نمونه گیری گیبس[۱]

سعید زال زاده[۲]

چکیده

در این مقاله تلاش شده است تا با ارائهٔ مثالهای ساده و بدون پرداختن به مباحث نظری (نظیر اثبات همگرایی و یا مقایسه با روشهای دیگر)، روش نمونه گیری گیبس را توضیح داده و برخی از کاربردهای آن را معرفی کنیم.

۱. مقدمه

تکامل روزافزون رایانه و دسترسی آسان به رایانه‌های سریع، باعث شده است که روشهای الگوریتمی همچون نمونه گیری گیبس، ابزارهایی مفید و ضروری برای حل مسائل آماریی باشند که حل آنها به صورت تحلیلی میسر نیست. نمونه گیری گیبس یک روش الگوریتمی (مثل الگوریتم EM) است که ایدهٔ اولیهٔ آن توسط متروپلیس و تلر[۳] در سال ۱۹۵۳ ارائه و سپس با مقاله‌ای که گیمان و گیمان[٤] [٤] در مورد مدلهای پردازش تصویر ارائه دادند، وارد مرحلهٔ جدیدی شد.

نمونه گیری گیبس اساسا مبتنی بر خاصیت مارکوفی فرایندهای تصادفی و روشهای مونت کارلوست، به طوری که گاهی نمونه‌های تولید شده با استفاده از این روش را نمونهٔ مونت کارلو نیز می‌نامند.

۲. نمونه گیری گیبس چیست؟

نمونه گیری گیبس را می‌توان یک ابزار شبیه سازی برای به دست آوردن نمونه‌های تصادفی از تابع توزیع توأم نرمال نشده، دانست. این نمونه‌ها، نمونه‌هایی را نیز از توزیعهای حاشیه‌ای مربوط به توزیع توأم تولید می‌کنند.

در بسیاری از مسائل آماری با مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی سروکار داریم که علاقه‌مند به توزیعهای حاشیه‌ای آنها یا اطلاعاتی در مورد آنها هستیم. در چنین مواقعی اگر توزیع توأم نرمال شدهٔ این متغیرها موجود باشد، می‌توانیم چگالیهای حاشیه‌ای را به طور تحلیلی و دقیق به دست آوریم. غالبا در بسیاری از این مسائل، توزیع توأم متغیرها در عمل نامعلوم است، اما مجموعه‌ای از توزیعهای شرطی وجود دارد. اگر مجموعهٔ مناسبی از چگالیهای شرطی موجود باشد، می‌توان با توسل به روشهای مونت کارلو و به کارگیری تکنیکهای نمونه گیری مجدد[۵] مانند نمونه گیری جانشین ساز (جایگشتی)[٦] و یا نمونه گیری گیبس، یک نمونهٔ مؤثر از چگالی توأم و احتمالا حاشیه‌ای مورد نظر را تولید کرده و سپس به وسیلهٔ نمونهٔ تولید شده، تابع چگالی و یا خصیصه‌های مربوط به آن را با درجهٔ اطمینان دلخواهی محاسبه کرد.

نمونه گیری گیبس در واقع راهی برای تولید نمونهٔ تصادفی از یک تابع چگالی حاشیه‌ای است، بدون آن که نیازی به محاسبهٔ خود تابع چگالی باشد. بیشترین کاربرد نمونه گیری گیبس، استفاده از آن برای به دست آوردن توزیعهای پسین در مدلهای بیزی است. علاوه بر این، در روشهای کلاسیک نیز (برای محاسبهٔ توابع درستنمایی و تعیین

---

[۱] Gibbs Sampling

[۲] گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه سمنان

[۳] Metropolis and Teller

[٤] Geman,S. & Geman,D.

[۵] Resampling Technique

[٦] Substitution Sampling

برآوردهای MLE)، استفاده از این روش بسیار سودمند است.

