

بررسی تقریب توزیع احتمال حداکثر یک میدان تصادفی با میانگین مشخصه اویلر

خلیل شفیعی^۱ سمانه قادری^۲

چکیده

در این مقاله ضمن معرفی میدانهای تصادفی، مجموعه برون گشت و مشخصه اویلر، با استفاده از شبیه سازی میدانهای تصادفی گاوسی t ، F و χ^2 به بررسی توزیع احتمال حداکثر این میدانهای تصادفی با میانگین مشخصه اویلر می پردازیم.

۱-۱ تعاریف

در این بخش تعاریف و مفاهیم مورد نیاز ارائه می شوند. در ابتدا لازم است که به تعریف میدان تصادفی پردازیم. فضای احتمال (Ω, \mathcal{F}, P) و مجموعه $C \subset \mathbb{R}^N$ را در نظر بگیرید. میدان تصادفی N بعدی روی مجموعه C ، تابعی است نظری $X(t, w)$ که روی $(C \times \Omega)$ تعریف شده و برای هر t ثابت در مجموعه C ، $X(t, w)$ یک متغیر تصادفی روی (Ω, \mathcal{F}, P) است. لذا از نقطه نظر ریاضی، میدان تصادفی روی C به صورت تابع دو متغیره $X(t, w)$ تعریف می شود که دامنه تعریف هر کدام از متغیرهای t و w به ترتیب C و Ω است. بنابراین در حالت $1 = N$ ، میدان تصادفی ذخیره شده در پشت یک سد مشخص ($= 1 = N$)، به شدت زمین لرزه در تمام نقاط جغرافیایی زلزله خیز در زمانی مشخص (که اگر هر نقطه جغرافیایی را با مختصات دو بعدی طول و عرض جغرافیایی نشان دهیم، $2 = N$ است)، به میزان بارندگی در نقاط مختلف $3 = N$ ، دو بعد برای طول و عرض جغرافیایی و یک بعد برای ارتفاع)، اشاره کرد.

۱. مقدمه
مطالعه میدانهای تصادفی، در سالهای اخیر بیش از پیش جنبه کاربردی پیدا کرده است. از جمله کاربردهای آن می توان به مطالعات انجام شده در زمینه های فیزیک، زمین شناسی، زلزله شناسی، پژوهشکی، مدل بندی سطح آب اقیانوسها و مدل بندی کوهکشان اشاره کرد. بیشتر این مطالعات منجر به بررسی متغیر تصادفی «حداکثر مقدار میدان تصادفی» شده است. اما به دست آوردن توزیع این متغیر تصادفی، بسیار مشکل و می توان گفت که جز در مواردی خاص، ناممکن است. به این علت تقریبها و کرانهای متعددی برای بررسی توزیع این متغیر تصادفی به دست آمده است. یکی از این تقریبها، امید ریاضی مشخصه اویلر (EC) مجموعه های برون گشت یک میدان تصادفی است. هازوفر^[۶] به صورت شهودی نشان داد که این تقریب، برای متغیر تصادفی گاوسی، تقریبی مناسب است. ادلر^[۴] این موضوع را برای میدان تصادفی گاوسی، ثابت کرده است. اما در مورد رفتار این تقریب برای میدانهای تصادفی χ^2 ، t و F بررسیهایی صورت نگرفته است.

در این مقاله با استفاده از شبیه سازی میدانهای تصادفی گاوسی χ^2 ، t ، F تقریب ذکر شده مورد بررسی قرار می گیرد.

^۱ Hasofer

^۱ دانشکده علوم ریاضی، گروه آمار، دانشگاه شهید بهشتی

^۲ Adler

^۲ دانشجوی کارشناسی ارشد آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه شهید

بهشتی تهران

نظیر هر تابع دلخواهی مثل $f(t)$ ، انواع مختلف مشتق پذیری را می‌توان برای یک میدان تصادفی تعریف کرد. معروفترین نوع آنها که در این مقاله نیز به کار برده شده، مشتق پذیری به صورت قریب به یقین است. گوییم که میدان تصادفی X ، در نقطه t^* به صورت قریب به یقین مشتق پذیر است اگر

$$\Pr\{w: X_j(t^*, w) = j \text{ وجود دارد}\} = 1$$

که X نشان دهنده مشتق جزئی مرتبه اول تابع $X(t)$ ، $t \in \mathbb{R}^N$ ، نسبت به مؤلفه j ام، $N = 1, \dots, N$ ، $j = 1, \dots, N$ ، است.

رده سهی از میدانهای تصادفی، رده میدانهای تصادفی گاووسی است. میدان تصادفی گاووسی، میدانی است که توزیعهای متناهی - بعدی آن، همگی توزیعهای گاووسی (نرمال) چند بعدی باشند. اگررا ثابت در نظر بگیریم، به راحتی می‌توان همانند نظریه توزیع متغیرهای تصادفی، میدانهای تصادفی χ^2 ، t و F را به همان صورت تعریف کرد.

در اغلب کاربردها، تحقق مشاهده شده از میدان تصادفی، هموار می‌شود تا تأثیر اغتشاش کاهش یابد. میدان هموار شده، از پیچش میدان با یک هسته به دست می‌آید. اما میزان همواری مقداری اختیاری است. توضیحات بیشتر در این زمینه را می‌توان در مقاله سیگموند و ورسلی^۷ یافت.

فرض کنید K یک هسته N بعدی باشد (هسته N بعدی هسته‌ای است که روی فضای \mathbb{R}^N تعریف می‌شود). میدان تصادفی هموار شده گاووسی، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$X(t) = \int K(h-t) dZ(h)$$

که $Z(h)$ میدان تصادفی گاووسی است که روی زیر مجموعه‌ای از \mathbb{R}^N تعریف شده است. انتگرالی که در عبارت بالا آمده است، از نوع انتگرال تصادفی است (برای آشنایی بیشتر می‌توانید به [۱] مراجعه کنید).

۲. مجموعه‌های برون گشت، مشخصه‌های EC و DT

مطالعه میدانهای تصادفی، غالباً به مطالعه و بررسی مسائل هندسی خاصی می‌انجامد که در بررسی و تحلیل میدانهای تصادفی به کار می‌روند. یکی از آنها مفهوم مجموعه‌های برون گشت (تصادفی) میدان تصادفی حقیقی مقدار $(X(t), t \in \mathbb{R}^N)$ است.

میدانهای تصادفی را می‌توان از \mathbb{R}^N به \mathbb{R}^m تعریف کرد. برای مثال، اگر تعداد تصادفات و تعداد آسیب دیدگان ناشی از آنها را در نظر بگیریم که در سر چهار راههای یک شهر اتفاق می‌افتد، با میدان تصادفی سه بعدی مواجه هستیم (دو بعد برای مشخص کردن مختصات یک چهار راه و یک بعد برای زمان) که روی \mathbb{R}^3 تعریف شده اما (اما) مقادیرش را در \mathbb{R}^4 اختیار می‌کند (یک بعد برای تعداد تصادفات و یک بعد برای تعداد آسیب دیدگان ناشی از آنها). خانواده توزیعهای متناهی - بعدی یک میدان تصادفی به صورت زیر تعریف می‌شود.

