزیمم) برای θ نیز می‌باشد. تابع توزیع و تابع چگالی $\hat{\theta}$ به راحتی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$F_{\hat{\theta}}(y) = p[\max(a^{-1}(Y_1), b^{-1}(Y_n)) \le y]$$

$$= P[a^{-1}(Y_1) \le y, b^{-1}(Y_n) \le y]$$

$$= P[Y_1 \ge a(y), Y_n \le b(y)]$$

$$= P[X_1 \ge a(y), X_1 \le b(y); \forall i = 1,\dots,n]$$

$$= [P(a(y) \le X_i \le b(y))]^n$$

$$= \left[\int_{a(y)}^{b(y)} f(x_i \mid \theta) dx_i\right]^n = \left[\int_{a(y)}^{b(y)} \frac{g(x_i)}{h(\theta)} dx_i\right]^n$$

$$= \left(\frac{1}{h(\theta)}\right)^n \left[\int_{a(y)}^{b(y)} g(x_i) dx_i\right]^n$$

$$= \frac{1}{(h(\theta))^n}(h(y))^n.$$

بنابراین

$$F_{\hat{\theta}}(y) = \left(\frac{h(y)}{h(\theta)}\right)^n, y < \theta$$

و در نتیجه

$$f_{\hat{\theta}}(y) = \frac{d}{dy}\left(\frac{h(y)}{h(\theta)}\right)^n$$

$$= \frac{n}{(h(\theta))^n}(h'(y))(h(y))^{n-1}; y < \theta.$$

حال ثابت می‌کنیم که $Q = h(\hat{\theta})/h(\theta)$ دارای توزیع بتا با پارامترهای n و ۱ است. ابتدا توجه کنید که اگر $w = h(\hat{\theta})$ ، آنگاه $\hat{\theta} = h^{-1}(w)$ و

$$f_w(w) = f_{\hat{\theta}}(h^{-1}(w))\left|\frac{d(\hat{\theta})}{dw}\right|$$

$$= \frac{n}{(h(\theta))^n}\left[h'(h^{-1}(w))\right]\left[h(h^{-1}(w))\right]^{n-1}\left|\frac{dh^{-1}(w)}{dw}\right|$$

$$= \frac{n}{(h(\theta))^n} h'(h^{-1}(w)) w^{n-1} \frac{1}{h(h^{-1}(w))}$$

$$= \frac{nw^{n-1}}{(h(\theta))^n}$$

(h تابعی صعودی است). حال توجه کنید که $Q = W/h(\theta)$ و

$$f_Q(q) = f_w(qh(\theta)).h(\theta)$$

$$= \frac{nq^{n-1}(h(\theta))^{n-1}}{(h(\theta))^n}.h(\theta); 0 < q < 1$$

$$= nq^{n-1}; 0 < q < 1$$

بنابراین Q دارای توزیع بتا با پارامتر n و ۱ و یک تابع محوری است. حال باید a و b را طوری پیدا کنیم که

$$p(a < Q < b) = 1 - \alpha$$

در نتیجه

$$\int_a^b nq^{n-1} dq = 1 - \alpha \Rightarrow$$

$$b^n - a^n = 1 - \alpha$$

اگر $0 < a < b < 1$ باشد، آنگاه

$$p\left[a < \frac{h(\hat{\theta})}{h(\theta)} < b\right] =$$

$$p\left[\frac{h(\hat{\theta})}{b} < h(\theta) < \frac{h(\hat{\theta})}{a}\right] = 1 - \alpha.$$

پس طول فاصله اطمینان برابر مقدار زیر می‌باشد:

$$. L = h(\hat{\theta})\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)$$

حال باید این طول را با توجه به محدودیت

$$b^n - a^n = 1 - \alpha$$

مینیمم کنیم. به آسانی می‌توان نشان داد که

$$. a = \alpha^{\frac{1}{n}} \text{ و } b = 1$$

حال با جایگذاری این مقادیر در رابطهٔ بالا داریم:

$$p\left(h(\hat{\theta}) < h(\theta) < h(\hat{\theta}).\alpha^{\frac{-1}{n}}\right) = 1 - \alpha$$

لذا حکم ثابت است. به مثالهای زیر توجه کنید.

مثال ۱:

فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفی از تابع چگالی زیر باشد:

$$f(x \mid \theta) = \frac{1}{\theta} I_{(0,\theta]}(x)$$

کوتاهترین فاصله اطمینان برای θ را به دست آورید.

حل:

با استفاده از قضیهٔ ۱ داریم:

$$a(\theta) = 0, b(\theta) = \theta, h(\theta) = \theta, g(x) = 1$$

و

$$\hat{\theta} = Y_n$$

بنابراین فاصلهٔ

$$\left(Y_n, Y_n \alpha^{\frac{-1}{n}}\right)$$

کوتاهترین فاصله اطمینان $100(1-\alpha)$ درصدی برای θ است.