فرض کنید توزیع توأم $f(x, y_1, \ldots, y_p)$ معلوم باشد و بخواهیم برخی از مشخصات توزیع حاشیه‌ای

$$f(x) = \int \ldots \int f(x, y_1, \ldots, y_p) dy_1 \ldots dy_p \qquad (1)$$

را مثل میانگین و واریانس به دست آوریم. احتمالا به طور معمول باید $f(x)$ را محاسبه کرده و با استفاده از آن، مشخصات مورد نظر را محاسبه کنیم.

در بسیاری از حالتها، محاسبهٔ انتگرال (۱) مستقیما یا با کمک آنالیز عددی بسیار مشکل است. در چنین حالتهایی نمونه‌گیری گیبس راه حل دیگری برای به دست آوردن $f(x)$ ارائه می‌کند.

به جای محاسبه یا تقریب $f(x)$ به طور مستقیم، با استفاده از نمونه‌گیری گیبس می‌توان یک نمونهٔ مؤثر $x_1, \ldots, x_m$ از توزیع $f(x)$ را بدون نیاز به $f(x)$ تولید کرد. با شبیه سازی یک نمونه به اندازهٔ کافی بزرگ، میانگین و واریانس یا هر مشخصهٔ دیگر $f(x)$ را می‌توان با درجهٔ اطمینان دلخواهی به دست آورد. واقعیت مهم این است که نتایج نهایی محاسبات، هرچند که بر اساس شبیه سازی است ولی برآوردهایی برای کمیتهای جامعه هستند. به عنوان مثال، برای محاسبهٔ میانگین $f(x)$ از

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i$$

و این حقیقت که با احتمال یک داریم:

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i \to E(X) \qquad (2)$$

استفاده می‌کنیم. بنابراین وقتی که m به اندازهٔ کافی بزرگ اختیار شود، هر مشخصهٔ جامعه، حتی خود چگالی را می‌توان با درجهٔ اطمینان دلخواه به دست آورد. برای درک نمونه‌گیری گیبس ابتدا حالت دو متغیره را بررسی می‌کنیم.

۲-۱ حالت دو متغیره

دو متغیر تصادفی X و Y را در نظر بگیرید. در نمونه‌گیری گیبس برای تولید یک نمونه از چگالی $f(x)$، ازچگالیهای شرطی $f(x \mid y)$ و $f(y \mid x)$ (که اغلب در مدلهای آماری معلوم اند) به جای خود $f(x)$ استفاده می‌شود. این کار با تولید یک دنباله از متغیرهای تصادفی

$$Y'_0, X'_0, Y'_1, X'_1, Y'_2, X'_2, \ldots, Y'_k, X'_k \qquad (3)$$

که آن را دنبالهٔ گیبس[7] می‌نامند، انجام می‌شود. برای تولید دنبالهٔ گیبس (۳) ابتدا مقدار اولیهٔ $Y'_0 = y'_0$ را تعیین کرده و سپس (۳) را به طور مکرر و متناوب با استفاده از

$$X'_i \sim f(x \mid Y'_i = y'_i)$$

$$Y'_{i+1} \sim f(y \mid X'_i = x'_i) \qquad (4)$$

تولید می‌کنیم. تحت شرایط کلی، به طور منطقی، ثابت می‌شود که وقتی $k \to \infty$ توزیع X'_k به $f(x)$، توزیع حاشیه‌ای X، همگرا می‌شود. بنابراین برای k به اندازهٔ کافی بزرگ، مشاهدات نهایی $X'_k = x'_k$ در (۳) واقعا یک نمونهٔ مؤثر از نقاط $f(x)$ است. برای مثال، اسمیت[8] [۲] m دنبالهٔ گیبس مستقل را با طول k تولید کرد و سپس مقادیر نهایی X'_k را از هر یک از دنباله‌ها به کار برد. در این روش اگر k به اندازهٔ کافی بزرگ انتخاب شود، یک نمونهٔ i.i.d. از $f(x)$ به دست می‌آید. برای روشن شدن مطلب، روش بالا را در مثالهای زیر توضیح می‌دهیم.