برای یک مجموعه متناهی و دلخواه از مقادیر t نظیر t_1, t_2, \dots, t_n ، متغیرهای تصادفی متضاظر آنها یعنی $(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n))$ دارای توزیع توأم n بعدی خواهد بود که تابع توزیع توأم آنها به صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$(1) \quad F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = \Pr(X(t_1) \leq x_1, \dots, X(t_n) \leq x_n)$$

خانواده همه این توزیعهای توأم را که به ازای مقادیر مختلف $n = 1, 2, \dots$ ، و همه مقادیر ممکن t به دست می‌آید، خانواده توزیعهای متناهی - بعدی $(f_t - di)$ میدان X می‌گویند. نظری نظریه فرایندهای تصادفی، مفهوم همگنی، مفهومی اساسی در مطالعه میدانهای تصادفی است.

میدان تصادفی $(X(t), t \in \mathbb{R}^N)$ تعریف شده روی \mathbb{R}^N را اکیدا همگن (یا اکیدا مانا) گوییم، اگر توزیعهای متناهی - بعدی آن تحت انتقالهای پارامتر t ، ناورد باشند.

غالباً زمانی که میدانهای تصادفی را بررسی می‌کنیم، لازم نیست که خود را به شرط همگنی اکید محدود کنیم و کافیست که تنها به دو نتیجه حاصل از همگنی اکید اکتفا کنیم. از این رو ردهای از میدانها را معرفی می‌کنیم که آنها را همگن یا مانا می‌نامیم.

فرض کنید که $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}^N}$ به ازای همه مقادیر t متناهی باشد. در این صورت گوییم میدان تصادفی $(X(t), t \in \mathbb{R}^N)$ همگن است اگر در دو شرط زیر صدق کند:

$$(1) \quad \text{ ثابت } E\{X(t)\} = m$$

$$(2) \quad E\{[X(s) - m][X(t) - m]\}$$

این میدانها را میدانهای همگن ضعیف، یا میدانهای همگن از مرتبه دوم نیز می‌نامند. در این صورت تابع کواریانس، تابعی تنها بر اساس N متغیر (به جای $2N$ متغیر) است. زیرا $C(s, t) = C(s - t)$.

که $B_i \cup B_m = B$ ها، همگی پایه هستند، و برای هر ترکیبی از v_1, \dots, v_k ها، $B_{v_1} \cap \dots \cap B_{v_k}$ برای هر مجموعه $\phi(B)$ است. یک پایه باشد، در این صورت A مختلط پایه ای است. هدف، تعریف تابعکی صحیح مقدار، نظری $\phi(B)$ است که تعداد مؤلفه های همبند B را شمارش می کند. لذا حداقل خصوصیاتی که باید داشته باشد، این است که برای هر پایه B :

$$\phi(B) = \begin{cases} 0 & ; B = \emptyset \\ 1 & ; \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (2)$$

و خاصیت دیگر این که اگر A, B ، $A \cap B$ و $A \cup B$ مختلطهای پایه ای باشند، در این صورت:

$$\phi(A \cup B) = \phi(A) + \phi(B) - \phi(A \cap B) \quad (3)$$

با استفاده از مفاهیم مختلف ریاضی، مشخصه های متعددی تعریف شده اند. یکی از این مشخصه ها، مشخصه اویلر است. تعریف این مشخصه از دیدگاه توبولوژی توسط ادلر [۱] توضیح داده شده است. در اینجا تنها این مشخصه را به زبانی ساده توصیف می کنیم.

معرفی مشخصه اویلر (EC) به مطالعات اویلر (1783-1707) باز می گردد. وی یکی از ریاضیدانان قرن هیجدهم بود که در زمینه چند و چهیها مطالعاتی را انجام داد. او به این نتیجه رسید که اگر تعداد وجوده (F)، تعداد بالها (E) و تعداد رأسهای (V) یک چند و چهی را بشماریم، همواره رابطه $V - E + F = 2$ برقرار است. برای مثال در یک مکعب $V = 8, E = 12, F = 6$ و $V - E + F = 2$ ، بنابراین (شکل ۲ الف). برای جسم توپری که شامل P چند و چهی است که حداقل در یک وجه به هم چسبیده اند، رابطه $V - E + F - P = 1$ همواره برقرار است. برای مثال در شکل ۲ (ب) تعداد وجهها ۱۶، تعداد بالها ۲۸، تعداد رأسهای ۱۶ و کل شکل از $P = 3$ چند و چهی تشکیل شده است و دیده می شود که $V - E + F - P = 1$ است.

اگر در جسم توپری یک حفره کامل وجود داشته باشد، رابطه بالا دیگر برقرار نیست. در واقع نتیجه به صورت $V - E + F - P = 0$ خواهد بود (شکل ۲ (ج)). اگر دو حفره با سه حفره در داخل جسم توپر وجود داشته باشد، در این صورت $V - E + F - P$ به ترتیب برابر -۱ و -۲ خواهد بود (شکل ۲ د، ه). به همین نحو با اضافه شدن هر حفره، مقدار $V - E + F - P$ به این پایه ها، خود پایه می یابد. یک واحد کاهش می یابد.

فرض کنید $X: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ میدانی تصادفی باشد. در این صورت برای هر عدد حقیقی ثابت u و هر زیر مجموعه نظیر S از \mathbb{R}^N ، مجموعه بروون گشت بالاتر از سطح u برای میدان تصادفی X در S ، به صورت زیر تعریف می شود:

$$A_u(X, S) = \{t \in S : X(t) \geq u\}$$

برای سادگی کار، اگر اشتباهی پیش نیاید، مجموعه بروون گشت را به طور اختصار با A_u نشان می دهیم.

هنده مجموعه های بروون گشت در میدانهای تصادفی یک بعدی یا فرایند های تصادفی، شکل بسیار ساده ای دارد. چرا که تنها شامل نقاط یا بازه هاست. شکل (۱) تحقیقی از یک فرایند تصادفی را نشان می دهد.

مجموعه بروون گشت به صورت زیر است:

$$A_u(X, S) = [t_1, t_2] \cup [t_3, t_4]$$

تعداد مؤلفه های همبند یک مجموعه بروون گشت، موضوع دیگری است که در مطالعه میدانهای تصادفی با آن روبرو می شویم. از آنجا که مطالب مورد بحث و مطالعه ما به میدانهای تصادفی مربوط می شوند، لذا برای تعریف تابع مورد نظر، توجه خود را به ردیه ای از اشیاء هندسی که مختلطهای پایه ای نامیده می شوند، معطوف می کنیم. ادلر [۱] نشان داده که مجموعه های بروون گشت بسیاری از میدانهای تصادفی به این رده تعلق دارند.