مثال ۲:

فرض کنید $X_1, \dots X_n$ یک نمونهٔ تصادفی از تابع چگالی زیر باشد:

$$. f(x \mid \theta) = \frac{1}{2\theta} I_{[-\theta,\theta]}(x)$$

در این حالت با استفاده از قضیهٔ ۱ داریم :

$$. b(\theta) = \theta, a(\theta) = -\theta, h(\theta) = 2\theta, g(x) = 1$$

می‌توان نشان داد که $\hat{\theta} = \max(-Y_1, Y_n)$ برآورد ML و $\hat{\theta}/\theta$ دارای توزیع بتا با پارامترهای n و ۱ است. پس با توجه به رابطهٔ زیر

$$p\left(2\theta \in (2\hat{\theta}, 2\hat{\theta}\alpha^{\frac{-1}{n}})\right) = p\left(\theta \in (\hat{\theta}, \hat{\theta}\alpha^{\frac{-1}{n}})\right)$$

کوتاهترین فاصله اطمینان برای θ عبارت است از:

$$. \left(\hat{\theta}, \hat{\theta}\alpha^{\frac{-1}{n}}\right)$$

مثال ۳ :

فرض کنید $X_1, \dots X_n$ یک نمونهٔ تصادفی از تابع چگالی زیر باشد:

$$. f(x \mid \theta) = \frac{2x}{\theta^2} I_{(0,\theta]}(x)$$

با استفاده از قضیهٔ ۱ داریم:

$$b(\theta) = \theta, a(\theta) = 0, h(\theta) = \theta^2, g(x) = 2x$$

و $\hat{\theta} = Y_n$ یک آمارهٔ بسنده و برآورد ML برای θ می‌باشد. در نتیجه کوتاهترین فاصله اطمینان $100(1-\alpha)$ درصدی برای θ^2 به صورت زیر است:

$$. \left(Y_n^2, Y_n^2 \alpha^{\frac{-1}{n}}\right)$$

مثال ٤ :

فرض کنید $X_1, \dots X_n$ یک نمونهٔ تصادفی از تابع چگالی زیر باشد:

$$. f(x \mid \theta) = \frac{\theta}{(\theta - 1)x^2} I_{(1,\theta)}(x)$$

بنا به قضیهٔ ۱ در این مسئله

$$.h(\theta)=\frac{1-\theta}{\theta}, g(x)=\frac{1}{x^2}$$

به سادگی نشان داده می‌شود که h تابعی صعودی از θ است و $b(\theta)=\theta$ و $\hat{\theta}=Y_n$ برآورد ML و آمارهٔ بسنده برای θ می‌باشد. بنابراین کوتاهترین فاصله اطمینان برای $h(\theta)$ به صورت زیر است:

$$p\left(\frac{Y_n-1}{y_n}<\frac{\theta-1}{\theta}<\frac{Y_n-1}{Y_n}\alpha^{\frac{-1}{n}}\right)$$

$$=p\left(\frac{1-Y_n}{Y_n}\alpha^{\frac{-1}{n}}<\frac{1}{\theta}-1<\frac{1-Y_n}{Y_n}\right)$$

$$=p\left(\frac{1-Y_n}{Y_n}\alpha^{\frac{-1}{n}}+1<\frac{1}{\theta}<\frac{1-Y_n}{Y_n}+1\right)$$

$$=p\left(\frac{(1-Y_n)\alpha^{\frac{-1}{n}}+Y_n}{Y_n}<\frac{1}{\theta}<\frac{1}{Y_n}\right)$$

$$=p\left(Y_n<\theta<\frac{Y_n}{(1-Y_n)\alpha^{\frac{-1}{n}}+Y_n}\right)$$

$$=1-\alpha$$

پس کوتاهترین فاصله اطمینان $100(1-\alpha)$ درصدی برای θ به صورت زیر است:

$$.\left(Y_n,\frac{Y_n}{(1-Y_n)\alpha^{\frac{-1}{n}}+Y_n}\right)$$

قضیهٔ ۱ را می‌توان درحالتی که $a(\theta)$ یک تابع صعودی و b و h توابعی نزولی از θ باشند، نیز اثبات کرد.

قضیهٔ ۲

فرض کنید $X_1,...,X_n$ یک نمونهٔ تصادفی n تایی از تابع چگالی زیر باشد:

$$f(x\mid\theta)=\frac{g(x)}{h(\theta)};a(\theta)<x<b(\theta)$$

که در آن a یک تابع صعودی و h و b توابعی نزولی از θ باشند. آنگاه کوتاهترین فاصله اطمینان برای $h(\theta)$ با ضریب $(1-\alpha)$ عبارت است از:

$$\left[h(\hat{\theta}), h(\hat{\theta})\alpha^{\frac{-1}{n}}\right]$$

که در آن

$$\hat{\theta}=\min(a^{-1}(Y_1),b^{-1}(Y_n))$$

و

$$.Y_1=\min(X_1,...,X_n),Y_n=\max(X_1,...,X_n)$$

اثبات:

در اینجا نیز مانند اثبات قضیهٔ ۱، $\hat{\theta}=\min\left(\alpha^{-1}(Y_1),b^{-1}(Y_n)\right)$ آمارهٔ بسنده و برآورد ML برای θ است که تابع توزیع به صورت زیر به دست می‌آید:

$$F_{\hat{\theta}}(y)=1-[p(a(y)\le X_i\le b(y))]^n$$

$$=1-\frac{1}{(h(\theta))^n}(h(y))^n;y>\theta$$

در نتیجه

$$f_{\hat{\theta}}(y)=-\frac{n}{(h(\theta))^n}(h'(y))(h(y))^{n-1};y>\theta$$

فرض کنید $w=h(\hat{\theta})$. در این صورت:

$$f_w(w)=f_{\hat{\theta}}(h^{-1}(w))\left|\frac{d(\hat{\theta})}{dw}\right|$$

$$=-\frac{n}{(h(\theta))^n}\left[h'(h^{-1}(w))\right]\left[h(h^{-1}(w))\right]^{n-1}\left|\frac{dh^{-1}(w)}{dw}\right|$$

$$=-\frac{n}{(h(\theta))^n}h'(h^{-1}(w))w^{n-1}\left(-\frac{1}{h(h^{-1}(w))}\right)$$

$$=\frac{nw^{n-1}}{(h(\theta))^n}$$

اگر $Q=h(\hat{\theta})/h(\theta)$ آنگاه

$$f_Q(q)=\frac{nq^{n-1}(h(\theta))^{n-1}}{(h(\theta))^n}.h(\theta);0<q<1$$

$$= nq^{n-1}; 0 < q < 1$$

مشابه حالت قبل کوتاهترین فاصله اطمینان $(1-\alpha)100$ درصدی برای $h(\theta)$ به صورت زیر می‌باشد:

$$\left(h(\hat{\theta}), h(\hat{\theta}).\alpha^{\frac{-1}{n}}\right).$$

به مثال زیر در این زمینه توجه کنید.

مثال ۵:

فرض کنید $X_1,...,X_n$ یک نمونهٔ تصادفی n تایی از تابع چگالی زیر باشد:

$$f(x \mid \theta) = \frac{\theta}{x^2} I_{(\theta,\infty)}(x).$$

طبق قضیهٔ ۲ داریم:

$$\hat{\theta} = Y_1, a(\theta) = \theta, h(\theta) = \frac{1}{\theta}, g(x) = \frac{1}{x^2}.$$

پس کوتاهترین فاصله اطمینان $(1-\alpha)100$ درصدی برای $h(\theta) = \frac{1}{\theta}$ به صورت زیر است:

$$p\left(\frac{1}{Y_1} < \frac{1}{\theta} < \frac{1}{Y_1}\alpha^{\frac{-1}{n}}\right) = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow p\left(Y_1\alpha^{\frac{1}{n}} < \theta < Y_1\right) = 1-\alpha$$

بنابراین کوتاهترین فاصله اطمینان $(1-\alpha)100$ درصدی برای θ عبارت است از:

$$\left(Y_1\alpha^{\frac{1}{n}}, Y_1\right).$$

مثال ۵ را می‌توان به حالت کلی زیر تعمیم داد.

مثال ۶:

فرض کنید $X_1,...,X_n$ یک نمونهٔ تصادفی از تابع چگالی زیر باشد:

$$f(x \mid \theta) = \frac{k\theta^k}{x^{k+1}}; \theta < x, \theta > 0, k > 0.$$

طبق قضیه داریم:

$$\hat{\theta} = Y_1, a(\theta) = \theta, h(\theta) = \frac{1}{\theta^k}, g(x) = \frac{k}{x^{k+1}}.$$

پس کوتاهترین فاصله اطمینان $(1-\alpha)100$ درصدی برای $h(\theta) = \frac{1}{\theta^k}$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$p\left(\frac{1}{Y_1^k} < \frac{1}{\theta^k} < \frac{1}{Y_1^k}\alpha^{\frac{-1}{n}}\right) = 1-\alpha$$

در نتیجه

$$p\left(Y_1^k\alpha^{\frac{1}{n}} < \theta^k < Y_1^k\right) = 1-\alpha$$

و

$$p\left(Y_1^k\alpha^{\frac{1}{kn}} < \theta < Y_1\right) = 1-\alpha$$

بنابراین کوتاهترین فاصله اطمینان $(1-\alpha)100$ درصدی برای θ عبارت است از:

$$\left(Y_1\alpha^{\frac{1}{kn}}, Y_1\right).$$

مراجع

[۱] پارسیان، احمد، ۱۳۷۸، مبانی آمار ریاضی، انتشارات دانشگاه صنعتی اصفهان.

[2] Kosmas K. Ferentions, 1990, *Shortest Confidence Intervals for Families of Distributions Involving Truncation Parameters,* The America Statistician, vol. 44, No. 2.

[3] Rohatgi, V.K., 1984, *Statistical Inference,* John Wiley and Sons, New York.