مثال ۱- فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی با تابع چگالی توأم زیر باشند:

$$f(x,y) \propto \binom{n}{x} y^{x+\alpha+1}(1-y)^{n-x+\beta-1} \qquad (5)$$
$$; \quad x = 0, 1, \ldots, n \quad , \quad 0 \le y \le 1$$

همچنین فرض کنید علاقه‌مند به محاسبهٔ برخی از مشخصات $f(x)$ (توزیع حاشیه‌ای X) باشیم. با استفاده از نمونه‌گیری گیبس یک نمونه از توزیع حاشیه‌ای X را تولید می‌کنیم. از (۵) (بدون این که به α، β و n بستگی داشته باشد) نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} f(x \mid y) &\sim Binomial(n, y) \\ f(y \mid x) &\sim Beta(x+\alpha, n-x+\beta) \end{aligned} \qquad (6)$$

با به کارگیری طرح مکرر (۴) برای توزیعهای (۶) می‌توانیم یک نمونهٔ $x_1, x_2, \ldots, x_m$ را از $f(x)$ تولید کرده و سپس با استفاده از آن مشخصات مورد نظر را برآورد کنیم. ممکن است خواننده عنوان کند

[7] Gibbs sequence

[8] Smith

که در این مثال نیازی به نمونه‌گیری گیبس نیست، زیرا می‌توان $f(x)$ را از رابطهٔ (۵) به صورت توزیع بتا ـ دوجمله‌ای به دست آورد و سپس مشخصات مورد نیاز $f(x)$ را مستقیماً با استفاده از آن و بدون آن که خود را با توزیعهای شرطی درگیر کنیم، محاسبه کرد. به هر حال، این مثال، مثالی ساده برای نشان دادن این موضوع است که :

$$f(x)=\binom{n}{x}\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha).\Gamma(\beta)}\frac{\Gamma(x+\alpha)\Gamma(n-x+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+n)} \quad (۷)$$

$$;x=0,1,\dots,n$$

شکل (۱) بافتنگار دو نمونهٔ $x_1,x_2,\dots,x_m$ را با $m=500$، $n=16$، $\beta=4$ و $\alpha=2$ که به دو روش از چگالی $f(x)$ تولید شده‌اند، نشان می‌دهد. در یک روش، این نمونه مستقیماً از چگالی (۷) تولید شده و در روش دیگر، این نمونه با استفاده از چگالیهای شرطی (٦) و طرح نمونه‌گیری گیبس با $k=15$ تولید شده است. تشابه دو بافتنگار در شکل (۱) تأییدی بر این ادعاست که طرح نمونه‌گیری گیبس واقعاً متغیرهایی از توزیع حاشیه‌ای را تولید می‌کند. این دو نمونه به وسیلهٔ برنامه‌ای که با نرم‌افزار s-plus نوشته شده است، به دست آمده‌اند.

نکته‌ای که باید به آن توجه داشته باشیم این است که نمونه‌گیری گیبس نیازی به توزیع توأم که با استفاده از رابطهٔ

$$f(x)=\frac{f(x,y)}{f(y\mid x)}$$

$f(x)$ را محاسبه کند، ندارد. مثال بعد نشان می‌دهد که نمونه‌گیری گیبس برای وقتی که $f(x)$ و $f(y)$ یا $f(x,y)$ قابل محاسبه نباشند، ضروری است.

مثال ۲ـ فرض کنید X و Y دارای توزیعهای شرطی نمایی محدود شده به بازهٔ $(0,B)$ باشند، یعنی

$$f(x\mid y)\propto ye^{-yx};0<x<B<\infty \quad (۸)$$

$$f(y\mid x)\propto xe^{-xy};0<y<B<\infty$$

که در آن B یک ثابت معلوم است. محدودیت به بازهٔ $(0,B)$ ما را مطمئن می‌کند که توزیع حاشیه‌ای $f(x)$ وجود دارد. اگر B متناهی نباشد، آنگاه چگالیهای (۸) یک زوج معتبر از چگالیهای شرطی نیست. به این مفهوم که چگالی توأم $f(x,y)$ وجود ندارد و در این صورت دنبالهٔ گیبس همگرا نخواهد شد. شرایط تعیین چگالیهای حاشیه‌ای و همچنین جزئیات مربوط به شرایط همگرایی، توسط کارلین و شرویش[۹] در سال ۱۹۹۰ مورد بررسی قرار گرفته است.