\mathbb{R}^N را با مختصاتی دکارتی در نظر می گیریم و بردارهای N بعدی $j = 1, \dots, N$ ، (که j این مؤلفه آن ۱ و بقیه مؤلفه هایش صفر هستند)، یک پایه متعامد یکه برای \mathbb{R}^N است. مجموعه

$$\zeta = \{t \in \mathbb{R}^N : t_j = a_j, j \in J, -\infty < t_j < \infty, j \notin J\}$$

یک k -صفحه از \mathbb{R}^N نامیده می شود، اگر J زیر مجموعه $N-k$ عضوی از اعداد صحیح $\{N, \dots, 1\}$ بوده و a_{N-k}, \dots, a_1 اعداد ثابتی باشند. یعنی یک k -صفحه، زیر فضای k بعدی از \mathbb{R}^N است که توسط k بردار، متوازی با k تا از $\delta_1, \dots, \delta_N$ ها تولید شده است.

مجموعه فشرده B در \mathbb{R}^N را پایه می نامیم اگر $B = \bigcap_{j=1}^k B_j$ برای هر k -صفحه ζ از \mathbb{R}^N همبند باشد که شامل $\mathbb{R}^N = \zeta$ نیز هست.

واضح است که مجموعه تهی و هر مجموعه محدبی، یک پایه است. مجموعه $A \subset \mathbb{R}^N$ را مختلط پایه ای گوییم اگر بتوان آن را به صورت اجتماع تعداد متناهی از پایه ها نمایش داد به طوری که اشتراک هر تعداد دلخواهی از این پایه ها، خود پایه باشد. بنابراین اگر

$$F(t) = u \quad (5)$$

$$F_j(t) = 0; j = 1, \dots, N-1 \quad (6)$$

$$F_N(t) > 0 \quad (7)$$

(۸) تعداد مقادیر ویژه منفی ماتریس $D_{N-1}(t)$ ، دقیقاً k باشد.

که $D_{N-1}(t)$ ماتریس $(N-1) \times (N-1)$ بعدی است که مؤلفهای مشتقات جزئی مرتبه دوم $F(t)$ هستند، یعنی:

$$D_{N-1} = (F^{(kl)}) ; k, l = 1, \dots, N-1$$

در این اگر مجموعه بروون گشت، اشتراکی با مرز ناحیه T نداشته باشد، $A \cap \partial T = \emptyset$ ، در این صورت مشخصه‌های DT و اویلر یکی هستند. به عبارت ساده‌تر می‌توان گفت که مقدار این مشخصه در حالت دو بعدی برابر تعداد مؤلفه‌های همبند مجموعه بروون گشت، منهاج تعداد حفره‌ها، و در حالت سه بعدی برابر تعداد مؤلفه‌های همبند، منهاج تعداد دسته‌ها، بعلاوه تعداد حفره‌هast. لذا به عنوان مثال، مشخصه اویلر یک کره پر، یک کره خالی و یک فنجان به ترتیب برابر یک، دو و صفر است.

۳. امید ریاضی مشخصه DT

همان گونه که در ابتدای این مقاله ذکر شد، از امید ریاضی مشخصه EC به عنوان تقریبی برای توزیع احتمال حداقل یک میدان تصادفی استفاده می‌شود. اما از آنجا که نوشتمن عبارتی صریح برای این مشخصه در حالاتی ییش از سه بعد بسیار پیچیده بوده و از طرفی در اغلب کاربردها مشخصه‌های EC و DT یکی هستند، لذا از میانگین مشخصه DT استفاده می‌شود. ادلر میانگین این مشخصه را تحت شرایطی خاص به دست آورد. با استفاده از این موضوع، حاصل این عبارت برای میدان تصادفی گاوی تحت شرایطی خاص توسط ادلر و برای میدانهای χ ، F و t توسط ورسلی به دست آمد است.

فرضیات و علائم مورد نیاز برای بیان قضیه اصلی بدین صورت است.

فرض کنید $Z = Z(t) \in \mathbb{R}^N$ ، $t = (t_1, \dots, t_N) \in \mathbb{R}^N$ ، میدان تصادفی حقیقی مقدار همگنی بوده و C زیر مجموعه فشرده و محدودی در \mathbb{R}^N باشد. $D_{N-1}(t) = D_{N-1}$ نیز نشان دهنده ماتریس $(N-1) \times (N-1)$ بعدی بوده که عناصر مشتقات جزئی مرتبه دوم $Z(t)$ هستند. (C) نیز نشان دهنده اندازه لبگ مجموعه C است. مدول پیوستگی $Z^{(k)}$ و $Z^{(kl)}$ را درون C به صورت زیر

محاسبه $V - E + F - P$ گامی برای تعریف مشخصه اویلر یک جسم توپر است. مشخصه اویلر یک جسم توپر که مشتمل از چندین چندوجهی است، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$EC = V - E + F - P$$

بنابراین مقدار EC برای شکل نظیر شکل ۲ (ه) برابر ۲ است (+۱) برای کل شکل و (-۳) به دلیل وجود سه حفره که جمعاً برابر ۲ می‌شود).

اگر جسم توخالی باشد، نظیر توپ تیس، در این صورت مقدار EC برابر ۲ است. در مورد تیوب دوچرخه مقدار EC برابر صفر است و اگر سوراخ و یا پنجه شده باشد، برابر ۱ است.

اینک فرض کنید که مجموعه‌ای از اجسام توپر ناهمبند وجود دارد. در این حالت، می‌توان آنها را به چندوجهیها شکست و فرمول را برای هر چندوجهی به کار برد و سپس مقادیر به دست آمده را با هم جمع کرد. بنابراین اگر مجموعه، شامل چندین مؤلفه همبند و بدون حفره باشد، در این صورت مقدار EC، برابر تعداد این مؤلفه‌هاست.

اگر با مجموعه‌ای سه بعدی رو به رو باشیم که دارای مرزی هموار باشد، در این صورت برای پیدا کردن مقدار EC، می‌توان مجموعه را به شبکه مکعبی پوشاند. اگر شبکه به اندازه کافی خوب و مناسب و مرز مجموعه هموار باشد، در این صورت مقدار مشخصه اویلر شبکه داخل مجموعه، برابر مقدار مشخصه اویلر مجموعه است [۱۲].

با توجه به آنچه گفته شد، دیده می‌شود که به دست آوردن مقدار مشخصه اویلر مجموعه بروون گشت، کار چندان ساده‌ای نیست. از این رو ادلر [۱] بر اساس توپولوژی دیفرانسیل، مشخصه DT (توپولوژی دیفرانسیل) را برای هر مجموعه بروون گشت تعریف کرد. وی همچنین نشان داد که اگر مجموعه بروون گشت با مرز زیر مجموعه T ، اشتراک نداشته باشد، در این صورت هر دو مشخصه یکی هستند.

تعریف مشخصه DT. فرض کنید $C: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ از رده C^α روی یک زیر مجموعه فشرده‌ای نظیر $T \subset \mathbb{R}^N$ باشد. در این صورت اگر χ_k های تعریف شده در زیر، همگی متاهی باشند، آنگاه مشخصه DT ای مجموعه بروون گشت (F, T) ، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\chi(A) = (-1)^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k \chi_k \quad (4)$$

که χ_k تعداد نقاطی نظیر t در T است که در شرایط زیر صدق کنند:

در این صورت میانگین مقدار مشخصه DT ای مجموعه بروون

گشت $A = A_x(X, T)$ برابر است با:

$$E\{\chi(A)\} = |T| \rho_N(x) \quad (4)$$

$$\rho_N(x) = \dots \quad (10)$$

$$\frac{\exp(-x^2/(2\sigma^2))(\det(\Lambda))^{1/2}}{(2\pi)^{(N+1)/2}\sigma^N} H_{N-1}(x/\sigma)$$

$$H_n(x) = n! \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j x^{n-j}}{j!(n-2j)!} \quad (11)$$

که H_n ، چندجمله‌ای ارمیت مرتبه n ، Λ و $\sigma^2 = E\{X_i^2(t)\}$ ، ماتریس کوواریانس X است.

قضیه ۳. در حالت $N \geq 2$ ، اگر شرایط نظم مورد نیاز قضیه ۱ برای هر یک از مؤلفه‌های میدانهای گاوسی $X_i(t)$ برقرار باشد، در این صورت امید ریاضی مشخصه DT ای مجموعه بروون گشت میدانهای تصادفی χ ، $\chi = \sum_{i=1}^n X_i^2(t)$ ، به صورت زیر خواهد بود:

$$E(\chi(A_u(U, C))) =$$

$$\frac{\lambda(C) \det(\Lambda)^{1/2} u^{1/(n-N)} e^{-1/u}}{(2\pi)^{n/2} \Gamma(n/2)} P_{N,n}(u)$$

که $P_{N,n}$ یک چندجمله‌ای از درجه $(N-1)$ بر حسب u با ضرایب صحیح است و به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$P_{N,n}(u) =$$

$$\sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1-2j} \binom{n-1}{N-1-2j-k} \frac{(-1)^{N-1-j+k} (N-1)!}{2^j j! k!} u^{j+k}$$

لئن ۱- اگر $m+n > N$ و مؤلفه‌های X_1, \dots, X_n و Y_1, \dots, Y_m در شرایط قضیه ۱ صدق کنند، در این صورت میدان تصادفی F ، دارای نظم لازم برای برقراری قضیه ۱ است.

قضیه ۴. در حالت $N \geq 2$ و $m+n > N$ ، اگر شرایط نظم ذکر شده در قضیه ۱ برای هر یک از مؤلفه‌های میدانهای $(X_i(t), Y_j(t))$ و $i = 1, \dots, m$ ، $j = 1, \dots, n$ ، صورت امید ریاضی مشخصه DT ای مجموعه بروون گشت میدان تصادفی F ،

تعريف می‌کنیم:

$$\omega_k(h) = \sup_{\|t-s\| < h} |Z^k(t) - Z^k(s)| ; k = 1, \dots, N$$

$$\omega_{kl}(h) = \sup_{\|t-s\| < h} |Z^{kl}(t) - Z^{kl}(s)| ; k, l = 1, \dots, N$$

که سوبرم روی همه t و s های واقع در مجموعه C گرفته می‌شود.

قضیه ۱. فرض کنید

$$(i) \text{ برای هر } \varepsilon > 0, \text{ وقتی } h \downarrow :$$

$$P(\max\{\omega_k(h), \omega_{kl}(h)\} > \varepsilon) = o(h^N)$$

(ii) مشتقات جزئی مرتبه دوم $\{Z^{(kl)}, 1 \leq k \leq N, 1 \leq l \leq N-1\}$

و $Z^{(N)}$ ، به شرط $Z^{(1)}, \dots, Z^{(N-1)}$ ، دارای واریانس شرطی متناهی باشند. همچنین چگالی $\theta_{N-1}(z, z_1, \dots, z_{N-1})$ که چگالی توأم متغیرهای تصادفی $Z^{(N-1)}, \dots, Z^{(1)}$ است، از بالا کراندار باشد و C زیر مجموعه‌ای محدب از \mathbb{R}^N باشد.

در این صورت امید ریاضی مشخصه DT ای مجموعه بروون گشت $A_z(Z, C)$ برابر است با:

$$E(\chi(A_z(Z, C))) =$$

$$E\{Z^{(N)+} \det(D_{N-1}) | Z = z, Z^{(1)} = 0, \dots, Z^{(N-1)} = 0\}$$

$$\lambda(C)(-1)^{N-1} \times \theta_{N-1}(z, 0, \dots, 0) \quad [11]$$

اهمیت قضیه بالا در این است که می‌توان میانگین مشخصه DT ای مجموعه‌های بروون گشت را با استفاده از توزیع توأم میدان $Z(t)$ و مشتقات جزئی تا مرتبه دوم آن به دست آورد. اینک می‌توان با استفاده از قضیه بالا امید ریاضی مشخصه DT ای میدانهای تصادفی گاوسی χ ، F و t را به دست آورد.

قضیه ۲. فرض کنید $t \in \mathbb{R}^N$ ، $X(t)$ ، میدان تصادفی گاوسی همگن با میانگین صفر روی \mathbb{R}^N بوده و T زیر مجموعه‌ای فشرده و محدب از \mathbb{R}^N باشد به طوری که مرز آن، ∂T ، دارای اندازه لبگ صفر است. فرض کنید که X تقریباً همه جا دارای مشتقات جزئی پیوسته تا مرتبه دوم با واریانسهای متناهی باشد. همچنین توزیع توأم X و این مشتقات جزئی ناتباهیده و مدول پیوستگی X_{ij} ، وقتی که $h \downarrow$ در شرط زیر صدق کند:

$$P(\max\{\omega_k(h), \omega_{kl}(h)\} > \varepsilon) = o(h^N)$$

$$E(\lambda(A_t(T, C))) =$$

$$\frac{\lambda(C) \det(\Lambda)^{\frac{1}{r}}}{(2\pi)^{\frac{N+1}{r}}} \left(1 + \frac{t^r}{m}\right)^{-\frac{m-1}{r}} Q_{N,m}(t)$$

$$F(t) = \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i(t) \right\} \Bigg/ \left\{ \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m Y_i(t) \right\}$$

به صورت زیر خواهد بود:

$$Q_{N,m}(t) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} \frac{(-)^j (N-1)!}{j! (N-1-j)!} \times \frac{\Gamma(\frac{m+1}{2})}{\Gamma(\frac{m+1-N+j}{2}) \left(\frac{m}{2}\right)^{\frac{N-1-j}{2}}} t^{N-1-j}$$

$$E(\chi(A_f(F, C))) = \frac{\lambda(C) \det(\Lambda)^{\frac{1}{r}} \Gamma\left(\frac{m+n-N}{r}\right)}{(r\pi)^{\frac{N}{r}} r^{\frac{1}{r}(N-r)} \Gamma\left(\frac{m}{r}\right) \Gamma\left(\frac{n}{r}\right)} \left(\frac{nf}{m}\right)^{\frac{n-N}{r}}$$