در این مثال توزیع حاشیه‌ای به سادگی قابل محاسبه نیست ولی با استفاده از نمونه‌گیری گیبس برای شرطهای (۸) هر مشخصهٔ $f(x)$ را می‌توان به دست آورد. شکل (۲) بافتنگار یک نمونهٔ $m=500$ تایی از $f(x)$ را که با استفاده از مقادیر نهایی دنبالهٔ گیبس به طول $k=15$ برای $B=5$ به دست آمده، نشان می‌دهد.

۲-۲ برآورد چگالیهای حاشیه‌ای

نمونه‌گیری گیبس را می‌توان برای برآورد خود چگالی حاشیه‌ای نیز به کار برد. در دنبالهٔ گیبس (۳) $X'_k=x'_k$ یک تحقق از $f(x)$ یعنی $x_1,\dots,x_m$ از توزیع $f(x)$ و $Y'_k=y'_k$ یک تحقق از $f(y)$ یعنی $y_1,\dots,y_m$ از توزیع $f(y)$ هستند. علاوه بر این میانگین چگالیهای شرطی $f(x\mid Y_k=y_k)$ به $f(x)$ میل می‌کند. بنابراین برای محاسبهٔ $f(x)$ کافی است میانگین مقادیر نهایی چگالیهای شرطی دنبالهٔ گیبس را محاسبه کنیم، یعنی $f(x)$ را با استفاده از

$$f(x)=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}f(x\mid y_i) \quad (۹)$$

برآورد نماییم. در رابطهٔ (۹) $y_1,\dots,y_m$ مقادیر نهایی به دست آمدهٔ دنبالهٔ گیبس هستند. پشتوانهٔ فرمول (۹) این است که

$$E[f(x\mid y)]=\int f(x\mid y)f(y)dy=f(x) \quad (۱۰)$$

روش برآورد چگالی (۹) را می‌توان برای توزیعهای گسسته نیز به کار برد. مثلا اگر $y_1,\dots,y_m$ مقادیر نهایی y در m نمونه‌گیبس برای چگالیهای شرطی مثال (۱) باشند، می‌توان متناظر با (۹) احتمالهای حاشیه‌ای X را با استفاده از

$$\hat{P}(X=x)=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}P(X=x\mid Y_i=y_i) \quad (۱۱)$$

برآورد کرد. این روش را برای برآورد چگالی $f(x)$ در حالت سه متغیره در مثال ۳ به کار می‌بریم.

۲-۳ حالت سه متغیره

واقعیتی که نمونه‌گیری گیبس از آن استفاده می‌کند این است که اطلاعات نهفته در توزیعهای شرطی، برای تعیین توزیع توأم (در صورت

[۹] Carlin & Schervish

وجود) کافی است. در حالت دو متغیره نمونه‌گیری گیبس برای به دست آوردن چگالیهای حاشیه‌ای از چگالیهای شرطی به سرعت پیش می‌رود. اما در حالت چند متغیره، روابط میان چگالیهای شرطی، حاشیه‌ای و توأم بسیار پیچیده می‌شوند. به عنوان مثال رابطهٔ

حاشیه‌ای × شرطی = توأم

برای تمام چگالیهای شرطی و چگالیهای حاشیه‌ای به دست نمی‌آید. بدین معنی که ممکن است راههای متعددی برای ایجاد یک چگالی حاشیه‌ای از چگالیهای شرطی وجود داشته باشد و بتوان مجموعه‌های مختلفی از توزیعهای شرطی را برای محاسبهٔ توزیع حاشیه‌ای مورد نظر به کار برد.

تعریف ـ فرض کنید $U_1,\ldots,U_k$ ، k متغیر تصادفی باشند. چگالیهای شرطی هر متغیر به شرط $(k-1)$ متغیر دیگر را یک چگالی شرطی کامل[10] یا شرطی یک متغیره می‌نامیم. بنابراین برای این k متغیر، k چگالی شرطی کامل

$$f_{U_i|U_{i1},\ldots,U_{ik-1}}(u \mid u_1,\ldots,u_{k-1});i=1,2,\ldots,k$$

$$i \neq j_t, t \in \{1,\ldots,k-1\}$$

وجود دارند.