یکی از قدیمیترین و مشکلترین مسائلی که در حین مطالعه میدانهای صادفی با آن مواجه می‌شویم، تعیین احتمال

$$P\{\sup_{t \in T} X(t) \geq x\} \quad (12)$$

ست که X یک میدان تصادفی (حقیقی مقدار) است. در اغلب کاربردها، پس از مدل بنده موضع مورد نظر توسط یک میدان تصادفی، با مسائلی رو به رو می‌شویم که به محاسبه (۱۲) می‌انجامد. مقدار دقیق عبارت (۱۲)، تنها در پنج حالت و برای فرایندهای تصادفی که دارای تابع کوواریانسی به شکل زیرند، محاسبه شده است [۵]:

$$C(t) = e^{-|t|} \quad (\text{ii})$$

$$C(t) = \begin{cases} -|t| & ; |t| \leq 1 \\ 0 & ; |t| \geq 1 \end{cases} \quad (ii)$$

$$C(t) = \gamma / \gamma \exp(-\frac{|t|}{\gamma}) (1 - 1/\gamma \exp(-\frac{|t|}{\gamma})) \quad (\text{iii})$$

$$C(t) = C(-t) = C(t + \tau) \quad (\text{iv})$$

$$C(t) = \begin{cases} 1 - \alpha t & ; 0 \leq t \leq 1 \\ 1 + \alpha(t-1) & ; 1 \leq t \leq 2 \end{cases} \quad \text{اگر } 0 \leq \alpha \leq 2$$

حالت پنجم را کرسی و دیویس^[۵] با تابع کوواریانس:

$$K_{N,m,n}(f) = (-\imath)^{N-1} (N-\imath)! \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{N-1}{\gamma} \rfloor} \frac{\Gamma\left(\frac{m+n-N}{\gamma} + j\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n-N}{\gamma}\right) j!} \\ \times \sum_{k=0}^{N-\imath-\gamma j} \binom{m-\imath}{k} \binom{n-\imath}{N-\imath-\gamma j-k} (-\imath)^{j+k} \left(\frac{nf}{m}\right)^{j+k}$$

که $K_{N,m,n}(f)$ یک چندجمله‌ای از درجه $(N-1)$ برحسب $\left(\frac{nf}{m}\right)$ و با ضرایب صحیح است و به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$K_{N,m,n}(f) =$$

لنم ۲-اگر $m \geq N$ و مؤلفه‌های $X(t)$ و $Y_1(t), \dots, Y_m(t)$ در شرایط قضیه ۱ صدق کنند، در این صورت میدان تصادفی t ، دارای نظم لازم برقراری قضیه ۱ است.

قضیه ۵. برای $2 \leq N \leq m$ ، اگر هر یک از مؤلفه های میدان های گاوسی $(X(t)$ و $Y_i(t) = 1, \dots, m$ ، در شرایط ذکر شده در قضیه ۱، صدق کنند، در این صورت امید ریاضی مشخصه DT_i

$$T(t) = X(t) / \left\{ \sum_i^m Y^i(t) / m \right\}^{1/m}$$

یه صورت زیر خواهد بود:

حاصل از حداکثر مقدار میدان تصادفی قرار گرفته‌اند. چون تابع تقریب، به ازای همه مقادیر به دست آمده، تابع احتمال نیست، لذا تنها مقادیری از مکسیمم‌های یادداشت شده را در رسم نمودار در نظر گرفتیم که به ازای آن مقادیر، تابع تقریب کوچکتر و یا برابر با یک باشد. در نمودارهای ۱-۴ شکل، نتایج حاصله، گواهی در تأیید نتایج حاصله را برای میدانهای گاووسی و t ، با درجات همواری (S) متفاوت، نشان می‌دهد. بدین معنی که برای مقادیر بزرگ، تقریب مورد نظر در مورد میدان تصادفی گاووسی به خوبی عمل می‌کند. این بررسیها حاکمی از آن بود که با هموارتر شدن میدان، تقریب مورد نظر بهتر است. در مورد میدان تصادفی t ، همان‌گونه که نمودارهای ۳ و ۴ نشان می‌دهند، تقریب مورد نظر چندان مناسب نیست، اما با افزایش درجه آزادی و میزان همواری میدان، تقریب مناسبتر می‌شود. خلاصه نتایج حاصل از تمامی نمودارها (در اینجا تنها ۴ مورد آن نمایش داده شده است) در جداول ۱-۳ آورده شده‌اند. با کمک این جداول دیده می‌شود که برای میدانهای تصادفی χ^2 و F ، با افزایش درجه آزادی و نیز میزان همواری میدان، تقریب مورد نظر بهتر است.

از آنجایی که کاربرد این تقریبها، به عنوان P -مقدار در کارهای آماری است، لذا در جداول زیرنقطی که مقدار تابع تقریب در آن نقاط برابر 0.005 ، 0.01 و 0.05 هستند، نمایش داده شده‌اند. همچنین تفاصل بین نقاط نشان داده شده است. این مقادیر، تحلیلگر را در بیان مناسب بودن یا نبودن تقریب و یک منهای مقدار تابع توزیع تجمعی نیز در این نقاط نشان داده شده است. این مقادیر، تحلیلگر را در بیان مناسب بودن

با نبودن تقریب مورد نظر یاری می‌کنند.

در شکل ۳ [۹] (الف) تصویری ساختگی در حالت دو بعدی (ماکسیمم کل با G و ماکسیمم موضعی با T) نشان داده شده است. قسمت (ب) مجموعه بروون گشت (نواحی تیره) بالاتر از آستانه $t = 2/3$ ، را نشان می‌دهد. چون مجموعه فرامرزی، اشتراکی با کران ندارد، لذا مشخصه اولیر تعداد نواحی مجزا منهای تعداد حفره‌ها را به دست می‌دهد و بنابراین $= 4/\varphi_1$. در قسمت (ج) همین که آستانه افزایش یابد، $= 4/22$ ، حفره‌ها ظاهر نشده و مشخصه اولیر برابر تعداد ماکسیمم‌های موضعی است ولذا $= 4/\varphi_1$. در قسمت (د) در سطوح بالاتر، $= 5/6$ ، مشخصه اولیر مقدار یک را می‌گیرد اگر ماکسیمم کل از t تجاوز کند، و در غیر این صورت مقدار صفر را خواهد داشت و بنابراین $= \varphi_1$.

$$C(t) = \begin{cases} 1 - |t|/(1-\beta) & ; |t| \leq 1 \\ -\beta(1-\beta) & ; 1 \leq |t| < (1-\beta) \end{cases} \quad (v)$$

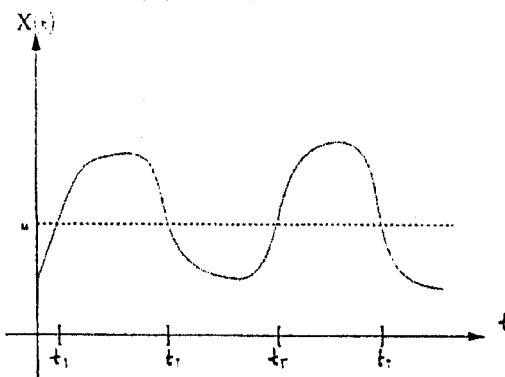
وقتی $\beta/2 \leq t < 0$ به دست آورده‌اند.