در نمونه‌گیری گیبس همیشه مجموعهٔ تمام چگالیهای شرطی کامل برای تعریف تکرارها به کار برده می‌شوند. بساگ[11] در سال ۱۹۷٤ نشان داد که این مجموعه از چگالیهای شرطی برای تعیین توزیع توأم (و در نتیجه برای تعیین هر توزیع حاشیه‌ای) به طور یکتا کافی است و این کوچکترین مجموعهٔ لازم از چگالیهای شرطی برای تعریف تکرارهاست [۲].

فرض کنید برای سه متغیر تصادفی X ، Y و Z چگالیهای شرطی کامل یعنی $f_{X|YZ}$ ، $f_{Y|XZ}$ و $f_{Z|XY}$ وجود داشته باشند. نمونه‌گیری گیبس در هر تکرار از این چگالیهای شرطی نمونه‌گیری می‌کند، یعنی i ـ امین تکرار در نمونه‌گیری گیبس به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} X'_j &\sim f(x \mid Y'_j = y'_j, Z'_j = z'_j) \\ Y'_{j+1} &\sim f(y \mid X'_j = x'_j, Z'_j = z'_j) \qquad (۱۲) \\ Z'_{j+1} &\sim f(z \mid X'_j = x'_j, Y'_{j+1} = y'_{j+1}) \end{aligned}$$

روش مکرر (۱۲) یک نمونهٔ

$$Y'_0, Z'_0, X'_0, Y'_1, Z'_1, X'_1, Y'_2, Z'_2 \qquad (۱۳)$$

را با این خاصیت که برای مقادیر بزرگ k ، $X'_k = x'_k$ یک نمونهٔ مؤثر از $f(x)$ است، تولید می‌کند.

مثال ۳ـ در توزیع مثال (۱)، N را یک متغیر تصادفی پواسون با پارامتر λ در نظر می‌گیریم و لذا توزیع توأم به صورت

$$f(x,y,n) \propto \binom{n}{x} y^{x+\alpha-1}(1-y)^{n-x+\beta-1} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} \qquad (۱٤)$$

نوشته می‌شود. فرض کنید علاقه‌مند به توزیع حاشیه‌ای X باشیم. برخلاف مثال (۱)، در این جا نمی‌توان توزیع حاشیه‌ای X را به سرعت محاسبه کرد. با توجه به (۱۲) سه چگالی شرطی کامل را نیاز داریم. این چگالیها به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} & f(x \mid y,n) \sim Binomial(n,y) \\ & f(y \mid x,n) \sim beta(x+\alpha, n-x+\beta) \qquad (۱۵) \\ & f(n \mid x,y) \sim e^{-(1-y)}\frac{[(1-y)\lambda]^{n-x}}{(n-x)!}\lambda \\ & \quad ;\ n = x, x+1,\ldots \end{aligned}$$

اگر m نمونهٔ گیبس (۱۳) را تولید کنیم، می‌توانیم با استفاده از رابطه‌ای شبیه به رابطهٔ (۱۱) چگالی X را به صورت زیر برآورد کنیم:

$$\hat{P}(X=x) = \frac{1}{m^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} P(X=x \mid Y_i = y_i, N = n_j) \qquad (۱٦)$$

در رابطهٔ (۱٦) $x_1,\ldots,x_m$ و $y_1,\ldots,y_m$ مقادیر به دست آمده از m نمونهٔ گیبس اند. شکل (۳) برآورد احتمالهای توزیع حاشیه‌ای X را که با استفاده از (۱٦) بر اساس یک نمونهٔ $m = ۵۰۰$ تایی با دنباله‌هایی به طول $k = ۱۰$ برای سه چگالی (۱۵) با $n = ۱۶$ ، $\alpha = ۲$ و $\beta = ۴$ به دست آمده است، نشان می‌دهد.