در سایر موارد اغلب از تقریبها و کرانهایی برای بررسی رابطه (۱۲) استفاده می‌شود. یکی از این تقریبها، امید ریاضی مشخصه اولیر است. تعریف EC را به یاد آورید. گفتیم که کاری شبیه شمردن تعداد مؤلفه‌های مجموعه بروون گشت را انجام می‌دهد. بدین مفهوم که در حالت دو بعدی، این مشخصه برابر تعداد مؤلفه‌های همبند مجموعه بروون گشت، منهای تعداد حفره‌هاست. ادلر [۱] نشان داد که با افزایش مقدار X ، تعداد حفره‌ها به سمت ناپدید شدن میل می‌کند و بنابراین با نواحی مجزایی رو به رو خواهیم بود که تنها شامل مکسیمم‌های موضعی هستند (شکل ۳ ب). بنابراین برای مقادیر بزرگ X ، حفره‌ها به ندرت ظاهر شده و EC تقریبی برای تعداد ماکسیمم‌های (t) بالاتر از سطح X و درون T است. با زیادتر شدن مقدار X و نزدیک شدن آن به مقدار ماکسیمم کل (t) درون X ، T ، مشخصه اولیر مقدار صفر را خواهد داشت اگر $X > X_{\max}$ و اگر $X < X_{\max}$ ، در این صورت مشخصه اولیر مقدار یک را خواهد داشت (شکل ۳ ج). لذا به نظر می‌رسد که امید ریاضی مشخصه اولیر تقریب مناسبی برای (۱۲) باشد، یعنی:

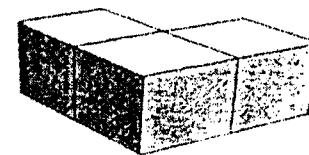
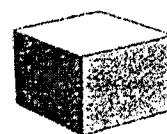
$$P\{X_{\max} \geq x\} \approx E\{\varphi(A_x(T))\}$$

که $(A_x(T)\varphi)$ مشخصه اولیر مجموعه بروون گشت فرایندی تصادفی، درون مجموعه T و بالاتر از سطح x است.

این موضوع در حالت یک بعدی توسط هازفر [۶] به صورت شهودی نشان داده شده است. همچنین ادلر این موضوع را برای میدانهای تصادفی گاووسی تحت شرایطی خاص ثابت کرده است. اما در مورد رفتار این تقریب برای میدانهای تصادفی χ^2 ، F و t بررسیهای صورت نگرفته است. در اینجا با استفاده از شبیه سازی این میدانها، به بررسی این موضوع پرداخته‌ایم. روش کار بدین صورت بوده است که ابتدا میدان تصادفی مورد نظر، n بار شبیه سازی شده و هر بار، ماکسیمم مقدار میدان تصادفی یادداشت شده است. سپس با استفاده از نموداری که در آن یک منهای مقدار تابع توزیع تجمعی نمونه و نیز مقدار تقریب مورد نظر (امید ریاضی مشخصه اولیر) در کنار هم رسم شده‌اند، مسئله مورد بررسی قرار گرفته است. بر روی محور افقی مقادیر یادداشت شده

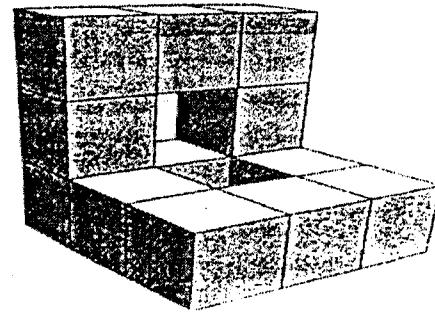
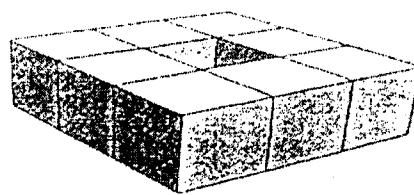


شکل ۱



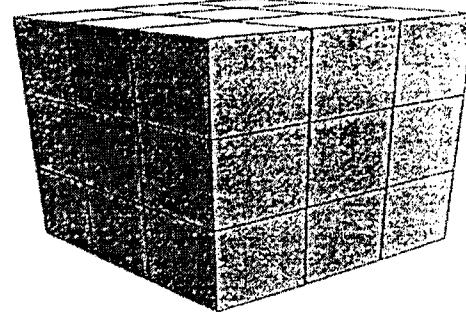
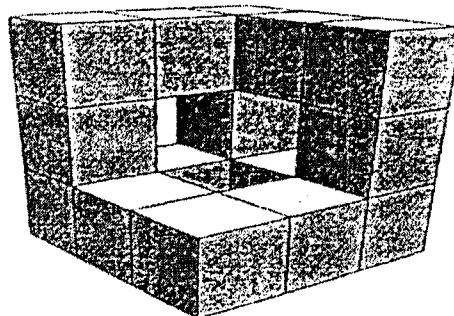
$$8 - 12 + 6 - 1 = 1 \quad (\text{الف})$$