٤-۲ حالت چند متغیره

برای سادگی کار، توزیعها را به طور کلی با براکت ([]) نشان می‌دهیم. مثلا توزیعهای توأم، شرطی و حاشیه‌ای را به صورت [X,Y] ، [X|Y] و [X] نشان می‌دهیم. همچنین علامت * را برای حاصلضرب

---

[10] Full Conditional

[11] Besag

چگالیها بـه کـار می‌بریـم. حـال بـا اسـتفاده از ایـن نمـادگـذاری، رونـد نمونه‌گیری گیبس را می‌توان برای k متغیر به صورت زیر بیان کرد.

فرض کنید $U_1, U_2, ..., U_k$ ، k متغیر تصادفی باشند که چگالیهای شـرطی کـامل آنها وجود دارند.همچنین فـرض کنید $U_1^{(0)}, ..., U_k^{(0)}$ یک مجمـوعهٔ آغـــازی دلخواه باشد. در این صورت $U_1^{(1)}, ..., U_k^{(1)}$ را به ترتیب از

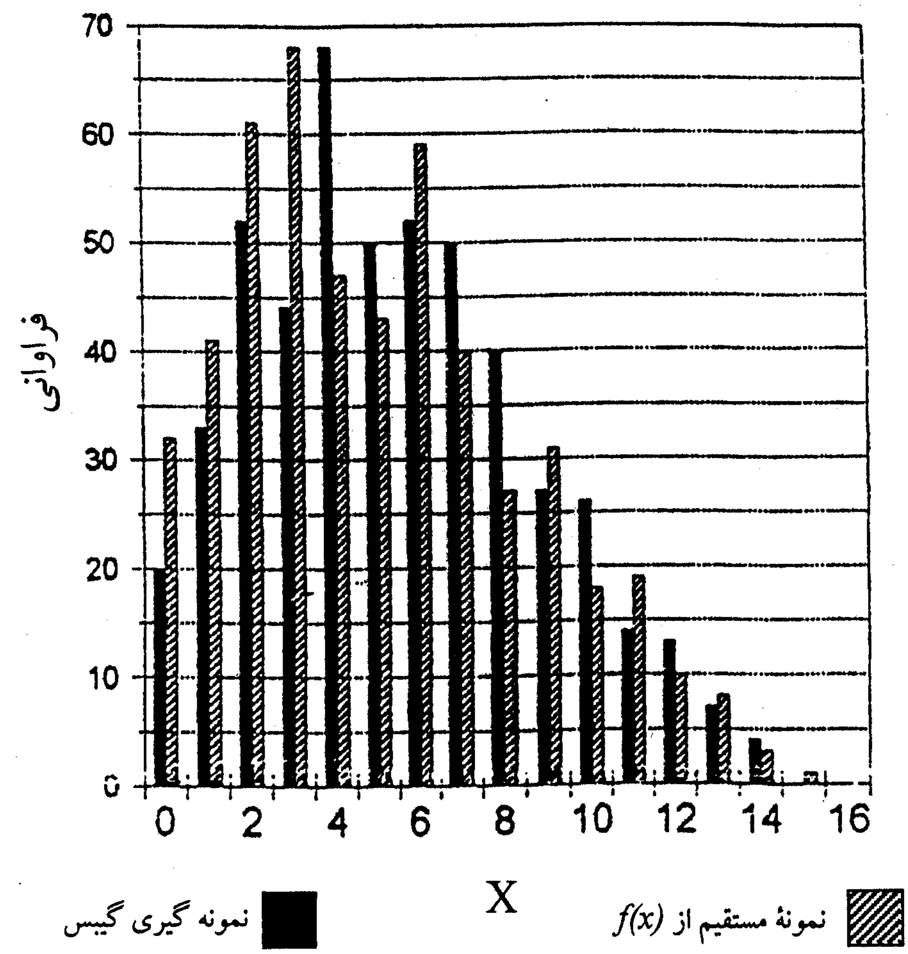
$$U_1^{(1)} \sim [U_1 \,|\, U_2^{(0)}, U_3^{(0)}, ..., U_k^{(0)}]$$
$$U_2^{(1)} \sim [U_2 \,|\, U_1^{(1)}, U_3^{(0)}, ..., U_k^{(0)}]$$
$$U_3^{(1)} \sim [U_3 \,|\, U_1^{(1)}, U_2^{(1)}, U_4^{(0)} ..., U_k^{(0)}]$$
$$\vdots$$
$$U_k^{(1)} \sim [U_k \,|\, U_1^{(1)}, ..., U_{k-1}^{(1)}]$$