$$16 - 28 + 16 - 3 = 1 \quad (\text{ب})$$



$$22 - 64 + 40 - 8 = 0 \quad (\text{ج})$$

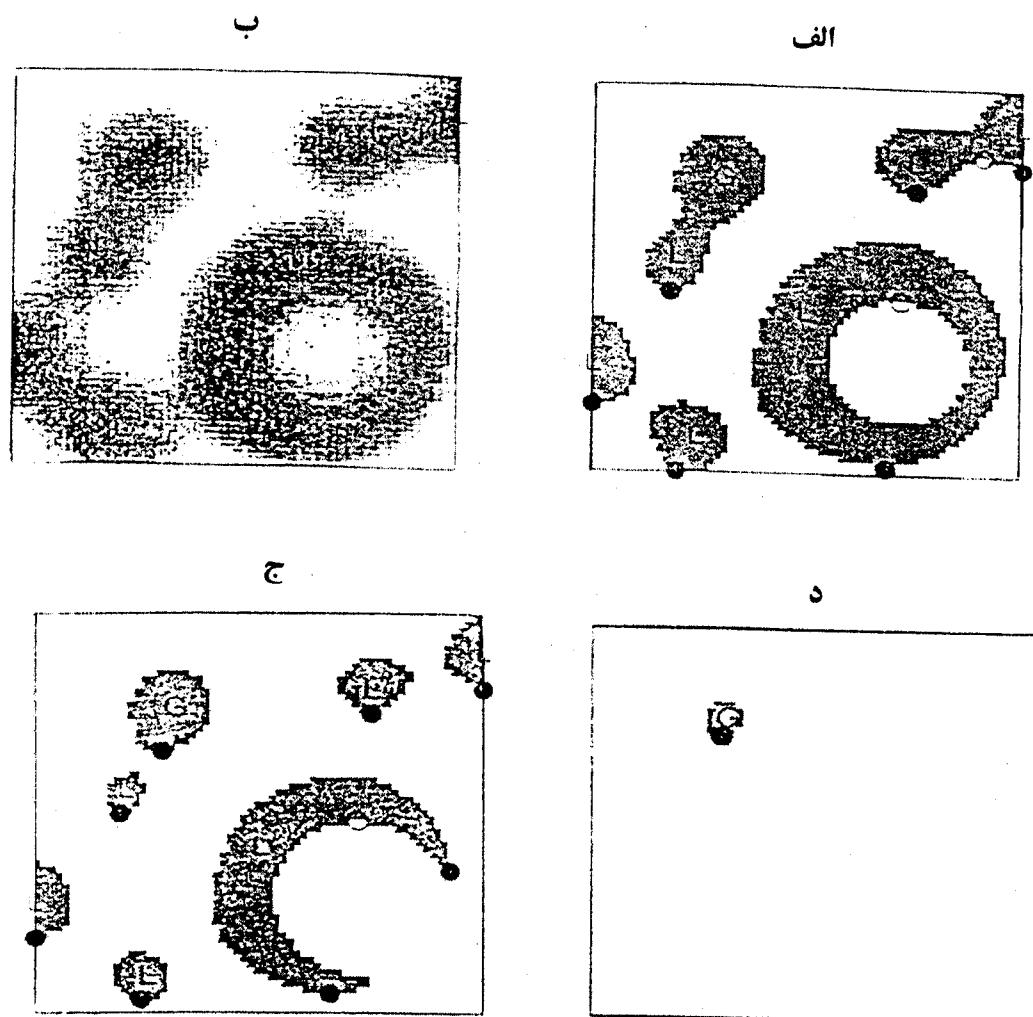
$$48 - 100 + 64 - 12 = -1 \quad (\text{د})$$



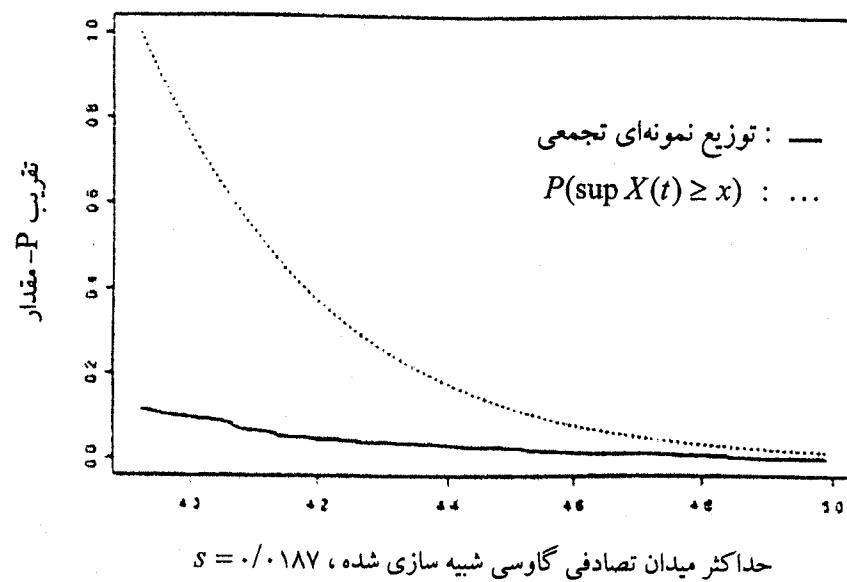
$$56 - 120 + 78 - 16 = -2 \quad (\text{ه})$$

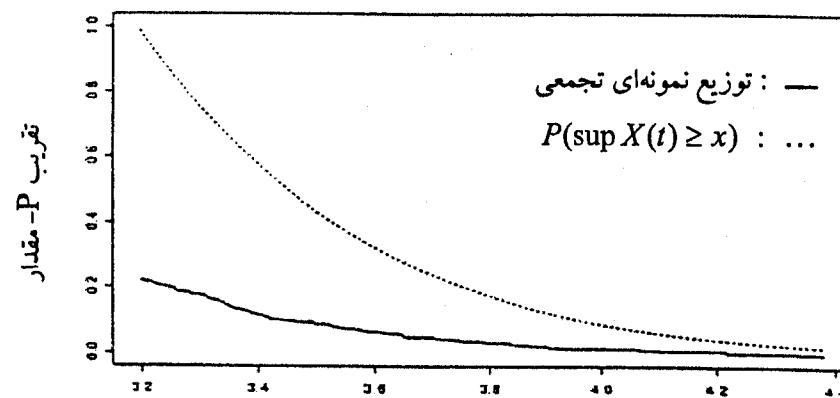
$$64 - 144 + 108 - 26 = 2 \quad (\text{و})$$

شکل ۲. مشخصه اویلر چندوجهی [۱۲]



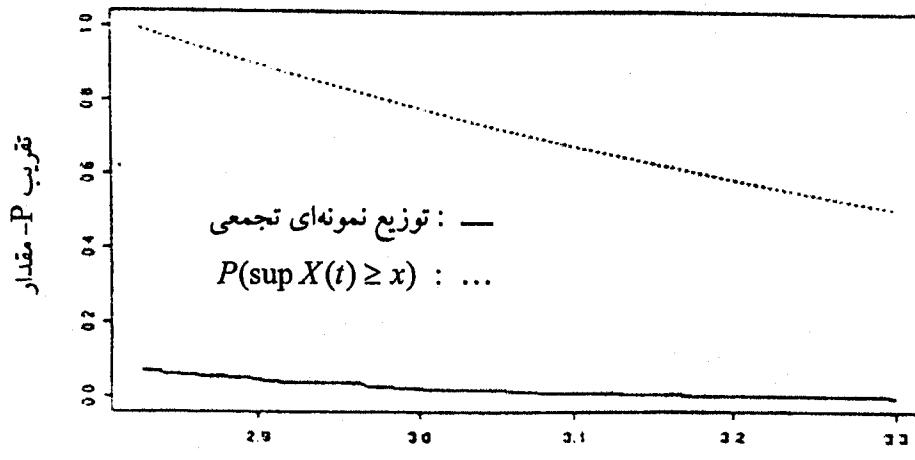
شکل ۳

شکل ۱-۴ (بررسی تقریب $P(\sup_{t \in T} X(t) \geq x)$ ، میدان گاوسی، $S_{11} = 1$)