تولید می‌کنیم. با این روند هر یک از متغیرها بـه نوبـت در یـک چرخـه ظاهر شده و هر چرخه شامل k متغیر تصادفی تولید شده است. پس از i تکرار از این چرخـــه‌ها، $(U_1^{(i)}, ..., U_k^{(i)})$ تولید می‌شود. گیمـــان و گیمان در سال ۱۹۸٤ ثابت کردند که وقتی $i \to \infty$ داریم: [٤]

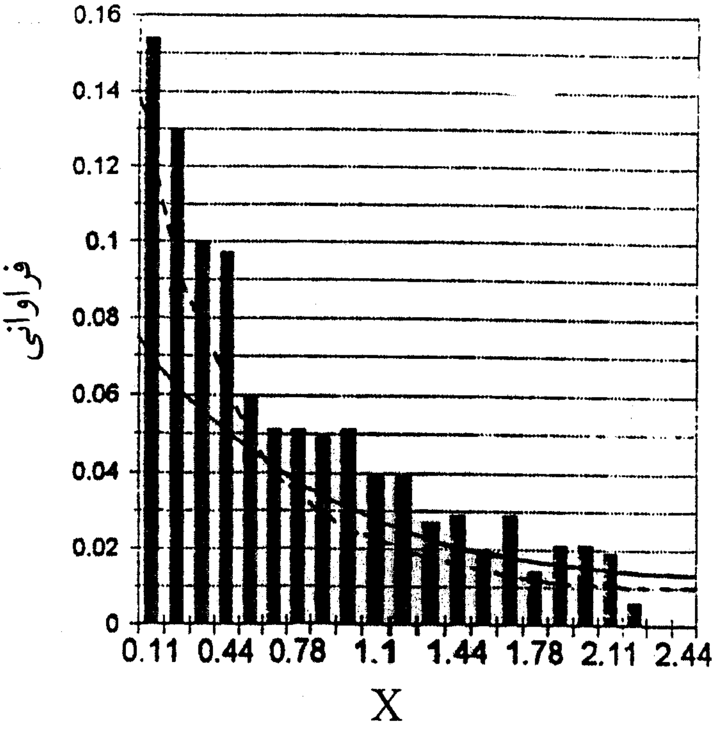
$$(U_1^{(i)}, ..., U_k^{(i)}) \xrightarrow{d} [U_1, ..., U_k]$$

و همچنین

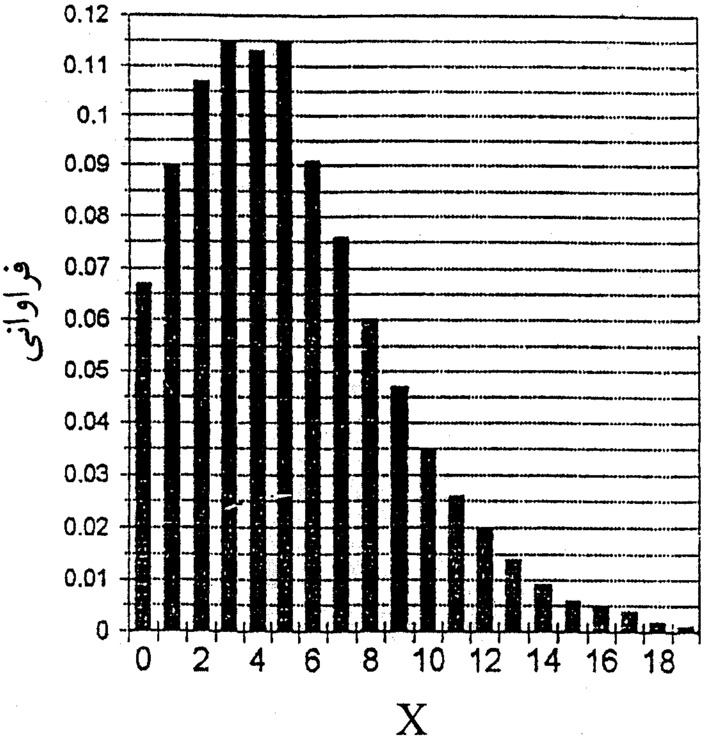
$$.\, U_s^{(i)} \xrightarrow{d} U_s \sim [U_s]$$



شکل ۱


0.16
0.14
0.12
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
0
فراوانی
0.11
0.44
0.78
1.1
1.44
1.78
2.11
2.44
X

شکل ۲


0.12
0.11
0.1
0.09
0.08
0.07
0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0
فراوانی
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
X

شکل ۳

مراجع

[1] Casella, G. and George, E., 1992, *Explaining the Gibbs Sampler,* American Statistical Association, 46, 167-174.

[2] Gelfand, A. E. and Smith, A. F. M., 1990, *Sampling-Based Approaches to Calculating Marginal Densities,* Journal of Statistical Association, 85, 398-409.

[3] Gelfand, A. E., 2000, *Gibbs Sampling,* American Statistical Association, 95, 1300-1304.

[4] Geman, S. and Geman,D., 1984, *Stochastic Relaxation, Gibbs Distribution and the Bayesian Restoration of Images,* IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell., 6, 721-741.

طرح یک مسئلهٔ احتمال

در هر کاری هر چقدر هم که احتمال موفقیت ناچیز باشد، با تلاشهای مکرر می توان احتمال موفقیت را تا حدی بسیار زیاد بالا برد. به عنوان مثال اگر احتمال موفقیت در کاری یک ششم باشد، با شش بار تلاش، احتمال حداقل یک بار موفقیت، بیشتر از ۶۳ درصد است. همچنین اگر احتمال موفقیت یک دهم باشد، با ده بار تلاش، احتمال حداقل یک بار موفق شدن نیز بیشتر از ۶۳ درصد است. حال اگر احتمال موفقیت در کاری بسیار کم مثلا معادل یک درصد باشد، آیا باید از تلاش نمودن ناامید شویم؟ هرگز؛ چون این بار نیز با ۱۰۰ بار تلاش، احتمال حداقل یک بار موفقیت ما به میزان بیشتر از ۶۳ درصد است و این شیوه برای کلیهٔ احتمالهای بسیار ناچیز، صادق است. به عنوان مثال به راحتی ثابت می شود که احتمال آنکه یک سکه را یک میلیون بار پرتاب کنیم و در تمامی پرتابها شیر بیاید، معادل مقدار $۱/۲^{۱۰۰۰۰۰۰}$ است. حال اگر فرصت داشته باشیم و به تعداد $۲^{۱۰۰۰۰۰۰}$ بار تلاش کنیم، احتمال اینکه حداقل یک بار موفق شویم که یک میلیون بار پشت سر هم شیر بیاوریم، بیشتر از ۶۳ درصد است.

در خصوص کارهای غیر قانونی نیز این مسأله باعث می شود که در نهایت در اثر تکرار جرم، احتمال دستگیری مجرمان بسیار زیاد باشد. به عنوان مثال، اگر احتمال دستگیری در یک سرقت، معادل ۱/۲۰ باشد و این عمل مستقلا ۲۰ بار تکرار شود، احتمال حداقل یک دستگیری بیشتر از ۶۳ درصد است.

می توان نشان داد که اگر احتمال موفقیت در کاری مستقل و معادل $۱/N$ باشد و N بار تلاش کنیم، احتمال حداقل یک بار موفق شدن بیشتر از ۶۳ درصد است. N عدد طبیعی بزرگتر از یک است. (این عدد در واقع معادل ۰/۶۳۲۱۰۰۰ است که تعداد ارقام بعد از ممیز آن نامحدود است.)