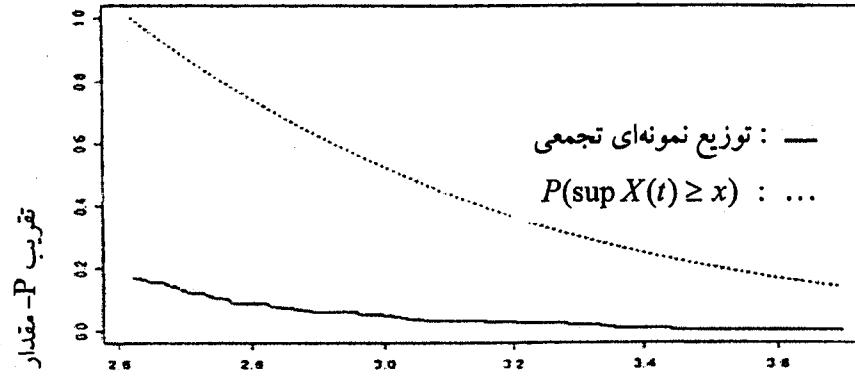
حد اکثر میدان تصادفی گاوسی شبیه سازی شده با $0.117 = S_{11}$

شکل ۴-۲ (بررسی تقریب $P(\sup_{t \in T} X(t) \geq x)$ ، میدان گاوسی، $S_{11} = 0.117$)



حد اکثر میدان تصادفی شبیه سازی شده با $0.187 = S$, $df = 15$

($S_{11} = 0.187$ ، $df = 15$ ، میدان t ، $P(\sup_{t \in T} X(t) \geq x)$)



حد اکثر میدان تصادفی شبیه سازی شده با $0.187 = S$, $df = 25$

($S_{11} = 0.187$ ، $df = 25$ ، میدان t ، $P(\sup_{t \in T} X(t) \geq x)$)

جدول ۱: نتایج حاصل از شبیه سازی میدانهای تصادفی F

df	s	n	$n(./1)$	$d(./1)$	$n(./0.5)$	$d(./0.5)$	$n(./-1)$	$d(./-1)$
(10,10)	1	300	18/72	.0/09	23/45604	.0/04667	—	—
	.0/117	200	14/06616	.0/11	7/6421	-.0/202	—	—
	.0/021	300	10/80862	.0/0833	11/83724	.0/03667	11/83724	—
	.0/0187	400	8/0911	.0/040	8/900723	.0/0070	13/94777	—
(10,10)	1	300	7/91113	.0/1	—	—	—	—
	.0/117	200	24/48432	.0/084	—	—	—	—
	.0/021	300	20/08838	.0/09	—	—	—	—
	.0/0187	200	10/28138	.0/08	22/00993	-.0/0303	—	.0/01

جدول ۲: نتایج حاصل از شبیه سازی میدانهای تصادفی χ^2

df	s	n	$n(./1)$	$d(./1)$	$n(./0.5)$	$d(./0.5)$	$n(./-1)$	$d(./-1)$
10	1	700	43/3977	.0/0799	40/9.99	.0/0	49/9766	.0/0080
	.0/117	200	37/8122	.0/076	39/3628	.0/038	40/1629	.0/01
	.0/021	200	30/6927	.0/092	37/6.209	.0/046	44/0.3	.0/01
	.0/0187	000	31/84033	.0/066	34/8.4.2	.0/038	44/0.071	.0/01
10	1	300	52/9332	.0/0833	50/6381	.0/0467	—	—
	.0/117	200	47/9.01	.0/08	50/0300	.0/0	—	—
	.0/021	200	43/1669	.0/044	45/9434	.0/034	40/4	.0/01
	.0/0187	300	41/2370	.0/09	44/2084	.0/0467	—	—
20	1	000	70/1207	.0/082	71/9736	.0/036	79/6.70	.0/008
	.0/117	100	63/4032	.0/06	66/1309	.0/06	—	—
	.0/021	200	60/3910	.0/08	73/82	.0/0	74/82	—
	.0/0187	200	57/8703	.0/097	66/78	.0/0	66/78	—

جدول ۳: نتایج حاصل از شبیه سازی میدانهای تصادفی گاوی

s	n	$n(./1)$	$d(./1)$	$n(./.5)$	$d(./.5)$	$n(./.1)$	$d(./.1)$
۱	۵۰۰	۴/۰۱۴۸	۰/۰۷۸	۴/۷۳۷۳	۰/۰۴	—	—
۰/۱۱۷	۵۰۰	۳/۹۲۰۹	۰/۰۸۴	۴/۲۱۰۱۱	۰/۰۴۴	—	—
۰/۰۵۲۱	۵۰۰	۳/۶۶۲۶	۰/۰۷۴	۳/۹۱۰۳	۰/۰۰۶	—	—
۰/۰۱۸۷	۵۰۰	۳/۲۰۸۳	۰/۰۶	۳/۰۲۶۳	۰/۰۱	۴/۱۹۳۶۱	۰/۰۱

منابع

- [1] Adler, R.J., (1981), *The Geometry of Random Fields*, Wiley, New York.
- [2] Adler, R.J., (1999), *On Excursion Sets, Tube Formulae, and Maxima of Random Fields*.
- [3] Adler, R.J. and Hasofer, A.M., (1976), *Level Crossings for Random Fields*, Annals of Probability, 4, 1-12.
- [4] Anderson, T.W., (1984), *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis*, 2nd Edition, Wiley, New York.
- [5] Cressie, N. and Davis, R.W., (1981), *The Suprimum Distribution of Another Gaussian Process*, J. Appl. Prob. 18, 131-138.
- [6] Hasofer, A.M., (1978), *Upcrossings of Random Fields, Supplement to Advances in Applied Probability*, 10, 14-21.
- [7] Siegmund, D.O. and Worsley, K.J., (1995), *Testing for a Signal With Unknown Location and Scale in a Stationary Gaussian Random Field*, Annals of Statistics, 23, 608-639.
- [8] Shafie, Khalil, (1998), Ph.D. Thesis, *The Geometry of Gaussian Rotation Space Random Field*, Department of Mathematics and Statistics, McGill University, Montreal.
- [9] Worsley, K.J., Evans, A.C., Marrett, S. and Neelin, P., (1992), *A Three Dimensional Statistical Analysis for CBF Activation Studies in Human Brain*, Journal of Cerebral Blood Flow and Metabolism, 12, 900-918.
- [10] Worsley, K.J., Evans, A.C., Marrett, S. and Neelin, P., (1993), *Detecting Changes in Random Fields and Applications to Medical Images*, Journal of the American Statistical Association.
- [11] Worsley, K.J., (1994), *Local Maxima and the Expected Euler Characteristic of Excursion Sets of χ^2 , F and t Fields*, Advances in Applied Probability, 26, 13-42.
- [12] Worsley, K.J., (1996), *The Geometry of Random Images*, Chance, 9(1), 27-40.
- [13] Worsley, K.J., Marrett, S., Neelin, P.D. and Evans, A.C., (1996), *Searching Scale Space for Activation in PET Images*, Human Brain Mapping, 4, 74-90.
- [14] Worsley, K.J., (1998), *Testing for Signals with Unknown Location and Scale in a χ^2 Random Field, with an Application to fMRI*.
- [۱۵] سمانه قادری، ۱۳۸۰، بررسی تقریب توزیع احتمال حد اکثر یک میدان تصادفی با میانگین مشخصه اویلر، رساله کارشناسی ارشد، دانشگاه شهید بهشتی تهران.